Jahresbericht

Deutsche Mathematiker-Ve...

JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN
MATHEMATIKER-VEREINIGUNG

IN MONATSHEFTEN HERAUSGEGEBEN VON

A. GUTZMER
IN HALLE A. S.

FÜNFZEHNTER BAND.

MIT DEN BILDNISSEN VON RUDOLPH LIPSCHITZ, HERMANN KORTUM UND OTTO STOLZ, SOWIE 6 FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1906.

Inhalt.

I. Angelegenheiten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

sages 1-18 are missing

II. Berichte, Vorträge und Abhandlungen.

III. Nekrologe.

IV. Mitteilungen und Nachrichten.

1. Akademien. Gesellschaften. Vereinigungen. Versammlungen.

V. Literarisches.

JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN
MATHEMATIKER-VEREINIGUNG

IN MONATSHEFTEN HERAUSGEGEBEN VON

A. GUTZMER
IN HALLE A. S.

15. BAND. 1. HEFT. JANUAR.

MIT DEN BILDNISSEN VON RUDOLF LIPSCHITZ UND HERMANN KORTUM IM TEXT,
SOWIE EINER TEXTFIGUR.

AUSGEGEBEN AM 31. JANUAR 1906.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1906.

JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG.

IN MONATSHEFTEN HERAUSGEGEBEN VON A. GUTZMER IN HALLE A. S.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

☞ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Bücher usw.) sind an

Prof. Dr. A. Gutzmer in Halle a. S., Martinsberg 8,

zu richten.

☞ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich: von größeren Aufsätzen 25 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen und Mitteilungen 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☞ Jeder Band des Jahresberichts in Monatsheften umfaßt vom 12. Bande ab 38 Bogen (= 608 Druckseiten) und kostet für Mitglieder der Vereinigung, Porto inbegriffen, Mark 14.70, für Nichtmitglieder Mark 18.—. Mitglieder haben ihr Abonnement bei der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig, Poststraße 3, aufzugeben, Nichtmitglieder dagegen bei einer Sortimentsbuchhandlung.

☞ Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung zählt z. Zt. über 660 Mitglieder. Der jährliche Mitgliedsbeitrag beträgt 2 Mark, kann aber auch durch einmalige Zahlung von 30 Mark abgelöst werden. Beitrittserklärungen nimmt der Schriftführer der Vereinigung, Prof. Dr. A. Krazer, Karlsruhe in Baden, Westendstraße 57, oder die oben genannte Verlagsbuchhandlung entgegen. Die Ablösungssumme bezw. der Jahresbeitrag ist an die Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig einzusenden.

INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.

Über die logischen Paradoxien der Mengenlehre.[1])

Von A. Schönflies in Königsberg i. Pr.

Die Mengenlehre hat bekanntlich zu gewissen logischen Paradoxien geführt, die mehr und mehr als eine höchst unangenehme Beigabe empfunden werden. Eine *einfache* Klärung der auftretenden Widersprüche hat, soweit mir bekannt, bisher nicht stattgefunden; auch die neueste Arbeit von Herrn J. König[2]) erreicht meines Erachtens dieses Ziel nicht. Der Hilbertsche Aufsatz[3]) über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik hat allerdings den ausgesprochenen Zweck, durch einen *neu* zu schaffenden *axiomatischen* Aufbau der logischen Gesetze und Grundbegriffe das Auftreten von derartigen Widersprüchen auszuschließen. Ohne hierzu irgendwie in einen Gegensatz treten zu wollen, bin ich doch der Meinung, daß *die Auflösung der Widersprüche auch ohne dies möglich sein muß.* Angesichts des Umstandes, daß man die Auflösbarkeit dieser Paradoxien mit den elementaren Mitteln der Logik ernstlich in Zweifel gezogen hat, scheint mir eine einfache Auflösung geradezu eine Notwendigkeit geworden zu sein. Man bedenke, daß sich Herr Frege am Ende seines umfassenden Werkes über die Grundgesetze der Arithmetik[4]) zu dem Geständnis genötigt sieht, angesichts des Russelschen Paradoxons über die „Klasse aller sich nicht selbst enthaltenden Klassen" sei „eine der Grundlagen seines Gebäudes erschüttert", also der ganze wissenschaftliche Aufbau in Frage gestellt.

Zuvor schicke ich folgendes voraus. Bei der Prüfung der logischen Richtigkeit einzelner Darlegungen kommt immer nur die richtige *Anwendung* der logischen Regeln in Betracht. Dies ist der Grund, aus dem die oben gestreifte Frage nach ihren Grundlagen hier keine Rolle spielt; für unsern Zweck bleibt es gleichgültig, ob man die logischen Sätze metaphysisch, psychologisch oder axiomatisch begründet. Es gibt aber meines Erachtens nur einen einzigen prinzipiellen Satz, dem die einzelnen Schlüsse und Darlegungen in logischer Hinsicht genügen müssen, und dies ist der *Satz vom Widerspruch.*[5])

1. Sind $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$ irgend welche Dinge oder Begriffe, so sagt der *Satz vom Widerspruch* aus, daß von den zwei Sätzen:

---

1) Vortrag, gehalten auf der Jahresversammlung der Math.-Ver. in Meran.

2) Math. Ann. 61, p. 156.

3) Verhandlungen des dritten internat. Math. Kongresses, Leipzig 1905, p. 174.

4) Vgl. den Anhang Bd. II, S 255.

5) Auch als Satz vom ausgeschlossenen Dritten bezeichnet.

1) Dem $\mathfrak{A}$ kommt die Eigenschaft $\mathfrak{B}$ zu, und

2) Dem $\mathfrak{A}$ kommt die Eigenschaft $\mathfrak{B}$ *nicht* zu

stets *einer und nur einer* richtig ist. Jeden dieser beiden Sätze bezeichnet man bekanntlich als das kontradiktorische Gegenteil des andern.

Auf dem Satz vom Widerspruch beruht das wichtigste mathematische Schlußverfahren, das wir kennen, nämlich der *indirekte Beweis*.

Das Wesen dieses Beweises besteht darin, das man aus einem Satz A mittels einer logischen Kette — d. h. mittels einer Kette logisch verbundener richtiger Zwischensätze — einen Satz S ableitet, der *nicht* richtig ist. Auf Grund des Satzes vom Widerspruch schließt man dann, daß nicht der Satz A, sondern sein kontradiktorisches Gegenteil richtig ist.

Diese einfachen Tatsachen mußte ich vorausschicken.

2. Ich stelle nun die scheinbar überflüssige Frage, ob es hiervon Ausnahmen gibt. Dem Vorstehenden gemäß müßte dies allerdings ausgeschlossen sein, und doch können in der Praxis Ausnahmen auftreten. Es wurde nämlich bisher die stillschweigende Voraussetzung gemacht, daß die Begriffe $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ... mit denen wir operieren, *widerspruchsfreie* Begriffe sind. Dies war ebenso natürlich, wie notwendig. Operiert man dagegen mit Begriffen, die *nicht* widerspruchsfrei sind, so versagen die obigen Ausführungen. Insbesondere versagt auch für sie der Satz vom Widerspruch und das Schlußverfahren des indirekten Beweises, und *dies ist*, um es bereits hier zu sagen, *die Quelle unserer logischen Paradoxien*.

Man denke sich z. B., man hätte sich den Begriff $\mathfrak{A}$ eines rechtwinkligen gleichseitigen räumlichen Fünfseits gebildet, alsdann kann sowohl der Satz:

„Diesem $\mathfrak{A}$ kommt die Eigenschaft $\mathfrak{B}$ zu"

wie auch der Satz:

„Diesem $\mathfrak{A}$ kommt die Eigenschaft $\mathfrak{B}$ nicht zu"

mittels einer geeigneten logischen Kette einen Widerspruch ergeben. In einem solchen Fall kann daher die Methode des indirekten Beweises *nicht* zu einem positiven Ergebnis führen; d. h. wird irgend einer der beiden vorstehenden Sätze als Ausgangssatz A benutzt, so kann aus der Unrichtigkeit des Schlußsatzes S nicht mehr gefolgert werden, daß das kontradiktorische Gegenteil von A richtig sein müsse. Zu einem gewissen Ergebnis führt die Methode des indirekten Beweises allerdings auch hier. Falls nämlich sowohl ein Satz A, wie sein kontradiktorisches Gegenteil mittels einer logischen Kette einen unrichtigen Schlußsatz ergibt, so ist mit Notwendigkeit zu schließen, daß der Ausgangssatz einen Begriff enthält, der *nicht widerspruchsfrei* ist.

Insbesondere schließt man in dem obigen Beispiel, daß der angenommene Begriff $\mathfrak{A}$ nicht existiert. Weiteres aber kann nicht gefolgert werden.

Das Resultat dieser Erörterung läßt sich kurz folgendermaßen aussprechen:

Begriffe, für die der Satz des Widerspruchs resp. die Methode des indirekten Beweises versagt, sind nicht widerspruchsfrei. Sie können daher weder Gegenstand noch Hilfsmittel wissenschaftlicher Betrachtung sein.[1])

Der Vollständigkeit halber füge ich hinzu, daß ähnliches auch dann gilt, wenn irgend ein *Zwischensatz* einer logischen Kette einen Begriff enthält, der nicht widerspruchsfrei ist.

Hierin ist meines Erachtens die Auflösung der mathematischen Paradoxien resp. Antinomien enthalten.[2]) Zugleich ist damit das allgemeine Resultat, das ich ableiten oder vielmehr, auf das ich einmal ausdrücklich hinweisen wollte, erreicht. Es bleibt nur übrig, es auf die einzelnen Fälle anzuwenden.

3. Ich beginne mit dem Russelschen Paradoxon. Es operiert mit der Menge $\mathfrak{M}$ aller Mengen μ, die sich selbst nicht als Element enthalten.[3]) Hier führt sowohl die Annahme, daß $\mathfrak{M}$ sich selbst als Element enthält, wie auch die Annahme, daß $\mathfrak{M}$ sich selbst nicht als Element enthält, auf einen Widerspruch. *Daraus folgt mit Notwendigkeit, daß der Begriff der Menge $\mathfrak{M}$ nicht widerspruchsfrei sein kann.*

Es ist nicht schwierig, dies a posteriori nachzuweisen. Ich frage zunächst, ob es Mengen gibt, die sich *nicht* als Element enthalten. Dies ist sicher der Fall. Die Menge $\mathfrak{M}_\nu$ aller positiven ganzen Zahlen ν, die Menge $\mathfrak{M}_x$ aller reellen Zahlen x sind Beispiele dieser Art. Wir können auch eine Menge bilden, die alle Zahlen ν und die aus ihnen gebildete Menge $\mathfrak{M}_\nu$ als Elemente enthält, und gelangen so zu einer Menge

$$\mathfrak{M}' = \{\mathfrak{M}_\nu,\ \nu\},$$

die sich ebenfalls nicht als Element enthält, und ebenso steht es mit einer Menge

$$\mathfrak{M}'' = \{\mathfrak{M}_x,\ x\},$$

die alle Zahlen x und $\mathfrak{M}_x$ als Elemente enthält, usw. usw.

---

1) Hierin dürfte übrigens dasjenige *objektive* Kriterium für die wissenschaftliche Zulässigkeit eines Begriffes gewonnen sein, auf dessen Notwendigkeit in den Hilbertschen Grundlagen (a. a. O. S. 176) mit Recht hingewiesen wird.

2) Jede analoge Antinomie muß in dieser Weise lösbar sein.

3) Russel spricht von „Klassen" statt „Mengen". Dies kommt aber inhaltlich auf dasselbe hinaus. Auch sehe ich ausdrücklich von dem uneigentlichen Begriff einer Menge ab, die aus einem Elemente besteht.

Wir fragen zweitens, ob es Mengen gibt, die sich selbst als Element enthalten. *Dies ist unmöglich.* Jeder Versuch, eine Menge dieser Art zu bilden oder vorzustellen, muß scheitern. Es genügt in dieser Hinsicht, auf die im Mengenbegriff steckenden Grundeigenschaften hinzuweisen. Als solche sind anzuführen: 1. Die Menge ist verschieden von jeder ihrer Teilmengen, insbesondere von jedem ihrer Elemente. 2. Wenn irgendwelche Elemente zu einer Menge zusammengefaßt werden, so bleiben sie sozusagen *begrifflich invariant.* Die Menge repräsentiert daher einen *neuen* Begriff, der zu den einzelnen Begriffen, die die Menge konstituieren, noch hinzukommt. Deshalb kann es Mengen, die sich selbst als Element enthalten, nicht geben.[1])

Die Russelsche Menge $\mathfrak{M}$ aller Mengen μ, die sich selbst nicht als Element enthalten, ist daher nichts anderes, als die „Menge aller Mengen". Dies sind zunächst wieder nur Worte; wir folgern aber sofort, daß auch diese Worte keinen widerspruchsfreien Begriff darstellen können. Dies bedarf aber kaum einer ausdrücklichen Erörterung; denn hier liegt der Widerspruch dem Vorstehenden gemäß auf der Hand. Die „Menge *aller* Mengen" würde nämlich — falls man sie dem Russelschen Schlußverfahren gemäß so auffaßt, daß eines der Elemente der „Menge" mit der „Menge" identisch sein soll — ebenfalls eine Menge darstellen, die sich selbst als Element enthält, was ja unmöglich ist. Damit ist die Quelle des Russelschen Paradoxons aufgedeckt.[2])

1) Ich möchte mir nicht versagen, den logischen Charakter der Mengen, die sich selbst nicht als Element enthalten, durch ein Beispiel zu erläutern. Versteht man unter einem Kavalleristen einen Soldaten, der — cum grano salis — zu Pferde sitzt, so begeht man einen logischen Fehler, wenn man den Begriff „reitender Kavallerist" bildet und mit ihm operiert, als stellte er nun eine besondere Art von Kavalleristen dar. Genau das Gleiche gilt für die Russelsche Schlußweise.

2) Man könnte der Meinung sein, daß mit der Menge aller Mengen auch die bekante Cantor-Dedekindsche Definition des Mengenbegriffs fallen müßte, da diese die Menge aller Mengen nicht ausschließe. Dies trifft meines Erachtens nicht zu. Allerdings bedarf die Definition eines Zusatzes, der, genau genommen, an jede von uns geschaffene Definition anzufügen ist, nämlich: „Vorausgesetzt, daß der gebildete Begriff widerspruchsfrei ist". So selbstverständlich es ist, daß dieser Zusatz nirgends ausdrücklich aufgeführt wird, so selbstverständlich ist es auch, daß er niemals außer Acht zu lassen ist. Diesem Zusatze gemäß ist aber die Menge aller Mengen auszuschließen. In der Cantorschen Theorie wird dies durch das Wort „wohldefiniert" bewirkt. Man wird nun gewiß einwenden, daß die Gesamtheit aller widerspruchsfrei definierbaren Mengen jedenfalls existiert. Dies ist richtig. Ein Fehler entsteht erst, wenn man diese Gesamtheit Operationen unterwirft, die wir gemäß den Axiomen und Sätzen der Mengenlehre mit den einzelnen wohldefinierten Mengen vornehmen. Ohne tiefer auf diese Dinge einzugehen, möchte ich darauf hinweisen, daß die hier gestreiften Verhältnisse unter

4. Auch die Gesamtheit W aller wohlgeordneten Mengen hat bekanntlich zu einem logischen Paradoxon Veranlassung gegeben.[1]) Man zieht daraus zunächst wieder die Folgerung, daß in die bezüglichen Schlüsse ein Begriff eingeht, der *nicht widerspruchsfrei* ist. Das Paradoxon entsteht allerdings erst dann, wenn man auf die der Größe nach geordnete Gesamtheit W, die freilich wohlgeordnet ist, diejenigen Eigenschaften überträgt, die ihren Abschnitten zukommen, insbesondere die, daß man zu jedem Abschnitt einen größeren bilden kann; d. h. wenn man (W, m) bildet. In der Tat leuchtet unmittelbar ein, daß die mit dieser Eigenschaft belegte Gesamtheit W einen Begriff darstellt, der einen Widerspruch enthält. Der in sich widerspruchsvolle Begriff (W, m) darf daher nicht Hilfsmittel mathematischer Beweise sein und alle mit seiner Hilfe abgeleiteten Resultate entbehren der Begründung.[2])

5. Ich benutze die Gelegenheit, um folgende Ausführungen hier anzufügen. Man kann allgemein die Frage stellen, ob die logischen Lehren durch die Mathematik und die Mathematiker eine Bereicherung erfahren können. Daß hier nicht von dem axiomatischen Aufbau der Logik die Rede sein soll, den allerdings die Philosophen bisher kaum versucht haben dürften, sondern von den logischen Grundsätzen und Methoden selbst, bedarf kaum der Erwähnung. Gewiß wird man eine solche Bereicherung für ausgeschlossen halten. Und doch trifft diese Meinung nicht zu. Die Logiker haben bisher nur mit solchen logischen Ketten operiert, die aus einer endlichen Zahl von Schlüssen bestehen. Seit Cantor operieren die Mathematiker aber mit unendlichen Ketten; von ihm haben wir gelernt, außer dem Schluß von ν auf $\nu + 1$ den von $\{\nu\}$ auf ω, resp. von $\{\alpha_\nu\}$ auf α_ω anzuwenden, und hierin besteht eine außerordentliche Bereicherung der logischen Methoden. Allerdings ist zu beachten, daß, wenn eine unendliche Kette vorliegt, die *denselben*

---

das den Logikern geläufige Wort fallen: Omnis determinatio est negatio. Das „All“ kann nicht Gegenstand logischer Operationen sein. Begriffe, mit denen wir operieren können, entstehen erst, wenn es Dinge gibt, die unter sie fallen, und solche, die nicht unter sie fallen. Zusammenfassend könnte man also sagen, daß es zwei Fälle gibt, in denen ein Begriff wissenschaftlich nicht verwendbar, resp. wohldefiniert ist, wenn nämlich entweder *alles* oder aber *nichts* unter ihn fällt.

1) Vgl. besonders Ph. Jourdain, Phil. Magazine 1904, S. 64 und F. Bernstein, Math. Ann. 60, S. 187.

2) Meines Erachtens ist sich Herr G. Cantor über diesen Sachverhalt von Anfang an klar gewesen. Dafür spricht besonders der Umstand, daß er die Gesamtheit W nicht als wohlgeordnete Menge bezeichnet, sondern nur deren Abschnitte.

Das Obige findet übrigens auch Anwendung auf den Zermeloschen Beweis über die Wohlordnung des Kontinuums, was ich in ähnlicher Form schon ausgeführt habe: vgl. Math. Ann. Bd. 59, S. 514 u. Bd. 60, S. 181.

Schluß von jedem ν auf das folgende $\nu + 1$ auszudehnen gestattet, die Möglichkeit des Schlusses von $\{\nu\}$ auf ω sich *keineswegs von selbst versteht, sondern jedesmal besonderer Untersuchung bedarf.*[1]) Ein einfaches Beispiel wird dies in Evidenz setzen. Zerfällt eine Strecke in mehrere Intervalle, und teilt man eines von ihnen in zwei gleiche Teile, so kann man behaupten, daß immer wieder ein Intervall vorhanden ist, das eine neue Zweiteilung gestattet. Dieser Schluß gilt für jedes ν. Setzt man nun fest, daß das zu teilende Intervall das *kleinste* der vorhandenen ist, so ist unser Schluß auch von $\{\nu\}$ auf ω ausdehnbar. Wird dagegen das *größte* Intervall der Zweiteilung unterworfen, so ist die Ausdehnung von $\{\nu\}$ auf ω nicht gestattet; denn in diesem Falle werden die Teilungspunkte der Intervalle schließlich überall dicht liegen.

Man mag fragen, welchem Zweck die vorstehenden Bemerkungen dienen sollen. Darauf ist zu antworten, daß meines Erachtens die bewußte Anwendung der fraglichen Schlußweise in vielen Fällen eine formale Vereinfachung und vielleicht auch eine materielle Klärung bedeuten kann. Dies mögen folgende Beispiele erläutern.

6. Bei der Grundlegung der Geometrie, die Herr Hilbert auf Grund des Gruppenbegriffs gegeben hat[2]), geht er allgemein von umkehrbar eindeutigen Transformationen der Ebene aus, und scheidet aus ihnen die Bewegungen insbesondere durch drei Axiome aus, die folgendermaßen lauten: 1. Die „Bewegungen" bilden eine Gruppe. 2. Durch „Drehung" um einen Punkt M (d. i. eine Bewegung, bei der Punkt M fest bleibt,) kann man einen Punkt A in unendlich viele Lagen bringen. 3. Wenn es Bewegungen gibt, durch welche Punktetripel in beliebiger Nähe des Punktetripels ABC in beliebige Nähe des Punktetripels $A'B'C'$ übergeben, so gibt es auch eine solche Bewegung, durch die das Punktetripel ABC genau in $A'B'C'$ übergeht. Es ist klar, daß das dritte Axiom das wichtigste ist, und daß auf ihm allein die Unterscheidung der Bewegungen von den übrigen hierhergehörigen Transformationen beruht. Dies liegt nun einfach daran, daß bei den Bewegungen ein gewisser Schluß von $\{\nu\}$ auf ω *stets* zulässig ist, während dies bei den übrigen Transformationen nicht der Fall zu sein braucht. Seien nämlich $S_1, S_2, S_3, \ldots S_\nu \ldots$ irgend welche eineindeutige Transformationen, so gilt dies auch von dem Produkte

$$\mathfrak{S}_\nu = S_1 \cdot S_2 \ldots S_\nu.$$

1) Der Nachweis der Zulässigkeit dieses Schlusses bildet bei vielen Cantorschen Sätzen den Hauptgegenstand des Beweises.

2) Vgl. Math. Ann. Bd. 56, p. 381 ff.

Nehmen wir nun insbesondere an, daß auch

$$\mathfrak{S}_\omega = S_1 \cdot S_2 \ldots S_\nu \ldots$$

eine Transformation ist, die einem endlichen Punkt wieder einen endlichen Punkt zuordnet, so läßt sich der Unterschied zwischen den Bewegungen und den übrigen umkehrbar eindeutigen Transformationen dahin aussprechen, daß bei den Bewegungen nicht nur jedes $\mathfrak{S}_\nu$ sondern auch $\mathfrak{S}_\omega$ eine Bewegung ist — was evident ist —, während dieser Schluß bei den übrigen Transformationen versagen kann. Denkt man sich z. B. ein Dreieck ABC, verbindet C mit einem Punkte C' von AB und nimmt auf CC' Punkte $C_1, C_2 \ldots C_\nu \ldots$ an, die in C' ihren Grenzpunkt haben, so kann man eine Affinität S_1 definieren, die Dreieck ABC in ABC_1 überführt und allgemein eine Affinität S_ν, die $ABC_{\nu-1}$ in ABC_ν überführt. Es ist dann

$$\mathfrak{S}_\nu = S_1 \cdot S_2 \ldots S_\nu$$

eine Affinität, die ABC in ABC_ν überführt. Dagegen ist

$$\mathfrak{S}_\omega = S_1 \cdot S_2 \ldots S_\nu \ldots$$

keine eigentliche Affinität mehr, sondern eine ausgeartete. Wenn also das dritte Axiom für die Affinitäten versagt, so kann als Grund angesehen werden, daß für die Affinitäten im Gegensatz zu den Bewegungen der bezügliche Schluß von $\{\nu\}$ auf ω nicht erlaubt ist.

Zum Schluß möchte ich mit wenigen Worten auf die Debatte hinweisen, die auf dem internationalen Heidelberger Kongreß über das Prinzip von der Erhaltung der Anzahl stattfand. Herr Study führte damals einwandfreie Beispiele an, in denen das Prinzip versagt.[1]) Ich will die außerordentlichen Resultate, die das Prinzip geliefert hat, keineswegs herabsetzen und erlaube mir nur eine formale Bemerkung. Meist wird das Prinzip so angewandt, daß man eine Figur $\mathfrak{S}$ allgemeiner Art *kontinuierlich* in einen ausgearteten einfacheren Fall $\mathfrak{S}'$ übergehen läßt. Man kann sich aber auch — und dies ist sogar das Bestimmtere — auf die Betrachtung von diskreten Figuren $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2 \ldots \mathfrak{S}_\nu \ldots$ beschränken, für die $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S}_\omega$ eine Grenzlage ist. Und dann würde die ausnahmslose Gültigkeit des Prinzips bedeuten, daß in allen diesen Fällen ein Schluß von $\{\nu\}$ auf ω gestattet ist, nämlich der Schluß, daß gewisse Abzählungen nicht nur beim Übergang von $\mathfrak{S}_\nu$ zu $\mathfrak{S}_{\nu+1}$, sondern auch beim Übergang zu $\mathfrak{S}_\omega$ ausnahmslos erhalten bleiben. Man wird nach dem Vorstehenden kaum überrascht sein, daß dies nicht zutrifft.

1) Vgl. die bezüglichen Verhandlungen, p. 388 ff.

Über die Möglichkeit einer projektiven Geometrie bei transfiniter (nicht archimedischer) Maßbestimmung.

Von A. Schoenflies in Königsberg i. Pr.

Der voraussichtlich bald erscheinende zweite Teil meines Berichts über Mengenlehre wird sich auch mit Herrn Veroneses transfiniter Konstruktion des Kontinuums zu beschäftigen haben.[1]) Um im Bericht nicht zu ausführlich zu werden, will ich mich bereits an dieser Stelle etwas eingehender über den Gegenstand äußern.

Ich habe mich früher dahin ausgesprochen, daß für die von Veronese konstruierten transfiniten Zahlen die Multiplikation nicht durchweg gestattet ist und dies würde zur Folge haben, daß die projektiven Begriffe nicht auf sie ausdehnbar sind.[2]) Diese Meinung beruhte nun allerdings auf einer mißverständlichen Auffassung der Veroneseschen Schriften, die durch ein von ihm fehlerhaft behandeltes Beispiel geboten war[3]), und wird damit hinfällig. Doch aber wäre es nicht richtig, hieraus nunmehr zu schließen, daß für Veroneses transfinite Zahlen die Sätze der projektiven Geometrie *ausnahmslos* gelten. Vielmehr würde es dazu erst gewisser Erweiterungen seiner Zahlen bedürfen.

Um dies auszuführen, ist zuvor die Frage zu behandeln, welches Minimum von Bedingungen für transfinite Zahlen erfüllt sein muß, damit sie einerseits einen irgendwie bestimmten Zahlkörper bilden und andererseits für sie die spezifische Veronesesche Stetigkeit besteht, zumal dieser Punkt bisher nicht genügend in Untersuchung gezogen worden ist.

Ich beginne mit einer kurzen Begriffsbestimmung transfiniter Zahlen und einigen Bemerkungen über den Stetigkeitsbegriff.

1. Transfinite Zahlen bedingen die Einführung unendlich großer resp. unendlich kleiner Einheiten. Die unendlich große Einheit ω ist

1) Fondamenti di geometria, übersetzt von A. Schepp, Leipzig 1894. Die folgenden Zitate beziehen sich auf die Übersetzung. In neuerer Bezeichnung ist die Veronesesche Maßbestimmung eine *nicht-archimedische*. Ich werde jedoch die Veroneseschen Bezeichnungen und Begriffe im allgemeinen beibehalten.

2) Dieser Jahresbericht, Bd. 5, S. 75.

3) a. a. O. S. 217. Das Beispiel wurde von ihm später richtig gestellt. (Rend. Lincei 1898, S. 86.) Da die Veroneseschen Beweise keineswegs sämtlich einwandfrei sind, hielt ich es damals für das beste, mich an die Beispiele zu halten.

so definiert, daß für jede positive reelle Zahl a und für jede ganze positive Zahl ν die Relation

$$\nu a < \omega$$

besteht. $\frac{1}{\omega}$ stellt alsdann eine unendlich kleine Einheit dar. Mit ihnen können wir die einfachsten transfiniten Zahlen in der Form

(1) $$a_0 + \frac{a_1}{\omega}, \quad \text{resp.} \; A_1 \omega + A_0$$

darstellen. Fügt man zu den Einheiten 1 und ω die unendlich großen Einheiten ω^λ, wo λ eine positive ganze Zahl ist, und für jedes λ und jede positive ganze Zahl ν die Relation

$$\omega^\lambda > \nu \omega^{\lambda - 1}$$

besteht, so erhält man die allgemeinen Zahlen

(2) $$\begin{gathered} a_0 + \frac{a_1}{\omega} + \frac{a_2}{\omega^2} + \cdots + \frac{a_\lambda}{\omega^\lambda}, \\ A_\mu \omega^\mu + A_{\mu-1} \omega^{\mu-1} + \cdots + A_0, \end{gathered}$$

die mit einer endlichen Zahl unendlich großer resp. unendlich kleiner Einheiten gebildet sind, oder auch die Zahlen

(2a) $$A_\mu \omega^\mu + A_{\mu-1} \omega^{\mu-1} + \cdots A_1 \omega + a_0 + \frac{a_1}{\omega} + \cdots + \frac{a_\lambda}{\omega^\lambda},$$

die durch Kombination beider entstehen. Noch allgemeinere Zahlen erhält man, wenn man unendlich viele unendlich kleine Einheiten zuläßt, man gelangt so zu transfiniten Zahlen der Form

(3) $$a_0 + \frac{a_1}{\omega} + \cdots + \frac{a_\nu}{\omega^\nu} + \cdots$$

oder auch

(3a) $$A_\mu \omega^\mu + A_{\mu-1} \omega^{\mu-1} + \cdots + A_1 \omega + a_0 + \frac{a_1}{\omega} + \cdots + \frac{a_\nu}{\omega^\nu} + \cdots.$$

Dabei sind die a_i und A_i irgend welche reelle positive oder negative Zahlen, die Null eingeschlossen. Ich bezeichne sie als *Koeffizienten*. Die Einheit ω^λ soll die unendlich große Einheit *λter Ordnung* heißen. λ bezeichne ich auch als *Exponenten*.

Von den noch höheren transfiniten Zahlen Veroneses sehe ich zunächst ab; ich komme später auf sie zurück (§ 10).

Die Rechnungsgesetze der obigen Zahlen sind dieselben wie für ganze Funktionen, resp. für Potenzreihen; insbesondere wird auch die Division ebenso ausgeführt wie die Entwickelung eines Quotienten von ganzen Funktionen oder Potenzreihen. Im Gegensatz zu den Potenz-

reihen kommt jedoch die Konvergenz hier nicht in Frage; die Koeffizienten a_i und A_i können jeden endlichen Wert annehmen.

Was endlich die Größenbeziehung betrifft, so sind zwei transfinite Zahlen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ dann und nur dann gleich, wenn alle Koeffizienten bezüglich gleich sind, d. h. wenn

$$A_i = B_i \quad \text{und} \quad a_i = b_i$$

ist. Bei zwei ungleichen Zahlen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gibt es daher ein erstes Koeffizientenpaar A_i, B_i resp. a_i, b_i, das der vorstehenden Relation nicht genügt. Dann ist

$$\mathfrak{A} \gtrless \mathfrak{B}, \quad \text{falls} \quad A_i \gtrless B_i \quad \text{resp.} \quad a_i \gtrless b_i$$

ist.[1])

2. Die Veronesesche Definition der Stetigkeit lautet[2]):

Jedes Segment $X'X''$, dessen Enden sich in entgegengesetzten Richtungen ändern, und das kleiner wird, als jedes beliebige vorgegebene Segment, enthält ein von dem Veränderungsbereich seiner Enden verschiedenes Element.

Von einem solchen Element sage ich, das es einem Veroneseschen *Schnitt* entspricht.

Die Dedekindsche und die Veronesesche Stetigkeitsdefinition sind bekanntlich inhaltlich verschieden. Während nämlich gemäß Dedekind *jeder* Teilung aller Zahlen x in zwei Klassen $\{x'\}$ und $\{x''\}$, so daß jedes x'' größer als jedes x' ist, eine Zahl ξ entspricht, verlangt die Veronesesche Stetigkeit die Existenz dieser Zahl nur für den Fall, daß $x'' - x'$ kleiner werden kann, als jede Zahl des Zahlsystems. Zahlen, die nur dieser Definition genügen, gestatten daher auch solche Teilungen in zwei Klassen $\{x'\}$ und $\{x''\}$, durch die eine Zahl des Zahlsystems *nicht* bestimmt wird. Solchen Teilungen entspricht eine *Lücke.* Beispielsweise bestimmen die Zahlen

$$\{x'\} = 1, 2, \ldots \nu, \ldots$$

und

$$\{x''\} = \omega, \ \tfrac{1}{2}\omega, \ldots, \frac{1}{\nu}\omega, \ldots$$

eine solche Lücke.

Der Stetigkeitsbegriff enthält bekanntlich zwei verschiedene Bestandteile; der eine ist eine *Ordnungsbeziehung* (Anordnungsstetigkeit),

1) Die obigen Festsetzungen sind jedenfalls widerspruchsfrei. Aus welchen Annahmen sie beweisbar sind, kommt hier nicht in Betracht.

Man kann bekanntlich die obigen Zahlen auch so auffassen, daß man ω eine reelle Variable sein läßt und statt der Zahlen die bezüglichen Funktionen betrachtet. Dadurch wird jedoch an der Sache nichts geändert.

2) Atti d. R. Acc. dei Lincei (4) Memorie Bd. 6, S. 613 (1889).

der andere eine *Größenbeziehung* (Größenstetigkeit).[1]) Ihre axiomatische Bedeutung und ihre gegenseitige Beziehung läßt sich meines Erachtens am naturgemäßesten folgendermaßen darlegen.

3. Ich sehe zunächst von Größenbeziehungen ab, beschränke mich also auf bloße Betrachtung des Ordnungstypus. Ist dann eine linear geordnete Menge M irgendwie definiert, so zerfälle man sie in Dedekindscher Weise in die zwei Teilmengen $M' = \{x'\}$ und $M'' = \{x''\}$, sodaß jedes x' jedem x'' vorangeht. Dann können an sich nur vier Fälle eintreten, und zwar die folgenden:

1) Es kann M' ein letztes Element ξ' und M'' ein erstes Element ξ'' haben; es liegt dann in M ein *Sprung* vor.

2) M' hat ein letztes Element ξ', aber M'' kein erstes Element.

3) M'' hat ein erstes Element ξ'', aber M' kein letztes.

4) Weder hat M' ein letztes noch M'' ein erstes Element, sodaß in M eine *Lücke* vorliegt.

Dies gilt für jede derartige Teilung. Die Dedekindsche Definition würde nun, wenn man nur die Anordnungsstetigkeit in Betracht zieht, so zu formulieren sein, daß sie für *jede* Teilung den ersten und vierten Fall, also Sprünge und Lücken ausschließt. Dem Veroneseschen Begriff der Stetigkeit aber würde es entsprechen, daß sie den ersten Fall *immer*, den letzten Fall nur unter *gewissen Bedingungen* ausschließt. In der Tat treten ja bei Veronese Lücken wirklich auf. Die' Ausschließung der Sprünge, die beiden Definitionen gemeinsam ist, bewirkt, daß der Ordnungstypus überall dicht ist; es entspricht dann jedes Element einem Schnitt.[2])

Da übrigens die Ordnungsbeziehungen nach axiomatischer Annahme projektiv invariant sind, so haben sie für alle Geraden den gleichen Charakter, falls sie in gleicher Weise für jede Teilung auf einer einzigen, im übrigen beliebigen Geraden festgesetzt werden. Dies bewirkt, daß die ebene und räumliche Anordnungsstetigkeit durch die lineare mitbestimmt ist.

---

1) Die Übertragung der Stetigkeitsbegriffe auf Ordnungstypen findet sich zuerst bei Herrn G. Cantor, Math. Ann. Bd. 46, S. 508. Vgl. auch meinen Bericht über Mengenlehre, diese Jahresber. Bd. 8, 2, S. 31.

2) Ihrem wörtlichen Inhalt nach schließt allerdings die Veronesesche Definition Sprünge nicht aus, und zwar deswegen, weil sie mit *unendlichen* Teilmengen $\{x'\}$ und $\{x''\}$ operiert, die die Endpunkte des Segmentes $x'x''$ durchlaufen. Eine nirgends dichte perfekte Menge, von der man die Endpunkte der punktfreien Intervalle tilgt, würde sogar dem Wortlaut der Definition genügen. Für das Veronesesche Kontinuum kommt dieser Umstand jedoch nicht in Betracht, da er *zuvor* andere Eigenschaften einführt, die ihn ausschließen, nämlich die Homogenität (§ 7).

Die obige Erschöpfung aller vorhandenen Möglichkeiten dürfte die einzelnen Elemente, die im Begriff der Anordnungsstetigkeit stecken, und ihre gegenseitige Beziehung am einfachsten hervortreten lassen. Sie zeigt unmittelbar, daß in diesen Begriff zwei verschiedene Annahmen eingehen können, daß beide voneinander unabhängig sind, und daß weitere Anordnungseigenschaften für ihn nicht in Frage kommen können; immer vorausgesetzt, daß für alle Teilungen das gleiche bestimmt ist.

4. Für die im Stetigkeitsbegriff enthaltene Größenbeziehung sind zwei verschiedene Möglichkeiten in Betracht zu ziehen. Man kann sich entweder im archimedischen oder im nichtarchimedischen Größengebiet bewegen, und es entsteht die Frage, ob und wie sich diese beiden Möglichkeiten mit den Annahmen vereinigen lassen, die in der Anordnungsstetigkeit stecken. Da aber alle Stetigkeitsbegriffe die Sprünge ausschließen, und diese Ausschließung sowohl im archimedischen wie im nichtarchimedischen Gebiet möglich ist, so ist nur das Auftreten von Lücken in Betracht zu ziehen. Die bezügliche Untersuchung ist bereits ausgeführt worden. Ich beschränke mich darauf, zweierlei anzuführen. Erstens läßt sich unter Voraussetzung der einfachsten Größenresp. Kongruenzaxiome beweisen, daß, wenn Lücken ausgeschlossen werden, das betrachtete Größengebiet ein archimedisches sein muß, wie kürzlich von Herrn Hölder gezeigt worden ist[1]); das archimedische Axiom erscheint also insofern als eine *Folge* des Ausschließens von Lücken. Zweitens aber ist der Veronesesche Stetigkeitsbegriff mit dem Auftreten von Lücken nur dann vereinbar, wenn das Größengebiet ein nichtarchimedisches ist.

5. In den Hilbertschen „Grundlagen der Geometrie“[2]) wird die Stetigkeit durch das *archimedische* Axiom oder das Axiom des *Messens* und das Axiom der *Vollständigkeit* definiert. Das Ausschließen von Sprüngen wird dort durch ein Axiom bewirkt, das bereits unter den einfachen Anordnungsaxiomen enthalten ist, nämlich das Axiom II, 2. Das Vollständigkeitsaxiom kommt also nur noch für die Ausschließung der Lücken in Betracht; in der Tat soll es dem Zweck dienen, im Verein mit dem archimedischen Axiom die Dedekindsche Stetigkeit zu bewirken.

Für das von Veronese konstruierte mit Lücken behaftete Kontinuum besteht, wie sich später zeigen wird, die durch das Vollständigkeitsaxiom geforderte Eigenschaft nicht. (§ 12). Die einzige Frage, die

1) Vgl. Leipziger Ber. 1902 S. 7.

2) Vgl. 2. Aufl. Leipzig 1903, S. 16.

hier noch offen bleibt, ist daher die, ob das Vollständigkeitsaxiom mit dem Ausschluß von Lücken identisch ist, oder nicht. Es wäre also zu untersuchen, ob man nichtarchimedische Größensysteme aufstellen kann, die dem Vollständigkeitsaxiom genügen. Es müßten dies Systeme sein, die zwar Lücken enthalten, aber in der Weise, daß sich diese Lücken *nicht* durch neue Größen ausfüllen lassen, die den vorausgesetzten grundlegenden Axiomen genügen. Auf diese Frage, die auch in den Hilbertschen Grundlagen nicht erörtert worden ist, komme ich am Ende dieser Note zurück.

Ganz kürzlich hat sich auch Herr Vahlen[1]) eingehend mit dem Stetigkeitsbegriff beschäftigt, und ihn in seine Bestandteile aufzulösen gesucht.[2]) Wie aber Herr Dehn[3]) bemerkt hat, leidet der Vahlensche Stetigkeitsbegriff an einem formalen Mangel, der ihn illusorisch macht. Die Vahlensche Definition schließt nämlich, wie man leicht sieht, die vier obigen Fälle *sämtlich* aus; sie müßte daher verlangen, daß eine Menge M außer allen ihren Elementen noch weitere Elemente besitzt. Sieht man von diesem formalen Mangel ab, an dem übrigens der äquivalente Stetigkeitsbegriff des geometrischen Teils nicht leidet, so ist die Vahlensche Definition im übrigen mit der Dedekindschen identisch, da sie sowohl den Fall 1) wie den Fall 4), also Sprünge und Lücken, ausschließt. Diese Definition zieht daher die Meßbarkeit nach sich.[4])

Daß der Stetigkeitsbegriff auch mit solchen Größensystemen verträglich ist, für die nicht dieselben axiomatischen Gesetze gelten, wie für

1) Abstrakte Geometrie, Leipzig 1905.

2) Dort heißt es auf S. 9, nachdem zuvor *nur* die linearen Ordnungsbeziehungen eingeführt sind: „Eine linear geordnete Menge heißt „stetig", wenn jedem ... System von nicht lauter gleichartigen Ordnungsbeziehungen eines Dinges zu allen Dingen einer Teilmenge wenigstens ein Ding x der Menge entspricht."

3) Diese Jahresber. XIV (1905), S. 536.

4) Es ist daher irrig, wenn Herr Vahlen a. a. O. S. 9 bemerkt, seine Stetigkeit sei verschieden von derjenigen Dedekinds und stimme sachlich mit der von Veronese gegebenen überein. Die von ihm später als stetig bezeichneten Mengen sind allerdings teilweise nur im Veroneseschen Sinne stetig. Es ist sehr bedauerlich, daß ein Buch, das seinen Gegenstand allseitig zu erschöpfen bestrebt ist, an einem so prinzipiellen Mangel leidet, der im arithmetischen wie im geometrischen Teil die Folgerichtigkeit der Entwickelungen vielfach stört. [Die Vahlensche Entgegnung (dies. Jahresber. 14, S. 591) ändert hieran nichts.]

Es heißt dann a. a. O., ich selbst habe mich dahin ausgesprochen, die Dedekindsche Stetigkeit sei mit dem Axiom des Archimedes gleichwertig. (Dieser Jahresbericht Bd. 5 S. 75.) Da das archimedische Axiom auch im Körper der rationalen Zahlen erfüllt ist, trifft dies natürlich nicht zu. Ich möchte aber bemerken, daß diese Äquivalenz von mir nur mit Rücksicht auf die a. a. O. erörterte Konstruktion des Kontinuums gemeint sein soll, was freilich nicht ausdrücklich gesagt ist, aber aus dem Zusammenhang hervorgeht.

die gewöhnlichen Zahlen, bedarf kaum der Erwähnung, doch wird von ihnen im folgenden nicht die Rede sein.

6. Die im Eingang gestellte Frage läuft darauf hinaus, zu prüfen, welche Bedingungen den Koeffizienten a_i und A_i sowie den Exponenten λ der transfiniten Zahlen auferlegt werden müssen, damit sie einen irgendwie bestimmten Körper bilden, der im Sinne Veroneses stetig ist. Im allgemeinen werde ich annehmen, daß den zu prüfenden transfiniten Zahlkörpern auch die Einheiten zugehören. Ich sehe aber auch gelegentlich davon ab.

Betrachtet man die obigen Zahlen zunächst *nur an sich*, ohne daß sie einen Körper bilden sollen, so legt der Veronesesche Stetigkeitsbegriff nur dem *letzten Koeffizienten*, falls einer existiert, eine Beschränkung auf.

Um dies zu zeigen, fasse man zunächst einmal die Zahlen

$$\mathfrak{A} = A_1 \omega + A_0$$

ins Auge. Eine Teilung in zwei Klassen

$$\mathfrak{A}' = A_1' \omega + A_0', \quad \mathfrak{A}'' = A_1'' \omega + A_0''$$

werde so vorgenommen, daß sie eine Zahl

$$\mathfrak{B} = B_1 \omega + B_0$$

des Zahlsystems bestimmt. Es muß dann erstens jede Differenz

$$\mathfrak{A}'' - \mathfrak{A}' = A_1'' \omega + A_0'' - (A_1' \omega + A_0') > 0 \tag{4}$$

sein, woraus $A_1'' \geq A_1'$ folgt: andererseits muß dieselbe Differenz

$$A_1'' \omega + A_0'' - (A_1' \omega + A_0') < \delta \tag{5}$$

gemacht werden können, wenn δ irgend eine reelle positive Zahl des Zahlsystems ist. Daraus folgt zunächst, daß nicht etwa für jedes Koeffizientenpaar A_1'', A_1' die Relation $A_1'' - A_1' > 0$ bestehen kann. Es gibt daher in beiden Klassen notwendig Zahlen $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A}''$ mit *gleichen* ersten Koeffizienten und aus (4) folgt weiter, daß dieser Koeffizient für die Klasse $\{\mathfrak{A}'\}$ das Maximum, für $\{\mathfrak{A}''\}$ das Minimum darstellt. Er sei B_1. Die Veronesesche Bedingung besagt dann weiter, daß die Zahl $\mathfrak{B}$ einen Schnitt auch für die Zahlen

$$B_1 \omega + A_0'' \text{ und } B_1 \omega + A_0'$$

bedeutet, und daraus folgt gemäß (5), daß $A_0'' - A_0' < \delta$ ausfallen muß. Dem wird jedenfalls genügt, wenn für die Koeffizienten A_0 die Dede-

kindsche Stetigkeitsbedingung erfüllt ist.[1]) Für die Koeffizienten A_1 dagegen ergibt sich eine Bedingung nicht. Hierauf hat bereits Herr Hölder[2]) hingewiesen.

Es ist ohne weiteres klar, daß die analogen Schlüsse für jedes System transfiniter Zahlen gelten, das mit irgend welcher *endlichen* Menge unendlich großer und unendlich kleiner Einheiten gebildet ist, d. h. für die Zahlen der Form (2) und (2a). Es ist sogar an sich möglich, daß jeder der Koeffizienten A_i und a_i, vom letzten abgesehen, nur eine endliche Zahl von Werten annimmt. Betrachtet man z. B. solche Zahlen (2), bei denen alle Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots a_{\lambda-1}$, nur die Werte $-1, 0, +1$ haben, während a_λ eine beliebige reelle Zahl sein kann, so genügen sie immer noch der Veroneseschen Stetigkeitsbedingung und es stellt sogar jede Zahl dieses Systems einen Veroneseschen Schnitt dar. Z. B. ist die Zahl

$$\mathfrak{A} = 1 - \frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega^2} - \cdots - \frac{1}{\omega^{\lambda-1}}$$

Schnitt zwischen den Teilmengen

$$\mathfrak{A}'' = \mathfrak{A} + \frac{a_\lambda}{\omega^\lambda} \text{ und } \mathfrak{A}' = \mathfrak{A} - \frac{a_\lambda}{\omega^\lambda}.$$

Gehen wir endlich zu den Zahlen (3) resp. (3a) über, so ergibt sich in der gleichen Weise das bemerkenswerte Resultat, daß *die Veronesesche Stetigkeit ihren Koeffizienten überhaupt keine Bedingung auferlegt*. Auch hier könnte sogar *jedem* der Koeffizienten nur eine endliche Zahl von Werten gestattet sein.

Für diese Zahlen besteht noch eine weitere wichtige Eigenschaft. Ist nämlich — ich beschränke mich der einfacheren Schreibweise halber auf die Zahlen (3) —

$$\mathfrak{B} = b_0 + \frac{b_1}{\omega} + \cdots + \frac{b_{\nu-1}}{\omega^{\nu-1}} + \frac{b_\nu}{\omega^\nu} + \frac{b_{\nu+1}}{\omega^{\nu+1}} + \cdots \tag{6}$$

eine Zahl des Systems, so kann es vorkommen, daß für unendlich viele Werte von ν Koeffizienten

$$b'_\nu < b_\nu < b''_\nu$$

so existieren, daß auch

$$\mathfrak{B}'_\nu = b_0 + \frac{b_1}{\omega} + \cdots + \frac{b_{\nu-1}}{\omega^{\nu-1}} + \frac{b'_\nu}{\omega^\nu} + \frac{\beta'_{\nu+1}}{\omega^{\nu+1}} + \cdots \tag{7}$$

und

$$\mathfrak{B}''_\nu = b_0 + \frac{b_1}{\omega} + \cdots + \frac{b_{\nu-1}}{\omega^{\nu-1}} + \frac{b''_\nu}{\omega^\nu} + \frac{\beta''_{\nu+1}}{\omega^{\nu+1}} + \cdots$$

1) Ich sehe hier davon ab, daß gemäß § 2 Anm. 2 ein Veronesescher Schnitt auch vorhanden sein würde, wenn die Koeffizienten A_0 einer geeigneten nicht überall dichten Teilmenge des Kontinuums entsprechen.

2) a. a. O. S. 12, wo die obige Betrachtung enthalten ist.

Zahlen des Systems sind. Alsdann bestimmen die Mengen $\{\mathfrak{B}'_\nu\}$ und $\{\mathfrak{B}''_\nu\}$ einen Veroneseschen Schnitt, dem die Zahl $\mathfrak{B}$ entspricht. In der Tat wird $\mathfrak{B}''_\nu - \mathfrak{B}'_\nu$, wenn ν die bezüglichen Werte durchläuft, kleiner als jede dem Zahlsystem angehörige Zahl, und für jedes derartige ν ist $\mathfrak{B}'_\nu < \mathfrak{B} < \mathfrak{B}''_\nu$. Weitere Folgerungen werden sich hieraus alsbald ergeben.

7. Von diesen mehr formalen Betrachtungen gehe ich nun zur Betrachtung von Zahlkörpern über, zunächst zu dem Fall, daß in diesem Körper *Addition* und *Subtraktion* in endlicher Folge ausführbar sind. Diese Forderung entspricht der Veroneseschen Definition des *homogenen* Systems. Herr Veronese nennt nämlich ein lineares Punktsystem *homogen*[1]), wenn für jeden Punkt A und jedes beliebige Segment XY zwei Segmente AB und $B'A$ existieren, die gleich XY sind, was mit der obigen Bedingung sachlich übereinstimmt.

In dem so definierten Körper müssen die Koeffizienten A_i und a_i der Bedingung genügen, ebenfalls je einen Körper zu bilden, der Addition und Subtraktion gestattet. Ein weiteres ist nicht nötig. Sehen wir also bei den Zahlen (2) und (2a) vom letzten Koeffizienten ab, so kann der Körper eines jeden anderen Koeffizienten beispielweise aus den ganzen Zahlen, oder aus allen Vielfachen derselben Zahl bestehen, aber auch irgend einen höheren reellen algebraischen Körper bilden, wie z. B. den Körper der Zahlen $a + b\sqrt{2}$, wo a und b selbst einen der eben genannten ganzzahligen Körper ausmachen usw.

Für die Zahlen (3) *und* (3a) *gilt dies sogar von jedem Koeffizienten.* Nehmen wir jetzt insbesondere noch an, daß dem mit den Zahlen (3) und (3a) aufgebauten Zahlkörper auch die Einheiten zugehören, was von nun an stets vorausgesetzt werden soll, so gilt für diesen Körper die am Ende von § 6 erwähnte Eigenschaft; *es stellt daher jede Zahl eines solchen Körpers einen Veroneseschen Schnitt dar.*

Im arithmetischen Interesse soll übrigens erwähnt werden, daß man Zahlkörper dieser Art aufstellen kann, denen die Einheiten nicht zugehören. Nimmt man nämlich für jeden Koeffizienten b_ν einen algebraischen, nicht rationalen Wert an, so kann man eine abzählbare unendliche Menge von Zahlen $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}', \mathfrak{B}'' \ldots$ so aufstellen, daß niemals zwischen einer endlichen Zahl von Koeffizienten

$$b_\nu, b'_\nu, b''_\nu, \ldots b^{(\lambda)}_\nu$$

eine Relation mit rationalen Koeffizienten besteht, und die aus diesen Zahlen $\mathfrak{B}$ durch Addition und Subtraktion entstehenden Zahlen bilden einen derartigen Körper.

1) Fondamenti, S. 71 der deutschen Ausgabe.

8. Gehen wir zur Forderung über, daß die transfiniten Zahlen auch die Multiplikation gestatten, so ergibt sich nicht allein eine Bedingung für die Koeffizienten, sondern auch für die Einheiten. Beide müssen die Gruppeneigenschaft für Addition, Subtraktion und Multiplikation besitzen. Für die Koeffizienten kann dies auch hier noch so erfüllt werden, daß sie nur ganzzahlige Werte annehmen. Existiert andererseits eine unendlich große Einheit ω, so existieren auch die Einheiten ω^2, ω^3 ... und das Gleiche gilt für die unendlich kleinen Einheiten. Immer aber kann man noch Zahlsysteme dieser Art aufstellen, in denen jede Zahl eine endliche Zahl von Einheiten enthält, so daß also Zahlen der Form (3) ausgeschlossen sind. Auch hier stellt, welche Koeffizientenwerte wir auch benutzen, jede Zahl des Körpers einen Veroneseschen Schnitt dar. Ist z. B.

$$\mathfrak{B} = b_0 + \frac{b_1}{\omega} + \cdots + \frac{b_\lambda}{\omega^\lambda}$$

eine Zahl des Körpers, so gibt es in ihm auch Zahlen

$$\mathfrak{B}_\nu' = \mathfrak{B} - \frac{1}{\omega^\nu}, \quad \text{und} \quad \mathfrak{B}_\nu'' = \mathfrak{B} + \frac{1}{\omega^\nu},$$

wo $\nu > \lambda$ ist; bei hinreichend großem ν wird $\mathfrak{B}_\nu'' - \mathfrak{B}_\nu'$ kleiner als jede beliebige Einheit $1/\omega^\mu$ und es ist $\mathfrak{B}_\nu' < \mathfrak{B} < \mathfrak{B}_\nu''$, woraus die Behauptung folgt. Dagegen entspricht *nicht jedem* Veroneseschen Schnitt eine Zahl des Körpers; um dies zu erreichen, müssen wir vielmehr auch die Zahlen

$$\mathfrak{B}_0 = b_0 + \frac{b_1}{\omega} + \frac{b_2}{\omega^2} + \cdots + \frac{b_\nu}{\omega^\nu} + \cdots$$

hinzufügen, falls alle Zahlen

$$\mathfrak{B}_\nu = b_0 + \frac{b_1}{\omega} + \cdots + \frac{b_\nu}{\omega^\nu}$$

im Zahlsystem vorhanden sind. In dem Fall, daß alle Koeffizienten b_i ganzzahlig sind, werden auch die Koeffizienten aller Zahlen $\mathfrak{B}_0$ sämtlich ganzzahlig sein. Ich schließe mit dem Satz:

Es gibt transfinite Zahlkörper, deren Koeffizienten nur ganzzahlige Werte annehmen, die der Veroneseschen Stetigkeitsbedingung genügen, und bei denen sogar jede Zahl einem Veroneseschen Schnitt entspricht.

Wird zu den geforderten Rechenoperationen auch die Division gefügt, so können die Zahlen (2) und (2a) einen Körper nicht mehr abgeben, es wird *notwendig* auch die Existenz der Zahlen (3) gefordert. Zudem müssen die Koeffizienten A_i und a_i einen allgemeinen Rationalitätsbereich bilden. Dies wird sicher dann der Fall sein, wenn jeder von ihnen jeden rationalen Zahlenwert annehmen kann. Wir gelangen

also wieder zu dem Resultat, *daß es einen transfiniten Körper gibt, dessen Koeffizienten rational sind, der im Veroneseschen Sinn stetig ist und bei dem zugleich jede Zahl einen Veroneseschen Schnitt darstellt.* Selbstverständlich enthält ein solcher Körper auch *Lücken*: ihm gehört z. B. immer noch diejenige an, die in § 2 erwähnt ist. Endlich möchte ich bemerken, daß die Elemente dieses im Veroneseschen Sinne stetigen Körpers eine abzählbare Menge bilden.

9. Stellt man an das lineare Kontinuum nur die Forderung, die Veronesesche Stetigkeit zu besitzen und außerdem alle rationalen Operationen zu gestatten, so ist der eben konstruierte Körper zu diesem Zweck ausreichend. Er deckt sich aber nicht mit dem Veroneseschen Kontinuum — natürlich bei vorläufiger Beschränkung auf die gewählten Einheiten — obwohl auch in den Veroneseschen Fondamenti von anderen als rationalen Operationen nie die Rede ist. Das Veronesesche Kontinuum beschränkt sich nämlich nicht auf rationale Werte der Koeffizienten, es postuliert vielmehr für jeden Koeffizienten A_i und a_i *sämtliche* reellen Zahlenwerte. Dies geschieht durch die Hypothesen VI und VII der Fondamenti, die darauf hinauslaufen, jeden Koeffizienten A_i und a_i der Dedekindschen Stetigkeit zu unterwerfen.[1]) Diese Annahme erscheint aber entbehrlich.[2]) Sie würde nur nötig sein, wenn man auf diese Weise dieselbe Wirkung erreichte, wie im Gebiet der reellen Zahlen, daß nämlich in dem so definierten Zahlkörper auch andere als rationale Operationen ausführbar sind. Dies trifft jedoch, wie ich alsbald zeigen werde, nicht zu. Überhaupt dürfte meines Erachtens die Frage, was durch die Einführung der transfiniten Maßbestimmung geleistet werden kann, erst dadurch einer unzweideutigen Beantwortung fähig werden, daß man die Koeffizienten A_i und a_i auf diejenigen Zahlkörper beschränkt, die für die bezüglichen Zwecke hinreichend und notwendig sind. Zu diesem Resultat zu gelangen, ist der wesentlichste Zweck der hier vorgeführten Betrachtungen.

10. Zunächst bedarf es noch einer Verallgemeinerung unserer transfiniten Zahlen. Man kann die transfiniten Zahlen in verschiedener Richtung verallgemeinern, dabei wollen wir aber von vornherein annehmen, daß die Zahlen stets einen Körper mit rationalen Koeffizienten bilden, dem auch alle Einheiten zugehören. Die Verallgemeinerung ist erstens so möglich, wie es Herr Levi-Civita[3]) getan hat, indem man

1) A. a O. S. 144 und 163.

2) Diese Annahme verstößt auch dagegen, daß im Veroneseschen Sinn die Irrationalzahl durch ein unendlich kleines Gebiet zu ersetzen ist; vgl. z. B. a. a. O. S. 170.

3) Atti de R. Ist. Veneto, Bd. 4. Serie 7 (1893.) S. 1765.

nämlich die ganzen Potenzen von ω und $1/\omega$ durch irgend eine Gruppe von Potenzen ersetzt, deren Exponenten bei den Operationen des Körpers invariant bleiben. Mit solchen Zahlen werden wir uns alsbald zu beschäftigen haben. Den allgemeinsten Fall würden diejenigen Zahlen darstellen, bei denen die Exponenten *sämtliche* positiven und negativen reellen Werte annehmen können; jede Zahl dieser Art hätte dann die Form

$$(8)\qquad a_0\omega^{\varrho_0}+a_1\omega^{\varrho_1}+\cdots+a_\nu\omega^{\varrho_\nu}+\cdots,$$
$$\varrho_0>\varrho_1>\varrho_2\cdots>\varrho_\nu>\cdots,$$

wobei es durchaus dahingestellt bleiben kann, ob die ϱ_ν gegen eine endliche Grenze oder gegen $-\infty$ konvergieren. Es ist klar, daß der Bau dieser Zahlensysteme bei Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division ungeändert bleibt. Falls insbesondere ϱ_ν gegen $-\infty$ konvergiert, so besitzen diese Zahlen dieselben Stetigkeitseigenschaften, die in § 6 für die Zahlen der Form (3) abgeleitet wurden; übrigens ist dieser Fall der einzige, der uns nachher praktisch beschäftigen wird.

Weitere Verallgemeinerungen erhalten wir folgendermaßen. Bisher bildeten die Exponenten eine endliche Menge oder eine wohlgeordnete Menge vom Typus ω. Man kann aber auch Zahlen herstellen, bei denen die Exponenten jede beliebige wohlgeordnete Reihe abnehmender Zahlen bilden. Von dieser Art sind z. B. die Zahlen

$$(9)\qquad a_{00}\omega^{\varrho_0}+a_{01}\omega^{\varrho_1}+\cdots+a_{10}\omega^{\sigma_0}+a_{11}\omega^{\sigma_1}+\cdots,$$

bei denen für die ϱ_i und σ_i die Relationen

$$\varrho_i>\varrho_{i+1},\qquad \sigma_i>\sigma_{i+1},\qquad \varrho_i>\sigma_\varkappa$$

bestehen, und die den Ordnungstypus $\omega\,.\,2$ haben, oder auch die allgemeineren analog gebildeten Zahlen

$$(10)\qquad \sum_{\nu=0}^{\infty}a_{0\nu}\omega^{\varrho_\nu}+\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{1\nu}\omega^{\sigma_\nu}+\cdots+\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{\lambda\nu}\omega^{\tau_\nu}+\cdots,$$

die den Ordnungstypus $\omega\,.\,\omega$ besitzen, und deren Exponenten ähnlichen Relationen genügen usw.

Eine weitere Verallgemeinerung ergibt sich, wenn man mit Veronese auch unendlich große, resp. unendlich kleine Einheiten *unendlich hoher Ordnung* einführt, und dies kann, indem man die Ordnung des Unendlichwerdens in bekannter Weise wachsen läßt, beliebig oft geschehen. Jede Potenz von ω, deren Exponent eine Zahl der zweiten Zahlklasse ist, stellt eine unendlich große Einheit dieser Art dar. Die mit diesen Einheiten gebildeten transfiniten Zahlen Veroneses besitzen übrigens sämtlich die Eigenschaft, *daß ihre Exponenten eine wohlgeordnete Menge*

abnehmender Zahlen bilden. Dies ist ihr charakteristisches Merkmal.[1]) Die so entstehenden Zahlen kann man dann wieder nach der zuerst genannten Methode verallgemeinern, worauf nicht näher eingegangen werden soll.

11. Es fragt sich noch, wie es mit der Veroneseschen Stetigkeit solcher allgemeineren Zahlensysteme steht. Zunächst ist klar, daß dieser Begriff nur einen Sinn hat, nachdem und insoweit die bezüglichen Einheiten eingeführt sind. Soll alsdann ein derartiger transfiniter Körper, d. h. ein solcher, dessen Koeffizienten rational und dessen Exponenten ganze Zahlen der ersten und zweiten Zahlklasse sind, Stetigkeitseigenschaften besitzen, so wird dadurch, wie oben, nur gefordert, daß auch alle Zahlen ihm angehören, auf die die Division führen kann. Weiteres ist auch hier nicht nötig. Wie oben läßt sich dann nämlich wieder zeigen, daß jede Zahl des Körpers einem Veroneseschen Schnitt entspricht, und daß jeder Schnitt ihm angehört.

Wenn nun ein System transfiniter Zahlen in beliebiger Weise gegeben ist, so können zwei Fälle eintreten. Die Exponenten jeder dieser Zahlen können erstens eine wohlgeordnete Menge *erster* Mächtigkeit bilden. Alsdann *kann* es möglicherweise nötig sein, zwecks Ausführbarkeit der Division, resp. zur Herstellung der Stetigkeit noch neue Zahlen einzuführen; dies könnte z. B. bei Zahlen nötig sein, die denselben Ordnungstypus besitzen, wie die Zahlen (9), nicht aber bei solchen vom Ordnungstypus der Zahlen (10). Zweitens können aber die Exponenten gewisser Zahlen eine wohlgeordnete Menge *zweiter* Mächtigkeit bilden, d. h. eine solche, die der Gesamtheit aller Zahlen der zweiten Zahlklasse ähnlich ist. Da eine solche Menge kein letztes Element besitzt, so kann die Division neue Zahlen *nicht* mehr ergeben. Alsdann ist aber auch die Einführung neuer Zahlen auf Grund der Stetigkeitseigenschaft nicht mehr erforderlich; der bezügliche Zahlkörper besitzt vielmehr die Stetigkeit von selbst. Dem entsprechen die allgemeinsten transfiniten Zahlen Veroneses. Seine *allgemeinste absolute* Stetigkeit kommt gerade darauf hinaus, auch Zahlen zuzulassen, deren Exponenten eine Menge zweiter Mächtigkeit bilden.[2])

---

1) Vgl. besonders Rend. Lincei. 1898. S. 79.

2) Im Gegensatz hierzu werden bei Herrn Levi-Civita (a. a. O. S. 120) auf Grund der Veroneseschen Stetigkeitsdefinition *neue* Zahlen auch dann noch eingeführt, nachdem bereits ein Körper mit ausführbarer Division und mit denjenigen allgemeinsten transfiniten Zahlen aufgestellt ist, bei denen als Exponenten sämtliche Zahlen der zweiten Zahlklasse auftreten können, und es wird hinzugefügt, daß diese Einführung der eigentliche Sinn der Veroneseschen Stetigkeitsdefinition

12. Kehren wir wieder zu den einfacheren transfiniten Zahlen der Form (3) zurück, mit der Maßgabe, daß die Koeffizienten A_i und a_i aller rationalen reellen Werte fähig sind. Diese Zahlen bilden, wie wir gesehen haben, einen Rationalitätsbereich $\mathfrak{R}$. Werden diese Zahlen benutzt, um das lineare Kontinuum zu definieren, und werden für die Geraden die einfachen Schnittpunktsätze postuliert, so kann man projektive Beziehungen definieren — naturgemäß hat man noch eine Größe Ω zu adjungieren, die größer als jedes ω^ν ist, und deren reziproker Wert Null ist.

Es gelten dann alle diejenigen Sätze der projektiven Geometrie, die ihren Ausdruck in rationalen Operationen finden. Von den übrigen ist dies aber nicht ohne weiteres der Fall, und dies liegt daran, daß in dem so definierten Zahlensystem *Lücken* möglich sind. Insbesondere kann schon die Existenz der Doppelpunkte und der auf ihr beruhende Beweis des Fundamentalsatzes nicht mehr übertragen werden; dazu bedarf es vielmehr einer *Erweiterung* des durch (3) dargestellten Zahlensystems. Um zunächst ein einfaches Beispiel zu bilden, so würde diejenige projektive Beziehung, die durch

$$\omega x' x'' = 1$$

dargestellt ist, auf Doppelpunkte führen, die von einer Gleichung

$$\omega \xi^2 - 1 = 0$$

abhängen; ihr entspräche aber keine Zahl der Form (3).

Es gibt nämlich auch Folgen *entsprechender* Zahlen

$$x_1' > x_2' > x_3' > \cdots > x_\nu' > \cdots, \qquad x_1'' < x_2'' < x_3'' < \cdots < x_\nu'' < \cdots,$$

die eine Lücke bilden, insbesondere stellen

$$\frac{1}{\omega}, \frac{2}{\omega}, \frac{3}{\omega}, \ldots, \frac{\nu}{\omega}, \ldots, \quad \text{und} \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{\nu}, \ldots$$

solche Folgen dar. Andererseits müßte aber der Doppelpunkt in dieser Lücke enthalten sein. Wir gelangen daher nur so zu einem Zahlkörper, der die Existenz dieser Doppelpunkte verbürgt, wenn wir die neue Einheit $\omega^{\frac{1}{2}}$ resp. ihre reziproke zu den bereits vorhandenen hinzufügen; wie wir sahen, ist diese Hinzufügung auch gestattet. In den Körpern, die dem Veroneseschen Stetigkeitsbegriff genügen, ist daher *das Vollständigkeitsaxiom nicht erfüllt.* Dies gilt sogar, wenn man für die

---

ist, falls die Stetigkeit im *absoluten* Sinn gemeint ist, d. h. falls $x' - x$ kleiner als jede unendlich kleine Einheit beliebig hoher Ordnung werden kann. Diese Meinung trifft aber dem Obigen gemäß nicht zu.

Koeffizienten a_i alle reellen Zahlenwerte zuläßt, und es gilt auch für solche Körper, die Veroneses *absolute* Stetigkeit besitzen.

In Verallgemeinerung hiervon kann man nach denjenigen Zahlen fragen, die außer bei den rationalen auch bei gewissen algebraischen Operationen in sich übergehen. Man erhält dadurch wieder eine Bedingung für die Koeffizienten und für die Exponenten. Bleiben wir bei dem einfachsten Fall eines algebraischen Körpers, in dem nur quadratische Irrationalitäten vorhanden sind, und fassen nur die reellen Lösungen ins Auge, so ergibt sich für die Koeffizienten die Bedingung, daß sie selbst einen bezüglichen algebraischen Körper bilden.[1]) Für die Exponenten aber ergibt sich als Bedingung das Vorkommen aller rationalen Werte mit dem Nenner 2 oder einer Potenz von 2 und zwar kommen Zahlen der Form (8) nur so vor, daß ϱ_ν gegen $-\infty$ konvergiert. Der so bestimmte Körper hat daher die gleichen Stetigkeitseigenschaften wie der in § 8 betrachtete Körper. Ähnlich ist es, wenn man zu höheren algebraischen transfiniten Körpern übergeht.

Durch das Vorstehende wird dasjenige, was ich oben über die Entbehrlichkeit der Hypothese VI und über die Tragweite der Veroneseschen Zahlen ausführte, vollauf gerechtfertigt.

13. Es scheint mir nützlich, darauf hinzuweisen, daß auch in den eben definierten algebraischen Zahlkörpern immer noch Lücken vorhanden sind. Einfachste Zahlfolgen $\{x'\}$ und $\{x''\}$, die eine Lücke bestimmen, erhält man z. B. wenn man

$$(11) \qquad x'_\nu = \alpha'_\nu \omega^{\varrho'_\nu}, \qquad x''_\nu = \alpha''_\nu \omega^{\varrho''_\nu}$$

setzt, wo α'_ν und α''_ν reelle positive algebraische Zahlen sind, während

$$\varrho'_1 < \varrho'_2 < \varrho'_3 < \cdots, \qquad \varrho''_1 > \varrho''_2 > \varrho''_3 > \cdots$$

rationale Zahlen sind, die gegen einen gemeinsamen nicht algebraischen Grenzwert λ konvergieren. Alsdann kann es keine transfinite Zahl des Körpers geben, die der Größe nach zwischen den Mengen $\{x'_\nu\}$ und $\{x''_\nu\}$ liegt. Denn ihre Ordnung müßte kleiner als jedes ϱ''_ν und größer als jedes ϱ'_ν, und daher gleich λ sein, was aber unmöglich ist.

Ein allgemeineres Beispiel, das auch in dem Fall seine Geltung behält, daß die Exponenten *jeden* reellen Zahlenwert annehmen können, ist folgendes: Man setze

$$(12) \qquad x'_\nu = \alpha'_\nu \omega^{\varrho'_\nu}, \qquad x''_\nu = \alpha''_\nu \omega^{\varrho''_\nu},$$

1) Die Entwickelung der Wurzelgrößen hat nach dem binomischen Satz zu geschehen, in der gleichen Weise wie für Potenzreihen.

wo α_ν' und α_ν'' positive Zahlen sind, und zwar soll mit wachsendem ν α_ν' gegen unendlich, α_ν'' gegen Null und ϱ_ν' zunehmend gegen einen Grenzwert λ konvergieren; endlich soll es in der Folge der nicht zunehmenden Exponenten $\varrho_1'', \varrho_2'', \varrho_3'', \ldots$ einen ersten geben, der gleich λ ist. Alsdann kann es wieder keine transfinite Zahl ξ geben, die der Größe nach zwischen den Mengen $\{x_\nu'\}$ und $\{x_\nu''\}$ liegt. Denn ihre Ordnung muß größer sein als jedes einzelne ϱ_ν' und kann nicht größer als irgend ein ϱ_ν'' sein; sie ist daher gleich λ. Unter den Zahlen der Ordnung λ kann es aber keine geben, die kleiner als jedes x_ν'' ist. Denn jede Zahl der Ordnung λ ist notwendig von der Form

$$\xi = \alpha\omega^\lambda + \beta\omega^{\lambda-\sigma} + \gamma\omega^{\lambda-\tau} + \cdots,$$

wo $\alpha, \sigma, \tau, \ldots$ irgendwelche positiven reellen Zahlen sind. Man erhält überdies um so kleinere Zahlen, je kleiner α ist. Welche bestimmten Werte man aber auch $\alpha, \sigma, \tau, \ldots$ erteilt, so gibt es unserer Festsetzung gemäß immer eine Zahl x_ν'', die kleiner als ξ ist.

14. Es bleibt noch die oben aufgeworfene Frage zu prüfen, ob die nichtarchimedischen Zahlen jederzeit die Eigenschaft behalten, daß ihre Lücken durch neue Zahlen ausgefüllt werden können. Diese Frage dürfte zu bejahen sein.

Bleiben wir zunächst einmal bei den vorstehenden Beispielen stehen, so läßt sich die bezügliche Lücke in dem ersten durch Hinzufügen von ω^λ ausfüllen. Im zweiten Beispiel ist eine derartige Ausfüllung zwar unmöglich; man kann die Lücke aber in beiden Fällen auch so ausfüllen, daß man zu den vorhandenen Einheiten ω^λ eine neue transfinite Einheit Ω und ihre reziproke so hinzufügt, daß für jede ganze Zahl ν

$$\Omega > \omega^\nu$$

ist. In unserm Fall genügt es offenbar, $\Omega = \omega^\omega$ zu wählen.

Da man nun transfinite Einheiten ebensoweit zulassen kann, wie man wohlgeordnete Mengen definieren kann, und da es eine größte wohlgeordnete Menge nicht gibt, so erscheint damit die obige Behauptung bewiesen. Jedenfalls kann man folgern, daß, welche bestimmten Einheiten man auch zugrunde legen mag, in dem durch sie definierten Größensystem eine Unmöglichkeit, Lücken durch neue Zahlen auszufüllen, nicht eintreten kann.

Über die partiellen Differentialgleichungen der Physik.

Referat für die Versammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung in Meran.

Von W. Wien in Würzburg.

Der Aufforderung der Mathematiker-Vereinigung, ein Referat über die partiellen Differentialgleichungen der Physik zu erstatten, bin ich gern nachgekommen, wenn ich mir auch klar darüber bin, daß ein Physiker einer solchen Aufgabe nur in sehr beschränkter Weise nachkommen kann. Aber die erfreuliche Tatsache, daß die Mathematiker in neuester Zeit den Problemen der Physik größeres Interesse entgegenbringen, vor allem aber das Bedürfnis der Physik selbst, eine umfassendere Mitarbeiterschaft an ihren mathematischen Problemen zu erhalten, haben mich bestimmt, das Referat zu übernehmen.

Ich werde mich daher auch nur auf den Standpunkt des Physikers stellen und zwar im wesentlichen pro domo sprechen, indem ich besonders diejenigen mathematisch-physikalischen Probleme, die mir am Herzen liegen und deren Bearbeitung mir ganz besonders erwünscht erscheint, herausgreife. Aus diesem Grunde wird das Referat auch keineswegs eine zusammenfassende Übersicht über den Stand der partiellen Differentialgleichungen liefern, zu deren Abfassung ich auch gar nicht befähigt wäre, da mir ein sehr großer Teil der rein mathematischen Behandlung der partiellen sowohl wie der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen vollkommen fremd ist. So kann ich z. B. die Fragen, die in dem Artikel über partielle Differentialgleichungen der mathematischen Enzyklopädie oder in dem Handbuch der linearen Differentialgleichungen von Schlesinger vorkommen, überhaupt nicht berühren, da sie Anwendung auf physikalische Probleme nicht gefunden haben und, soweit ich sehe, nicht finden können.

Von den physikalischen Problemen will ich aber auch alle diejenigen fortlassen, denen sich neue Seiten vorläufig nicht werden abgewinnen lassen, wie die akustischen und rein elastischen Probleme, ebenso wie die Wärmeleitung. Auch sonst muß eine Beschränkung schon wegen der mäßigen zur Verfügung stehenden Zeit eintreten, und ich lasse daher auch alle Probleme der allgemeinen analytischen Mechanik beiseite.

Dagegen möchte ich beginnen mit Problemen der Hydrodynamik. Diese Disziplin hat sich allmählich zu einer rein mathematischen

Domäne ausgebildet, in welcher Gelegenheit zur Anwendung fast sämtlicher analytischer Hilfsmittel geboten wird. Man kann sagen, daß jede analytische Eroberung gleichzeitig die Lösung eines hydrodynamischen Problems mit sich bringt. Aber der moderne Physiker pflegt sich für Hydrodynamik uur mäßig zu interessieren, obwohl sie noch ein Lieblingsgebiet von Helmholtz war. Der Grund scheint mir darin zu liegen, daß die aus der Hydrodynamik abgeleiteten Resultate meistens zu Folgerungen führen, die mit den tatsächlich beobachteten Erscheinungen in keiner Übereinstimmung stehen. Nur einige Reibungsprobleme lassen sich mit der Erfahrung vergleichen und führen in speziellen Fällen zu erträglicher Übereinstimmung. Dagegen können Resultate, wie die Bewegung fester Körper in einer Flüssigkeit, selbst wenn die Lösung in vollkommenster Weise gelingt, niemals auch nur entfernt mit den tatsächlichen Verhältnissen ähnlich gefunden werden.

Der Grund liegt daran, daß man in den Differentialgleichungen selbst nicht genügend die Verhältnisse der Wirklichkeit berücksichtigt.

Wir wissen nicht, ob die Berücksichtigung der Reibung durch das Hinzufügen der Reibungsglieder als Fundament für die hydrodynamischen Bewegungen zureichend ist, d. h. ob alle vorkommenden Bewegungen sich mit diesen Gleichungen in Übereinstimmung befinden.

Aber in den meisten Problemen wird auch die Reibung vernachlässigt, weil die mathematische Behandlung des allgemeinen Problems nicht durchführbar ist. Man nimmt daher an, daß die an sich schwache Reibung die Bewegungen nur mäßig verändern kann. Aber die hier liegenden Schwierigkeiten sind noch zum größten Teil unaufgeklärt. Bewegungen, die ohne Berücksichtigung der Reibung für labil gelten, können durch die Reibung stabil werden und umgekehrt. So weist z. B. Lord Kelvin erst in diesem Jahre darauf hin, daß ein gewöhnlicher Helmholtzscher Wirbelring sich im labilen Gleichgewicht befinde.

Besonders vergrößert werden die Schwierigkeiten durch die Grenzbedingungen, die für reibende Flüssigkeiten anders lauten als für nicht reibende.

Wir wollen hier einen sehr einfachen Fall betrachten, eine um eine Achse, die z-Achse, symmetrische Bewegung. Sei w die Geschwindigkeit in der Richtung der z-Achse, $\mathfrak{r}$ in radialer, $\varrho\mathfrak{y}$ in tangentialer Richtung, ϱ die Entfernung von der Achse, k^2 die Reibungskonstante, s das spezifische Gewicht. Wir können dann den Gleichungen für eine reibende Flüssigkeit genügen, wenn wir setzen

$$\mathfrak{r} = \frac{a}{\varrho}, \qquad w = \frac{b}{\varrho^4}, \qquad \mathfrak{y} = \frac{c}{\varrho^2}, \qquad a = -\frac{4k^2}{s} = -0{,}14\,\frac{cm^2}{\sec}.$$

Dann wird der Druck

$$\frac{p}{s} = -\frac{1}{2}\frac{a^2+c^2}{\varrho^2} + gz.$$

Ferner ist, wenn $\psi = az + \frac{1}{2}\frac{b}{\varrho^2}$,

$$\mathfrak{r} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\psi}{\partial z}, \qquad w = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\psi}{\partial\varrho}.$$

In einer freien Oberfläche muß $\psi = \text{const}$, aber auch $p = \text{const}$ sein, wenn keine Reibung vorhanden wäre. Dann muß also, wenn ε eine neue Konstante bezeichnet:

$$a = \varepsilon g, \qquad b = -\varepsilon(a^2 + c^2)$$

oder

$$\varepsilon = -\frac{4k^2}{sg},$$

daher

$$b = \frac{4k^2}{sg}\left(c^2 + 16\frac{k^4}{s^2}\right)$$

sein.

Nun ist aber die Bedingung $p = \text{const}$ keine ausreichende, da die allgemeinen Druckkomponenten an der Oberfläche beiderseits gleich sein müssen. Wählen wir $\frac{k^2}{s}$ d. h. a klein, d. h. kleine Reibung, dagegen c und damit b groß, d. h. große Rotation und vertikale Strömung, so sind die Abweichungen der Drucke an der Oberfläche vom konstanten Wert klein. Wir erhalten also eine Bewegung, die nicht ganz stationär ist, weil noch unausgeglichene Druckkräfte vorhanden sind, die aber nicht weit von einer stationären entfernt ist, wenn wir kleine Reibung haben. Die hier auftretende Bewegung entspricht einem Strudel, der von einer Linie $\varrho^2 z = \text{const.}$ als einer freien Oberfläche begrenzt wird.

Dagegen ist ohne Reibung die ganze Bewegung unmöglich, weil für $k^2 = 0$, a, b, c verschwinden.

Betrachtungen wie diese zeigen, daß Vernachlässigung der Reibung manche Flüssigkeitsbewegungen gar nicht zur Darstellung bringen wird. Der Vergleich mit den wirklichen Flüssigkeitsbewegungen läßt uns nun aber die Frage aufwerfen, ob wir überhaupt je hoffen können, durch die Behandlung der Probleme auf Grund der Differentialgleichungen weiter zu kommen. Die hydrodynamischen Gleichungen sind nicht linear, die Fälle, in denen eine Integration möglich ist, dürften im großen und ganzen erschöpft sein, und da schon die Behandlung linearer Differentialgleichungen unter Berücksichtigung der Grenzbedingungen schwierig ist, so wird man wohl mit Berechtigung sich fragen, ob wir derartige Hilfsmittel, wie sie hier gefordert werden, auch von einer sehr

fortgeschrittenen Analyse verlangen können. Die Bewegungen, wie sie in den Wasserbewegungen der Natur vorkommen, sind so unregelmäßig und kompliziert, daß auch die mechanische Darstellung notwendig äußerst verwickelt ausfallen muß. Man muß sich aber sagen, daß eine solche detaillierte Behandlung der hydrodynamischen Vorgänge auch gar kein Interesse haben würde. Wir stehen hier offenbar vor einem ganz ähnlichen Problem wie vor der Wärmebewegung, wo ebenfalls die mechanische Auflösung der Molekularbewegung ebenso unmöglich wie wertlos ist.

In der Wärmelehre hilft man sich mit der Einführung von Mittelwerten und statistischen Überlegungen, und es ist das große Verdienst Boltzmanns die Beziehungen zwischen derartigen Betrachtungsweisen und den allgemeinen Gesetzen der Wärmelehre aufgestellt zu haben.

Andererseits hat Helmholtz in seinen monozyklischen Systemen gezeigt, daß auch ganz einfache mechanische Bewegungen ähnlichen Gesetzen wie die Wärme gehorchen, wenn man sich in bezug auf die Einwirkung auf die Bewegung gewisse Beschränkungen auferlegt.

Der erste der versucht hat, in die Hydrodynamik Mittelwertsbetrachtungen einzuführen war Osborne Reynolds.[1]) Er war durch seine Versuche über die Strömung von Flüssigkeiten in Röhren dazu veranlaßt, nachdem er gefunden hatte, daß bei Überschreiten einer gewissen Geschwindigkeit, die von der Reibungskonstante und dem Röhrenquerschnitt abhängt, die gewöhnlichen von Poiseuille aufgestellten Gesetze nicht mehr ausreichen.

Es zeigen sich dann unregelmäßige Bewegungen, die Strömung erfolgt nicht mehr rein axial, sondern erfolgt in unregelmäßigen hin und hergehenden Quer- und Längsströmungen. Ein großer Teil der Energie wird durch diese unregelmäßigen Strömungen verzehrt, und die axiale Strömung ist daher bei gleichen Drucken viel kleiner als dem Poiseuilleschen Gesetz entsprechen würde.

Die theoretischen Betrachtungen von Reynolds sind schwer verständlich. Lorentz[2]) hat sie in eine übersichtliche Form gebracht, und man kann in der Tat durch diese Überlegungen einen gewissen Einblick in die Vorgänge gewinnen.

Es scheint mir nun von vornherein klar zu sein, daß solche unregelmäßige Bewegungen nicht auf die Strömung in zylindrischen Röhren beschränkt sein können, sondern bei allen Bewegungen vorkommen

1) Reynolds, Phil. Transact. 1883.

2) G. A. Lorentz, Over den weerstand dien een vloeistofstroom in eene cilindrische buis ondervindt, Koninklijke Akad. v. Wet. te Amsterd. 10. Juni 1897.

müssen, wo die Flüssigkeit von festen Körpern begrenzt wird und die Geschwindigkeit gewisse Grenzen überschreitet.

Auf dieser Grundlage erscheint eine andere Behandlungsweise der hydrodynamischen Probleme möglich. Zunächst Einführung einer einfachen regelmäßigen Bewegung, wie sie sich an den bisherigen Darstellungen schon als möglich gezeigt hat, dann eine darüber gelagerte unregelmäßige Bewegung, die durch Mittelwerte eingeführt wird. Die Grundzüge einer solchen Theorie sind in den Arbeiten von Reynolds und Lorentz enthalten. Aber eine genauere Untersuchung über die Behandlung der unregelmäßigen Bewegung erscheint notwendig. Zunächst ist es, wie bei allen derartigen Behandlungsweisen, in gewissem Grade willkürlich, wie man die Mittelwerte bilden will, und es müßte gezeigt werden, welche hier die einzig zulässigen sind. Sodann ist es nicht ausgeschlossen, daß die in der Wärmelehre ausgebildeten Theorien auf sie Anwendung finden können. Die Flüssigkeitsbewegungen, um die es sich hier handelt, sind in hohem Grade ungeordnet. Man kann sagen, daß sie in gewissem Sinne nicht umkehrbar sind. Denn man wird getrost behaupten können, daß wir keine Mittel besitzen, eine solche einmal eingetretene unrelmäßige Flüssigkeitsbewegung in eine vollkommene regelmäßige zu verwandeln, und es scheint mir kaum zweifelhaft, daß dieser unregelmäßige Charakter in bestimmter Weise sich ausdrücken muß, wie es bei der Molekularbewegung und der monozyklischen der Fall ist.

Wenden wir uns jetzt zur Elektrodynamik. Dem von mir vor zwei Jahren ausgesprochenen Wunsche, eine genaue Analyse der Bewegung eines Elektrons zu erhalten, ist von Herrn Sommerfeld in sehr weitgehender Weise entsprochen worden.[1]) Wir besitzen in seinen Arbeiten eine Theorie der Bewegung einer kugelförmigen elektrischen Ladung von unveränderlicher Gestalt, die auf die meisten Fragen, die der Physiker stellen kann, eine Antwort zu geben vermag.

Das wesentlich Neue in diesen Untersuchungen ist das Verhalten von Elektronen, die sich mit Lichtgeschwindigkeit oder Überlichtgeschwindigkeit bewegen.

Besondere Aufmerksamkeit verdient das Resultat, daß die Gleichungen für die kräftefreie Bewegung keine Lösung haben sollen.

Hier scheinen mir aber doch noch Schwierigkeiten zu liegen, die einer noch eindringenderen Bearbeitung bedürfen. Zunächst scheint es mir mathematisch nicht ganz durchsichtig, wie eine Gleichung,

---

1) Sommerfeld, Gött. Nachr. 1904, S. 99 u. S. 363; Proceedings Acad. Amsterd. 1904, S. 346, Gött. Nachr. 1905, S. 201.

welcher Art sie auch sein möge, überhaupt keine Lösung besitzen kann. Aber auch physikalisch ist das Ergebnis schwer zu verstehen. Wir können uns z. B. ein Elektron mit Unterlichtgeschwindigkeit durch eine Metallplatte geschleudert denken, der auf der andern Seite eine zweite Mettallplatte gegenübersteht. Zwischen beiden sei ein Feld vorhanden, das das Elektron auf Überlichtgeschwindigkeit bringt. Wenn es durch die zweite Metallplatte geht, kommt es in ein kräftefreies Feld. Die Annahme, daß es nun plötzlich auf Unterlichtgeschwindigkeit sinkt, setzt doch voraus, daß es eine verzögerte Bewegung durchmacht, die ja auch ausgeschlossen sein soll.

Vom Standpunkt des Physikers wird man wohl zunächst an der Ansicht festhalten, daß die Überschreitung der Lichtgeschwindigkeit unmöglich ist.

Diese Folgerung ist ohne weiteres aus der Annahme zu ziehen, daß die Elektronen ihre Form mit der Geschwindigkeit ändern, indem sie in immer mehr abgeplattete Ellipsoide übergehen. Diese Annahme, die übrigens die einfachste ist, die man machen kann, ist neuerdings von Lorentz durch wichtige Gründe gestützt worden. Es scheint, daß die Ausarbeitung der Theorie für diesen Fall kaum erhebliche Schwierigkeiten machen wird, weil ein solches im Verhältnis $1 : 1 - \frac{v^2}{c^2}$ (v Translations-, c Lichtgeschwindigkeit) abgeplattetes Ellipsoid für den Bewegungszustand der Kugel im Ruhezustand entspricht. Dadurch ist naturgemäß auch der mathematisch einfachste Fall bestimmt.

Von den sonstigen elektromagnetischen Problemen möchte ich hier noch die Beugung erwähnen, deren eingehendere Behandlung mir ganz besonders wünschenswert erscheint. Alle bisherigen Theorien der Beugung sind auf den Einfluß, den das Material des beugenden Körpers auf die Lichtwellen hat, nicht eingegangen. Andererseits zeigen die Versuche von Gouy[1]) und mir, sowie von Du Bois und Rubens[2]), daß ein solcher Einfluß vorhanden ist.

Die Fundamente für eine vollständigere Theorie der Beugung sind in der elektromagnetischen Lichttheorie gegeben.

Wir haben es mit elektromagnetischen Wellen zu tun, die an der Oberfläche der beugenden Körper entlang gleiten, wobei der ganze Vorgang durch die Maxwellschen Differentialgleichungen und die Grenzbedingungen bestimmt sein muß, ohne daß wir irgend eine Annahme über die Vorgänge an der Oberfläche zu machen brauchen. Eine vollständige Analyse muß den ganzen Vorgang darstellen und

1) Gouy, C. S. 97, S 1573, 1884; W. Wien, Wied. Ann. 28, S. 117; 1886.
2) Du Bois und Rubens, Wied. Ann. 49, S. 593; 1893.

jede Frage beantworten können. Sind es lange Hertzsche Wellen, so haben wir in Leitern nur die Leitfähigkeit zu berücksichtigen, handelt es sich um Lichtwellen, so müssen die durch die Dispersionsglieder ergänzten Gleichungen herangezogen werden. Die Theorie ist keine andere als die der Reflexion an absorbierenden Medien.

Ein Anfang für solche Betrachtungen ist von J. J. Thomson[1]) gemacht, der den Einfluß einer leitenden Kugel auf eine ebene Welle bestimmt hat. Leider sind die von ihm gewonnenen Ergebnisse so kompliziert, daß eine übersichtliche Diskussion nur für den Fall sehr kleiner Dimensionen der Kugel möglich ist; für die eigentliche Beugungstheorie ist damit wenig gewonnen.

Die Theorie der Beugung an einem unendlichen Zylinder ist von Herrn Seitz[2]) für lange elektromagnetische Wellen durchgeführt. Er ist damit beschäftigt, die Theorie für Lichtwellen zu ergänzen, wo der Einfluß des Materials bereits zum Vorschein kommen muß.

Für diese Theorie sind die vorhandenen Hilfsmittel der Analysis jedenfalls ausreichend. Die Theorie der Besselschen Funktionen ist so ausgearbeitet, daß ihre Anwendung auf das vorliegende Problem keine prinzipielle Schwierigkeit darbietet.

Bei der Beugung an einem unendlichen Zylinder sind die experimentellen Bedingungen für die Beobachtung der Beugungserscheinungen nicht günstig. Geeigneter für die Beobachtung ist die Beugung an einem unendlich dünnen Schirm oder Spalt. Die mathematische Behandlung würde sich durchführen lassen, wenn die Funktionen des elliptischen Zylinders genau analytisch entwickelt wären. Lassen wir die Exzentrizität der Ellipse zunehmen, so können wir einen dünnen Schirm von unendlicher Länge in die Theorie einführen. Wählen wir statt der Ellipse eine Hyperbel, so kommen wir auf den Fall eines Spalts.

Mathematisch haben wir es mit der Differentialgleichung

$$\Delta u + k^2 u = 0, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

zu tun. Wie H. Weber nachgewiesen hat, sind die elliptischen Koordinaten die einzigen, bei denen eine Integration durch eine Funktion

$$u = \varphi \psi$$

möglich ist, wo φ nur von der einen, ψ nur von der anderen Koordinate abhängt.

---

1) J. J. Thomson, Recent Res. in Electricity and Magnetism; Oxford 1893, S. 361.

2) W. Seitz, Ann. der Phys. 16, S. 746; 1905.

Für elliptische Koordinaten η und ξ erhalten wir die Gleichungen

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} - (k^2\cos^2 i\xi - a)\varphi = 0$$

$$\frac{d^2\psi}{d\eta^2} + (k^2\cos^2\eta - a)\psi = 0.$$

Mit dieser Differentialgleichung haben sich eine Anzahl hervorragender Mathematiker beschäftigt, insbesondere Heine[1]), Lindemann[2]), Häntzschel[3]), Mathieu[4]), Särchinger.[5]) Für das physikalische Problem brauchen wir zunächst analytische Darstellungen der beiden partikulären Integrale, die auch für numerische Berechnungen brauchbar sind. Dann muß die Funktion, welche eine ebene einfallende Welle ausdrückt, nämlich $e^{ibx} = e^{ib\cos i\xi\cos\eta}$ in eine Reihe entwickelt werden, die nach den Funktionen des elliptischen Zylinders fortschreiten, die sich in die Form bringen läßt

$$e^{ib\cos i\xi\cos\eta} = a_0 + a_1\mathfrak{E}_1'(\eta)\mathfrak{E}_1(i\xi) + a_2\mathfrak{E}_2(\eta)\mathfrak{E}_2(i\xi) + \cdots,$$

wo die a durch einfache bestimmte Integrale dargestellt werden.

Im Innern des elliptischen Zylinders nehmen wir einen metallischen Leiter an. Hier ist nur das eine partikuläre Integral brauchbar, weil das andere in den Brennpunkten der Ellipse einen unendlichen Differentialquotienten hat. Im äußeren Raume sind dagegen beide partikuläre Integrale heranzuziehen. An der Grenze sind die Bedingungen zu erfüllen, daß die tangentialen Komponenten der magnetischen und der elektrischen Kraft stetig sind. Bei dem elliptischen Zylinder muß an der Oberfläche, wo ξ konstant ist, u und $\frac{du}{d\xi}$ stetig sein.

Im innern Raum haben wir zu setzen

$$u_1 = \sum b_n\mathfrak{E}_{1,n}(\eta)\mathfrak{E}_{1,n}(i\xi)$$

für den äußeren

$$u_2 = \sum a_n\mathfrak{E}_{2,n}(\eta)\mathfrak{E}_{2,n}(i\xi) + \sum c_n\mathfrak{E}_{2,n}(\eta)\mathfrak{F}_{2,n}(i\xi),$$

wenn wir mit $\mathfrak{F}$ das zweite partikuläre Integral bezeichnen. Da an der Oberfläche ξ konstant ist, so müssen die einzelnen Glieder, die gleiche Funktionen von η enthalten, zur Erfüllung der Grenzbedingungen

1) Heine, Handbuch der Kugelfunktionen.

2) Lindemann, Math. Ann. Bd. 22, S. 117.

3) Häntzschel, Programm d. Realgymn. in Duisburg Ostern 1886; Programm d. dritten höheren Bürgerschule zu Berlin, Ostern 1889; Zeitschr. f. Math. u. Phys. 31, S. 25, 1883.

4) Mathieu, Liouville Journal II, Bd. 13, 1868.

5) Särchinger, Programm d. Gymn. Chemnitz 1894.

gleich gemacht werden. Nun sind aber die $\mathfrak{E}_{1,n}$ von den $\mathfrak{E}_{2,n}$ verschieden, da sie sich auf andere Konstanten k der Differentialgleichung beziehen. Es müssen daher die $\mathfrak{E}$ in trigonometrische Reihen entwickelt werden und die Koeffizienten der trigonometrischen Funktionen gleich gesetzt werden. Durch die beiden Grenzbedingungen bestimmen sich dann die Koeffizienten dieser Reihen und somit auch die b_n und die c_n. Nun hat schon Heine solche trigonometrische Reihen angegeben und auch ein Verfahren, um die Koeffizienten als Näherungszähler und Nenner von unendlichen Kettenbrüchen zu berechnen. Er hat gleichzeitig gezeigt, daß die Bedingung, daß die $\mathfrak{E}$ nach η periodisch sind, die ja in diesem Fall erfüllt sein muß, nur dann erfüllt ist, wenn die a als Wurzeln einer transzendenten Gleichung bestimmt werden. Die Indices 1, 2, 3 ... n der Reihe beziehen sich auf diese in unendlicher Anzahl vorhandenen Wurzeln.

Obwohl nun die wirkliche Berechnung, wie bereits aus der Notwendigkeit, Doppelreihen anzusetzen, hervorgeht, nicht einfach sein kann, so wären doch die Mittel zur Berechnung analytisch gegeben, sobald man das zweite partikuläre Integral als Funktion von $\cos\eta$ besitzen würde.

Zwar hat Heine einen Ausdruck angegeben, in welchem das Integral durch Reihen dargestellt wird, die nach Besselschen Funktionen zweiter Art fortschreiten, aber die Richtigkeit dieser Entwicklung ist, wie es scheint mit Recht, von Häntzschel angezweifelt.

Andererseits sind von Lindemann alle Potenzbedingungen nach $\cos^2\eta$ untersucht.

Setzt man $\cos^2\eta = z$, so erhält man die Gleichung

$$4z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2} + 2(1-2z)\frac{dy}{dz} + (\lambda z - \mathfrak{B})y = 0.$$

Es lassen sich nun zwar die beiden partikulären Integrale als Potenzreihen darstellen, die innerhalb des Einheitskreises konvergieren. Für das imaginäre Argument $i\xi$ ist indessen $\cos^2\eta > 1$, und die entsprechenden Reihen sind hier divergent. Bei der Heineschen Darstellung durch Reihen, die nach Sinus oder Kosinus der geraden oder ungeraden Vielfachen von η fortschreiten, können wir allerdings eine aber nur eine dieser Reihen durch passende Wahl der Konstanten $\mathfrak{B}$ in der ganzen Ebene konvergent machen, und zwar gehen sämtliche Potenzreihen Lindemanns in diesem Fall in die Heineschen über. Es geht also die Darstellung des zweiten partikulären Integrals verloren, und es bleibt zunächst nur die Möglichkeit, das zweite Integral durch die Beziehung

$$y_2 = y_1 \int \frac{dz}{y_1^2 \sqrt{z(z-1)}}$$

wirklich auszurechnen.

Für die Berechnung der beiden partikulären Integrale ist aber möglicherweise die Anwendung halbkonvergenter Reihen, zweckmäßiger, die nach Thomé, in der Form

$$e^{g(z)} z^{\sigma} \left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \cdots \right)$$

aufgestellt werden können. Hier ist σ eine Konstante und $g(z)$ eine ganze rationale Funktion von z.

Es bedarf dann allerdings noch einer besonderen Untersuchung, welche dieser Reihen unsern Funktionen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ entspricht.

Wenn ich hier anstatt allgemeiner Betrachtungen eine Anzahl spezieller Probleme besprochen habe, so ist das vom Standpunkt des Physikers, dem hierdurch allein gedient wird, wohl gerechtfertigt, und wenn es mir gelungen sein sollte, das Interesse der Mathematiker für diese Fragen zu erregen, ist der Zweck des Referates erreicht.

Bemerkungen zur Elektronentheorie
bei der Diskussion zu vorstehendem Vortrage des Herrn W. Wien über die partiellen Differentialgleichungen der Physik.

Von A. Sommerfeld in Aachen.

Indem ich der Kürze halber nur zum Gegenstande Elektronentheorie das Wort nehme, möchte ich die von Herrn Wien erwähnten absonderlichen Resultate besprechen, die ich für ein mit Überlichtgeschwindigkeit bewegtes Elektron theoretisch abgeleitet habe. Herr Kollege Wien hat aus diesen Absonderlichkeiten in seinem allgemeinen Vortrage über Elektronen den Schluß gezogen, daß die Grundlagen der Elektronentheorie einer Revision bedürfen. Diesem Schluß kann ich nicht beistimmen. Daß die Verhältnisse bei Überlichtgeschwindigkeit nicht anders als absonderlich liegen können, dürfte von vornherein klar sein; ja wir dürften wohl alle darin übereinstimmen, daß die Überlichtgeschwindigkeitsbewegungen überhaupt nicht physikalisch realisierbar sind. Gibt nun die Theorie von dieser Nichtrealisierbarkeit Rechenschaft? Nicht ohne weiteres. Wenn wir den Fall von *Oberflächenladung* ausschließen, bei der sich direkt eine unendlich große Kraft zur Erzeugung und Unterhaltung einer Überlichtgeschwindigkeitsbewegung als erforderlich berechnet, wenn wir also z. B. eine starre masselose Kugel mit gleichmäßiger *Volumladung* betrachten, so liefert die Theorie für jede vorgeschriebene Bewegung bestimmte endliche Kräfte, die an dem Elektron anzubringen sind, um die fragliche

Bewegung zu ermöglichen. Es sind nun zwei Punkte, die Herr Wien beanstandet:

1) Betrachtet man den Durchgang des Elektrons durch einen bestimmten Überlichtgeschwindigkeitswert, so ergibt sich ein *größerer* Kraftbedarf, wenn die Bewegung *verzögert*, ein *kleinerer*, wenn sie *beschleunigt* ist.

2) Es gibt oberhalb der Lichtgeschwindigkeit weder eine *beschleunigte* noch auch eine stetig *verzögerte* Bewegung, welche ohne Kraftzufuhr von statten gehen kann; ebenso wenig ist die *gleichförmige* Bewegung mit Überlichtgeschwindigkeit im kräftefreien Felde möglich. Mit anderen Worten: Die Integralgleichung, welche den Bewegungsverlauf beherrscht, hat bei Überlichtgeschwindigkeit *keine Lösung.*

Punkt 1) glaube ich durch die folgenden Bemerkungen, die sich übrigens mit meinen Ausführungen in den Göttinger Nachrichten 1905 Heft 3 § 24 und 25 decken, vollständig klären zu können. Aus Punkt 2) habe ich, ähnlich wie Wiechert in den Göttinger Nachrichten 1905 Heft 1, geschlossen, daß das Elektron, wenn es, einmal auf Überlichtgeschwindigkeit gebracht, sich selbst überlassen würde, plötzlich auf Lichtgeschwindigkeit herunterfallen müßte, womit die physikalische Unmöglichkeit der Überlichtgeschwindigkeit auch theoretisch belegt wäre. Diesen plötzlichen Abfall der Geschwindigkeit möchte ich hier durch eine Art Kontinuitätsbetrachtung wenigstens in etwas plausibel machen.

Zu 1). Es ist (von den allereinfachsten quasistationären Bewegungen abgesehen) für die Dynamik der Elektronen charakteristisch, daß sich der Kraftbedarf nicht nach dem augenblicklichen Bewegungszustande bemißt, sondern nach dem Bewegungsverlauf während eines endlichen Zeitintervalles von der Größenordnung $2a/|c-v|$, wo a den Elektronenradius, c die Lichtgeschwindigkeit und v die augenblickliche Bewegungsgeschwindigkeit des Elektrons bedeutet. Ferner sei vorausgeschickt, daß bei gleichförmiger Überlichtgeschwindigkeit eine Kraft $\mathfrak{F}$ vom Betrage

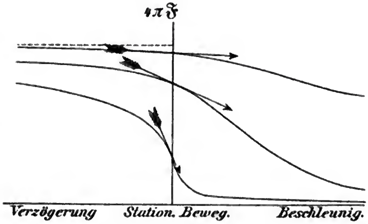
$$4\pi\mathfrak{F} = \frac{9}{4}\frac{\varepsilon^2}{a^2}\left(1 - \frac{c^2}{v^2}\right)$$

erforderlich ist, um die mit der Bewegung verbundene Energieausstrahlung zu ersetzen. Dabei ist ε die Ladung des Elektrons.

Haben wir es nun mit einer verzögerten Bewegung zu tun, z. B. in demjenigen Moment, wo $v = 2c$, so war in dem vorangehenden Intervall die Geschwindigkeit und daher auch der Energieverlust durch Strahlung um so größer, je schneller die Verzögerung ist. Die erforderliche Kraft wird daher um so größer sein, je schneller die Ver-

zögerung. Als Grenzwert bei unendlich rascher Verzögerung, wo unmittelbar vor dem betrachteten Momente die Geschwindigkeit unendlich groß war, ergibt sich derselbe Wert von $\mathfrak{F}$ wie bei dauernd unendlich großer Geschwindigkeit, nämlich nach der angeführten Formel $4\pi\mathfrak{F} = 9\varepsilon^2/4a^2$.

In der Figur bedeuten die negativen Abszissen Verzögerungen, die positiven Beschleunigungen. Nach der Ordinatenachse wird der Wert von $4\pi\mathfrak{F}$ aufgetragen, der dem verzögerten oder beschleunigten Durchgange durch die doppelte Lichtgeschwindigkeit entspricht; s. die mittlere Kurve. Dieselbe nähert sich für große negative Abszissen asymptotisch wachsend dem Werte $9\varepsilon^2/4a^2$ und schneidet auf der Ordinatenachse die Strecke $27\varepsilon^2/16a^2$ ab, welche der gleichförmigen Bewegung mit $v = 2c$ entspricht.



Dieselbe Überlegung, die die Zunahme der Kraft bei Vergrößerung der Verzögerung erklärt, macht auch die Abnahme der Kraft bei zunehmender Beschleunigung verständlich. Dabei vergleichen wir auch jetzt immer solche Werte von $\mathfrak{F}$, die zu derselben Geschwindigkeit $v = 2c$ gehören. In der Tat war bei größerer Beschleunigung die in dem vorangehenden Zeitintervall herrschende mittlere Geschwindigkeit kleiner wie bei geringerer Beschleunigung. Diese mittlere Geschwindigkeit kann sogar bei sehr schneller Beschleunigung unterhalb der Lichtgeschwindigkeit liegen, wodurch sich der alsdann kleiner ausfallende Kraftbedarf erklärt. Bei unendlich großer Beschleunigung wird dieser Kraftbedarf ersichtlich gleich Null; denn in diesem Falle war ja das Elektron noch unmittelbar vor dem betrachteten Momente $v = 2c$ in Ruhe; ein der Bewegung entsprechendes Feld war überhaupt noch nicht vorhanden; also kann auch keine Rückwirkung des Feldes auf das Elektron auftreten. Unsere Kurve nähert sich daher für große Abszissen asymptotisch der Abszissenachse selbst.

Die zahlenmäßige Größe der einzelnen Kurvenordinaten habe ich l. c. durch Planimetrierungen gefunden. Zum Vergleich zeichne ich noch zwei Kurven schematisch ein, von denen die obere dem (verzögerten oder beschleunigten) Durchgange durch $v = 5c$, die untere demjenigen durch $v = 1,2c$ entspricht. Sie haben qualitativ denselben Verlauf wie die mittlere Kurve für $v = 2c$.

Ich glaube, daß durch diese Erörterungen der allgemeine Verlauf unserer Kurven vollständig geklärt ist. Insbesondere verliert nun auch die Tatsache den Schein des Absonderlichen, daß unsere Kurven im Schnittpunkte mit der Ordinatenachse eine nach unten gerichtete Tangente haben, eine Tatsache, die man als Auftreten einer (longitudinalen) *negativen Masse* deuten kann. In der Tat führt man ja den Trägheitsbegriff auf elektromagnetischer Grundlage unterhalb der Lichtgeschwindigkeit dadurch ein, daß man die stationäre Bewegung mit den benachbarten quasistationären vergleicht und den durch die Beschleunigung geteilten Kraftbedarf der letzteren als scheinbare oder elektromagnetische Masse anspricht. Die Übertragung auf den Fall der Überlichtgeschwindigkeit zeigt unmittelbar, daß hier die besprochene Tangentenneigung die scheinbare Masse repräsentiert und daß diese negativ ist. Der Trägheitsbegriff kehrt sich also oberhalb der Lichtgeschwindigkeit um bei kugelförmiger Volumladung; er hat, wie Wiechert l. c. hervorhebt, überhaupt keinen Inhalt bei den von diesem betrachteten Ladungsformen.

2) Das dynamische Grundgesetz des (masselosen) Elektrons besagt, daß die von dem Eigenfelde des Elektrons herrührende Kraftwirkung mit den sonst etwa vorhandenen äußeren Kräften im Gleichgewicht stehen soll. Sind keine solchen äußeren Kräfte vorhanden, so muß sich das Elektron derart bewegen, daß die soeben konstruierte Kraftwirkung des Eigenfeldes verschwindet. Nach unserer Figur trifft dies aber für keine verzögerte und auch für keine beschleunigte Bewegung zu, wenn wir von dem trivialen Fall der unendlichen Beschleunigung absehen. Wir sind daher vor die von Herrn Wien betonte ernstliche Schwierigkeit gestellt: Es ist theoretisch möglich, durch endliche — wenn auch sehr große — Kräfte das Elektron auf Überlichtgeschwindigkeit zu bringen und eine Zeit lang auf dieser zu erhalten; es ist unmöglich, eine stetige, mit der erzwungenen Überlichtgeschwindigkeit anhebende Bewegung anzugeben, welche das von den Kräften befreite Elektron weiterhin auszuführen imstande wäre.

Den einzigen Ausweg aus dieser Schwierigkeit habe ich (vgl. Göttinger Nachrichten 1905, S. 203) in der Annahme gesehen, daß das Elektron *plötzlich* auf Lichtgeschwindigkeit oder Unterlichtgeschwindigkeit herabfällt. Diesen Ausweg etwas plausibler zu machen soll, die folgende Kontinuitätsbetrachtung dienen.

Nehmen wir vorübergehend an, das Elektron hätte eine gewisse träge Masse gewöhnlicher Art. Dann wird sich z. B. für den Durchgang durch die Geschwindigkeit $2c$ auf Grund unserer Kurve eine gewisse Verzögerung abgreifen lassen, bei welcher die Trägheitskraft im gewöhnlichen Sinne, nämlich Masse mal Verzögerung, die Wirkung

des Eigenfeldes ins Gleichgewicht setzt. Diese verzögerte Bewegung würde dem Grundgesetz der Elektronendynamik, wenn wir dasselbe sinngemäß auf mit wirklicher Masse behaftete Elektronen erweitern, genügen und stellt eine mögliche kräftefreie Bewegung des Elektrons dar. Lassen wir nun die wirkliche Masse abnehmen, so muß die Verzögerung in demselben Maße zunehmen, um wieder die Wirkung des Eigenfeldes ins Gleichgewicht zu setzen. Gehen wir in der Grenze zur Masse Null über, d. h. zu derjenigen Vorstellung, die wir uns mit guten Gründen von der physikalischen Beschaffenheit des negativen Elektrons gebildet haben, so entspricht dieser Grenze eine unendlich schnelle Verzögerung, d. h. ein plötzlicher Abfall von der ursprünglichen Überlichtgeschwindigkeit.

Ich gebe gern zu, daß diese Betrachtung etwas Künstliches hat, da sie aus dem sonst festgehaltenen Vorstellungskreise der masselosen Elektronendynamik heraustritt. Indessen ist wohl auch die ganze Frage nach dem Bewegungsverlauf bei Überlichtgeschwindigkeit eine künstliche, durch physikalische Mittel nicht zu entscheidende.

3) Dem vorangehenden Paradoxon stellt sich ein anderes an die Seite. Wir sahen soeben, daß sich bei der Kraft Null, oder allgemeiner *bei zu kleiner äußerer Kraft* keine stetige Bewegung angeben läßt, welche ein auf Überlichtgeschwindigkeit gebrachtes Elektron weiterhin auszuführen imstande wäre. Wir können andererseits sagen, daß *bei zu großer Kraft*, wenn nämlich die äußere Kraft den in unserer Figur auftretenden asymptotischen Grenzwert überschreitet, ebenso wenig eine mit dem Grundgesetz der masselosen Elektronendynamik verträgliche stetige Bewegung möglich ist. Der fragliche Grenzwert ist gegeben durch $4\pi\mathfrak{F} = 9\varepsilon^2/4a^2$. Die entsprechende Kontinuitätsbetrachtung, bei der wir von einem mit wirklicher Masse begabten Elektron ausgehen und den Übergang zu verschwindender Masse machen, würde in diesem Falle einen plötzlichen Sprung auf unendlich große Geschwindigkeit erwarten lassen.

4) Was die Theorie des deformierbaren Elektrons betrifft, so wird man mit dieser füglich warten dürfen, bis Herr Kaufmann das Resultat seiner diesbezüglichen Messungen bekannt gegeben hat.

Rudolf Lipschitz.

Nekrolog von H. Kortum,

abgedruckt aus der Bonner Chronik vom Jahre 1903.

Einen schweren Verlust erlitt unsere Universität am 7. Oktober 1903 durch den Tod des genialen Mathematikers Rudolph Lipschitz, der ihr seine Tätigkeit vom Anfang seiner akademischen Laufbahn an mit einer einzigen Unterbrechung von zwei Jahren gewidmet hat. Er war ein Ostpreuße, geboren am 14. Mai 1832 auf dem väterlichen Gut Bönkeim bei Königsberg. Sehr frühreif absolvierte er das Königsberger Gymnasium schon mit 15 Jahren. Zunächst bezog er die heimatliche Universität; Richelot und vor allem Franz Neumann, damals einer der ersten Vertreter der mathematischen Physik, waren hauptsächlich seine Lehrer. Angezogen durch Dirichlet wandte er sich dann nach Berlin. Eine schwere Krankheit zwang ihn, seine Studien etwa ein Jahr lang zu unterbrechen, sodaß er erst am 9. August 1853 in Berlin promovierte. Um diese Zeit verlobte er sich mit einer Jugendgespielin, Ida Pascha, der Tochter eines Gutsnachbars, und entschloß sich, um rascher selbständig zu werden, zur Gymnasial-Laufbahn, legte in Königsberg sein Probejahr ab und wirkte am Gymnasium in Elbing als Lehrer. Dann aber gewährte ihm sein Vater die nötigen Mittel; er habilitierte sich Ostern 1857 bei uns und begann im Herbst desselben Jahres seine glückliche Ehe. Mit der seltensten Hingebung und Aufopferung hat ihm seine Gattin zur Seite gestanden, in guten Zeiten und in Zeiten des Leidens, als er die gewohnte und liebgewordene



Arbeit mit traurigem Herzen unterbrechen mußte und zuletzt in den trüben Tagen am Ende seines Lebens, als ein langwieriges Nierenleiden seine Kräfte langsam verzehrte.

Ostern 1862 ging er als außerordentlicher Professor nach Breslau, kehrte aber schon Ostern 1864 als Ordinarius nach Bonn zurück. Einmal trat die Versuchung an ihn heran, uns zu verlassen, er erhielt Ende 1873 nach Clebsch' Tode einen Ruf nach Göttingen, und obgleich er es für eine große Sache hielt, wenn auch nur mittelbar, Nachfolger von Dirichlet zu werden, blieb er in Bonn.

Mit großer Gewissenhaftigkeit, Geschäftskenntnis und Sachlichkeit widmete er sich den Angelegenheiten der Fakultät, geschätzt als Berater in außergewöhnlichen Fällen. In Berufungssachen stellte er das wissenschaftliche Interesse der Universität allen anderen Rücksichten voran. Für das Jahr 1874/75 wurde er einstimmig zum Rektor gewählt.

Lipschitz' mathematische Denkweise ist durch Dirichlet bestimmt worden, als dessen Schüler er sich betrachtete. An Dirichlet knüpfen auch seine frühesten Arbeiten an, später eroberte er sich eigene Gebiete, auf denen er bahnbrechend vorging. Seine wissenschaftliche Tätigkeit als Forscher in ihrem ganzen Umfang und vielseitigen Gedankeninhalt zu schildern ist hier unmöglich, dafür war sie zu ausgedehnt und mannigfaltig. Sie erstrekte sich hauptsächlich auf Zahlentheorie, namentlich in Verbindung mit der Infinitesimalrechnung, Reihentheorie, gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen, analytische Mechanik, mathematische Physik (namentlich Potentialtheorie). Besonders hervorzuheben sind seine ausgedehnten Untersuchungen über Formen von n Differentialen und damit zusammenhängende Fragen der Variations-Rechnung, Raumtheorie und Mechanik, die, an die Entwicklung Riemanns in seiner berühmten Habilitationsrede über die Hypothesen der Geometrie anknüpfend, einen neuen Zweig der Mathematik geschaffen haben. Hierüber sagt die von der *Berliner Akademie* an Lipschitz bei Gelegenheit seines 50jährigen Doktor-Jubiläums gerichtete Adresse folgendes:

„Diese (Riemanns) tiefgründige Entwicklung war aber den Mathematikern ein Buch mit sieben Siegeln, und uns ihr Verständnis erschlossen zu haben, ist vorzugsweise das Verdienst Ihrer unablässigen vielseitigen, lichtvollen Untersuchungen.“

Ferner sind hervorzuheben seine aus der Transformation von Quadratsummen herausgewachsene Erweiterung des Begriffs der komplexen Größen und die merkwürdigen Untersuchungen über Oberflächen mit vorgeschriebenen Krümmungseigenschaften.

Großes Interesse wendete er auch den Grundfragen der mathe-

matischen Analyse zu; seine dahingehörigen Untersuchungen ergänzte er später, abweichend von den Gewohnheiten der ihm geistesverwandten deutschen Mathematiker seit Gauß zu einem „Lehrbuch der Analysis". Treffend charakterisiert diesen Teil seiner wissenschaftlichen Arbeit eine Adresse der *Göttinger Königl. Gesellschaft der Wissenschaften* mit folgenden Worten:

„*In dem Streben nach Generalisierung der Fragestellungen und bei dem Eindringen in die entfernteren Regionen abstrakt mathematischen Denkens lassen Sie nicht die Sicherung des vorhandenen Besitzstandes der Wissenschaft außer acht. Sie durchdenken vielmehr aufs schärfste die Beweismethoden für den Fundamentalsatz der Algebra, die Darstellung willkürlicher Funktionen durch Reihen, die Möglichkeit, ein System von reellen Differentialgleichungen zu integrieren und können endlich, ausgestattet mit den zuverlässigsten Mitteln der Kritik, an die große Aufgabe herantreten, das System der Analysis von den Grundbegriffen an in stetigem Zusammenhang darzustellen. So schufen Sie ein Lehrbuch der Analysis, wie es in dieser tiefen Auffassung und wissenschaftlichen Bedeutung die deutschen Mathematiker bis dahin nicht besaßen, und das noch manche junge Generation Ihnen zu lebhaftem Dank verpflichten wird.*"

Lipschitz befaßte sich nie mit unbedeutenden, nebensächlichen Fragen, er hatte einen scharfen Blick für das Wesentliche, auch kleine Arbeiten ohne sonderliche Resultate bringen bei ihm überraschend neue Gesichtspunkte und Gedanken. Immer behielt er im Auge, was die verschiedenen mathematischen Disziplinen verbindet. In gewissem Sinn war er hauptsächlich Algebraiker, indem er auch in analytischen Fragen den mit ihnen zusammenhängenden algebraischen Algorithmen die größte Aufmerksamkeit schenkte, sie gewissermaßen für den wesentlichen Kern hielt.

Er konzipierte leicht und rasch und besaß ein riesiges analytisches Anschauungsvermögen und das sicherste Gefühl für das Richtige. Damit im engsten Zusammenhang stand, daß die Darstellung seine weniger starke Seite war. Was er mit einem Blick übersah, in einzelne Schlüsse zu zerlegen und methodisch auseinanderzusetzen, machte ihm die größte Mühe und gelang nicht immer vollständig. Auch für den gewiegten Gelehrten bot die Lektüre seiner Sachen immer noch hier und da Schwierigkeiten, und er ist längere Zeit wenig gelesen und viel zu wenig gewürdigt worden. Wie sehr sich dies aber in den späteren Zeiten geändert hat, zeigte sich besonders in der außerordentlichen Fülle der Zuschriften zur Feier seines 50jährigen Doktor-Jubiläums. Schon oben fand sich Gelegenheit, charakteristische Äußerungen der Akademien von Berlin und Göttingen anzuführen. Diesen mögen zwei andere angereiht

werden. Königsberger dankt ihm *„für alle die großen Bereicherungen, die Sie der Wissenschaft haben zuteil werden lassen und durch die Sie in die erste Reihe der Forscher der letzten 50 Jahre getreten sind"*. F. Klein sagt in einem äußerst liebenswürdigen an Frau Lipschitz gerichteten Brief folgendes: *„und ich habe, indem ich selbst fortschritt, immer mehr gelernt, sein (Lipschitz) hohes mathematisches Ideal zu verstehen, das die Wissenschaft in strenger und durchsichtiger Gliederung als ein zusammenhängendes Ganze begreifen will und mit offenem Sinn für die Weiterentwicklung die Aufmerksamkeit doch immer wieder mit Vorliebe auf die Arbeiten der großen Bahnbrecher der nahen und fernen Vergangenheit zurücklenkt."* Lipschitz' Ansehen wird aber noch immer steigen, denn immer noch mehr wird den Mathematikern der große in seinen Sachen steckende Gedankeninhalt zum Bewußtsein kommen.

Er war korrespondierendes Mitglied der Akademien von Paris, Berlin, Göttingen, Rom (Lincei) usw. Seine Arbeiten sind vielfach in fremde Sprachen übersetzt worden. Mit seinem großen französischen Zeitgenossen Hermite unterhielt er durch längere Jahre einen lebhaften Briefwechsel.

Seiner Lehrtätigkeit nahm sich Lipschitz auf das gewissenhafteste an. Er hat nicht weniger als 19 verschiedene große Vorlesungen über fast alle Zweige seiner Wissenschaft gehalten. Bei seinen Schülern suchte er vor allem den Sinn für präzise Fassung der Theoreme und Sicherheit der Beweise zu wecken. Immer und immer wies er sie auf die Notwendigkeit hin, vom Lehrbuch zu den Originalarbeiten zurückzugehen. Mit Plücker hat er im Jahr 1866 das hiesige mathematische Seminar gegründet.

Seine Geradheit und sein energisches Eintreten für das, was er einmal als recht und gerecht erkannt hatte, haben ihn in der ersten Zeit seines Bonner Ordinariats ein paarmal in Konflikte gebracht; bald aber brach sich die Erkenntnis seines lauteren wohlwollenden Charakters Bahn, und er erfreute sich der höchsten Achtung und Liebe aller Kollegen und starb allgemein betrauert, nicht nur als Gelehrter, sondern auch als Persönlichkeit.

Hermann Kortum.

Nekrolog von Anschütz und Study,

abgedruckt aus der Bonner Chronik vom Jahre 1904.

Am 24. September 1904 verschied in dem Krankenhause Bethanien zu Hamburg der ordentliche Professor der Mathematik Hermann Kortum. Auf einer zur Erholung unternommenen Nordlandsfahrt befiel ihn ein schweres schmerzhaftes Leiden, das ihm die Rückkehr unmöglich machen sollte.



Kortum entstammte einer Familie, deren Namen der Verfasser der Jobsiade berühmt gemacht hat. Er wurde nach dem Tode seines Vaters, der Arzt in Düren war, geboren zu Muffendorf, unweit Godesberg, am 29. September 1836. Seine Mutter Josephine, geb. Gossen, eine Frau von ausgezeichneten Geistes- und Charaktereigenschaften, ließ ihm eine vortreffliche Erziehung zuteil werden. Ihre musikalische Ausbildung und Begabung, sowie eine ungewöhnliche Willensstärke ermöglichten es ihr, durch Erteilung von Klavierunterricht zu Köln den beim Tode ihres Mannes drohenden Verlust eines Vermögens abzuwenden, das meist in damals schwer verkäuflichen Grundstücken angelegt war. Dadurch sicherte sie nicht nur sich selbst, sondern auch ihrem Sohne ein sorgenfreies Dasein, bis sie später durch eine Erbschaft in mehr als auskömmliche Vermögensverhältnisse kam. Umgekehrt weihte der Sohn der Mutter — es ist nicht zuviel gesagt — sein ganzes Leben, und das rührende einzigartige Verhältnis zwischen dem unverheiratet gebliebenen Sohn und der früh verwitweten Mutter fand

erst durch den Tod der hochbetagten Frau im Jahre 1899 seinen Abschluß.[1])

Seine Schulbildung empfing H. Kortum auf dem Friedrich-Wilhelms-Gymnasium zu Köln, das er nach bestandener Reifeprüfung mit der Absicht verließ, den Beruf eines Ingenieurs zu ergreifen, wozu Neigung und Begabung ihn hinzogen. Nicht lange jedoch fesselte ihn die hiermit in jener Zeit zunächst verbundene Tätigkeit in einem Bureau — bald wandte er sich dem Studium der Mathematik zu, zunächst in Bonn. Besonderen Einfluß gewannen hier auf ihn Persönlichkeit und Vorlesungen des nur um vier Jahre älteren genialen Mathematikers R. Lipschitz, dem Kortum später als Kollege zur Seite treten sollte und mit dem er sein ganzes Leben lang in engster Freundschaft verbunden blieb. In Göttingen und Berlin erfreute er sich sodann der von Riemann, Dirichlet und Weierstraß ausgehenden Anregungen. Nach bestandener Oberlehrerprüfung übernahm er zunächst die Stelle eines Mathematiklehrers an einem Gymnasium zu Köln und bereitete sich auf seine Promotion vor, die am 24. Juli 1861 zu Bonn stattfand. Bald darauf gab er seine Lehrerstelle auf, um sich an der Bonner Hochschule am 11. Januar 1865 zu habilitieren. Von da an blieb er trotz mehrfacher Lockungen unserer Alma mater treu. Das Universitätsalbum verzeichnet seine Ernennung zum außerordentlichen und ordentlichen Professor unter den Daten des 24. Mai 1869 und 25. Juli 1892.

In einfachen Formen also hat sich dieses Leben abgespielt. Es läßt sich daraus nicht entnehmen, mit einem wie reichen Inhalte es erfüllt gewesen ist.

Öffentlich ist Kortum allerdings nur wenig hervorgetreten. Es ist das vor allem zurückzuführen auf seine besonders in späteren Jahren stark entwickelte kritische Veranlagung, mit der er eine große Bescheidenheit verband. Die von ihm veröffentlichten geometrischen Arbeiten haben Anerkennung gefunden und brauchen eine Vergleichung mit ähnlich Geartetem aus jener Zeit gewiß nicht zu scheuen. Aber wie die Untersuchungen anderer, so maß er auch die eigenen Gedanken mit dem höchsten Maßstab. Daher verschmähte er es, sich ferner an einer Art der Produktion zu beteiligen, die ihm eine wirkliche Förderung seiner Wissenschaft nicht zu bewirken schien.

Außer seiner Inaugural-Dissertation „De proprietatibus curvarum tertii ordinis synthetica methodo deductis“ (Pars prior, Bonnae 1861) ist von ihm nur noch eine größere Arbeit im Druck erschienen, die

1) Worte von L. Heffter, aus dem schönen Nachrufe, den dieser dem Freunde in der Bonner Zeitung (v. 28. Sept. 1904) gewidmet hat. Auch einiges andere entnehmen wir dieser Quelle.

ihm den Steiner-Preis der Berliner Akademie eintrug und Weierstraß zu dem Versuch bewog, ihn für Berlin zu gewinnen: „Über geometrische Aufgaben dritten und vierten Grades“ (Bonn 1869). Eine dritte umfangreiche Arbeit hat sich in seinem Nachlasse gefunden: „Über diejenigen gegenseitigen Lagen ebener kollinearer Syrteme, kollinearer Raumstrahlbüschel und kollinearer Systeme im Raume, bei welchen es sich selbst entsprechende Kegelschnitte resp. Kegel und Flächen zweiter Ordnung gibt.“

Das Manuskript befindet sich jetzt im Besitze des Mathematischen Seminars zu Bonn.

In dem Werke von A. v. Lasaulx über das Erdbeben von Herzogenrath (Bonn 1874) findet sich noch eine kleinere Arbeit Kortums, in der er die Tiefe des Erschütterungsmittelpunktes und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieses Bebens zu bestimmen suchte. Auch der Nachruf auf Rudolf Lipschitz in der Bonner Chronik (1903) stammt aus Kortums Feder.

Kortum war in hohem Maße Autodidakt. Frühzeitig schon wendete er sich zum Studium der klassischen mathematischen Literatur, in der er es zu einer ungewöhnlichen Belesenheit gebracht hat. Mit Vorliebe beschäftigte er sich mit den Schriften von Weierstraß, der ihn auch bei der Herausgabe seiner gesammelten Werke zur Mitwirkung herangezogen hat, und mit denen Dirichlets, wie denn überhaupt in späteren Jahren die Zahlentheorie sein Lieblingsstudium bildete. Ohne Zweifel aber war er der beste Kenner der Arbeiten seines verehrten Freundes R. Lipschitz. Es ist daher sehr zu beklagen, daß ihn über einer eingehenden Würdigung der Leistungen dieses genialen Forschers, die er im Auftrage der Deutschen Mathematiker-Vereinigung begonnen hatte, der Tod hinweggerafft hat. Kein anderer wäre so wie Kortum zu dieser keineswegs leichten Aufgabe befähigt gewesen.

Die erwähnten ebenso gründlichen als ausgedehnten Studien kamen Kortums zahlreichen Schülern zugute. In seinen Vorlesungen, die er unermüdlich immer wieder ganz von neuem ausgearbeitet hat, war er vor allem darauf bedacht, seinen Zuhörern eine sichere Grundlage mathematischen Wissens zu vermitteln. Doch behandelte er in Vorlesungen und besonders in seinem Seminar öfters auch Gegenstände, die an das Verständnis der Studierenden höhere Ansprüche stellten, z. B. die Theorie der quadratischen Formen. Seine Vortragsweise war einfach, klar und fesselnd; sie entbehrte nicht einer gewissen Anmut.

Seine Freunde und Kollegen kannten Kortum als einen Mann von gediegener und vielseitiger Bildung, sie schätzten in ihm einen geraden und vornehmen Charakter, vor dessen durchdringendem Blick nichts

Unechtes bestehen konnte, und zugleich einen Mann von tiefem Gemüt, dessen Herz voller Güte und Wohlwollen war. Sein Sinn für Humor, oft nicht ganz frei von Sarkasmus, der aber nie verletzend wirkte, sein fröhliches und lebhaftes Temperament machten ihn zu einem ungemein angenehmen und liebenswürdigen Gesellschafter. In seinem Urteil über Menschen und Dinge war er eigenartig und unabhängig von herkömmlichen Meinungen, ein Original im besten Sinne des Wortes.

Zu seinem behaglichen Wesen paßte seine gedrungene Gestalt, sein bedeutender, schön geformter, schon früh kahl gewordener Schädel, der weiße kurzgehaltene Bart, ein lachlustiger Mund und helle kluge Augen, mit denen er lebensfroh und mutwillig in die Welt sah.

Wie Lipschitz, war auch Kortum ein leidenschaftlicher Liebhaber und feiner Kenner der Musik, besonders der klassischen. Er selbst spielte in jüngeren Jahren gut Klavier und Orgel und versuchte sich im Komponieren.

Kein Wunder, daß Kortum bei solchen Gaben des Geistes und Herzens den Mittelpunkt eines großen geselligen Kreises bildete, mit dem er seit dem Tode seiner Mutter noch häufiger verkehrte. Allen Mitgliedern dieses Freundeskreises, zu dem zahlreiche jüngere und ältere Kollegen gehörten, wird der treue Mann unvergeßlich bleiben. Seine Schüler und Kollegen aber werden dem pflichttreuen Lehrer und tüchtigen Gelehrten ein dankbares Andenken bewahren.

Mitteilungen und Nachrichten.

Geeignete Mitteilungen wird der Herausgeber stets mit größtem Danke entgegennehmen.

1. Akademien. Gesellschaften. Vereinigungen. Versammlungen.

Mathematische Sektion der Schlesischen Gesellschaft für Vaterländische Kultur. *Sitzung am 5. Dezember 1905.* Nachdem Herr Sturm eine Wiederwahl abgelehnt hatte, wurden zu Sekretären für die Jahre 1906 und 1907 erwählt Herr Töplitz und Herr Kneser. Vorträge hielten sodann Herr Peche über die natürliche Geometrie im Sinne Cesaros; Herr Kneser über den elementaren Aufbau der Proportions- und Ähnlichkeitslehre. — *Sitzung am 23. Januar 1906:* O. Gutsche, Über die moderne Dreiecksgeometrie. — E. Töplitz, Über einen Beweis in C. G. J. Jacobis Abhandlung de determinantibus functionalibus. — G. Landsberg, Über die Singularitäten der pseudosphärischen Flächen.

Berliner Mathematische Gesellschaft. *Sitzung am Mittwoch den 13. Dezember 1905:* Lampe, Über angenäherte Winkelteilungen mit Zirkel und Lineal; Koebe, 1. Herleitung der partiellen Differentialgleichung der Potentialfunktion aus deren Integraleigenschaft; 2. Über eine Einteilung der birationalen Transformationen, durch welche das algebraische Gebilde vom

Range Eins in sich selbst übergeht; Güntsche, Heronische Dreiecke mit einer rationalen Mittellinie. — Die noch ausstehenden Sitzungen im laufenden Gesellschaftsjahr finden ausnahmslos am letzten Mittwoch des Monats statt, also am 31. Januar, 28. Februar, 28. März, 25. April, 30. Mai und 27. Juni 1906.

Mathematische Gesellschaft in Hamburg. Die Gesellschaft beschloß die Herausgabe eines zweiten Nachtrags zu ihrem im Jahre 1890 herausgegebenen „Katalog der auf Hamburger Bibliotheken vorhandenen Literatur aus der reinen und angewandten Mathematik und Physik.“ Der Nachtrag soll die Neuerwerbungen der Bibliotheken vom Jahre 1904 bis 1905 (incl.) enthalten. Die Vortragsthemata der letzten Sitzungen lauten: *9. September:* Oberlehrer Dr. Frank: Über partielle Differentialgleichungen, deren Charakteristiken geodätische Linien auf den Integralflächen sind. — *14. Oktober:* Professor Classen, Assistent am physikalischen Staatslaboratorium: Über die Theorie der Kathoden- und Röntgenstrahlen. — *11. November:* Oberlehrer Dr. Busche: Ein Satz über Teileranzahlen. — Dr. Schwaßmann, Observator an der Sternwarte: Mitteilungen über die Resultate der Hamburgischen Sonnenfinsternis — Expedition nach Souk-Ahras. — *9. Dezember:* Oberlehrer A. Wetzler, Harburg: Darstellung der Potenz einer Potenzreihe. — Professor Dr. Hoppe: Die Kant-Laplace'sche Theorie und die Gasgesetze.

Mathematische Gesellschaft zu Marburg. Im Sommersemester 1905 fanden 5 Sitzungen statt und im ersten Quartal des Wintersemesters 1905/06 4 Sitzungen. Es wurden folgende Vorträge gehalten: Im Sommersemester. — *30. Mai:* Prof. Neumann berichtete über seine Untersuchungen über die beiden Randwertaufgaben der Potentialtheorie. — *20. Juni:* Herr Jordan referierte über die Arbeit von Hermite: Sur la fonction exponentielle. — Am *4. und 18. Juli* setzte Prof. Neumann den Bericht vom 30. Mai fort. — *1. August:* Herr Oettinger referierte über die Arbeiten von Hilbert, Hurwitz und Gordan über die Transzendenz von e und π. — — Im Wintersemester: *31. Oktober:* Prof. Hensel sprach über die arithmetischen Eigenschaften algebraischer und transzendenter Zahlen. — *14. November:* Prof. Hensel setzte diesen Vortrag fort, und Dr. Fueter begann einen Bericht über die einfachsten Arten von Zahlstrahlen, den er am *28. November* beendete. — *12. Dezember:* Dr. Jung sprach über Abelsche Funktionen von mehreren Veränderlichen.

Generalversammlungen und wissenschaftliche Abende (math. Kränzchen) des Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Vereins von Württemberg zu Stuttgart. 1. *8. XI. 03.* B. Wolff: Demonstration zu der Drehmomentengleichung und zu der dynamischnn Grundgleichung. R. Mehmke: Die kinematische Grundlage von Chr. Wieners Tangentenmethode und ihr Verhältnis zu Robervals Tangentenmethode. E. Wölffing: Die sogenannten punktierten Zweige der Kurven. A. Schmidt: Eine Beobachtung am Bodensee. — 2. *16. XI. 03.* R. Mehmke: Die gestaltlichen Verhältnisse einer Fläche in der Nähe eines parabolischen Punktes. — 3. *14. XII. 03.* C. Reuschle: Über bestimmte Integrale, deren Integrand zwischen den Grenzen Unstetigkeitspunkte besitzt. — 4. *18. I. 04.* K. Mack: Physikalische Demonstrationen. R. Mehmke: Konstruktion der Beschleunigung eines Punktes, wenn die Bahn und die Geschwindigkeit ge-

geben sind. — 5. *15. II. 04.* L. Pilgrim: Ausdehnung der Methode des Newtonschen Parallelogramms auf algebraische Flächen. E. Wölffing: Über hebbare Unstetigkeiten. — 6. *28. II. 04.* R. Mehmke: Über die darstellende Geometrie der Räume von 4 und mehr Dimensionen mit Anwendung auf die graphische Mechanik und die graphische Lösung von Systemen numerischer Gleichungen beliebigen Grades. A. v. Brill: Geschichte der Geometrie in den letzten 50 Jahren. K. Kommerell: Ein Analogon zum Taylorschen Lehrsatz. — 7. *21. III. 04.* R. Mehmke: Über die Hamiltonsche Operation ∇. — 8. *16. V. 04.* A. Haas: Demonstration von Apparaten. — 9. *20. VI. 04.* R. Mehmke: Über eine von der „Wiskundig Genootschap“ zu Amsterdam gestellte Aufgabe. — 10. *17. X. 04.* E. Wölffing: Bericht über den Internationalen Mathematikerkongreß zu Heidelberg. K. Mack: Demonstration eines Spiegellineals. — 11. *4. XII. 04.* C. Reuschle: Über Grenzwerte und Grenzfunktionen. A. Schmidt: Über einige seismische Versuche. V. Kommerell: Über eine optische Eigenschaft des Paraboloids. — 12. *19. XII. 04.* K. Mack: Demonstration eines Apparats zur Zersprengung einer Glasplatte durch einseitigen Druck. A. Schmidt: Über das Dopplersche Prinzip und die Verschiebung der Linienspektren. — 13. *16. I. 05.* K. Mack: Sichtbarmachung ultramikroskopischer Teilchen. — 14. *20. II. 05.* R. Mehmke: Über Vektorprodukte. A. Schmidt: Über die magnetische Vermessung des Rieses. — 15. *19. III. 05.* E. Geck: Stammfunktion und bestimmtes Integral. R. Mehmke: Über die Differentiation von Vektorprodukten mit Anwendung auf Krümmung der Flächen. — 16. *22. V. 05.* Lehrplandebatte. — 17. *19. VI. 05.* Schluß der Lehrplandebatte. — 18. *17. 7. 05.* K. Mack: Über Wettertypen. — 19. *16. X. 05.* R. Lang: Über das J. J. Thomsonsche Atommodell. — 20. *12. XI. 05.* F. Junker: Über die Differentialgleichungen der In- und Kovarianten. E. Geck: Über das Parallelenaxiom im Schulunterricht. A. Schmidt: Über die Aberration des Lichtes. — 21. *18. XII. 05.* F. Haag: Über Vielecke, welche den Vielflachen des regulären Kristallsystems vermöge des Dualitätsprinzips entsprechen. R. Mehmke: Über graphische Bestimmug von Bewegungen. — Die Versammlungen 6. und 15. fanden in Nürtingen, die Versammlung 18. in Hohenheim, die übrigen in Stuttgart statt.

Deutsche Physikalische Gesellschaft. *Übersicht der Sitzungen für 1906.* Berlin, Reichstagsufer 7 u. 8, Abends 7½ Uhr. *Januar: Freitag, den 12.* und *26. Februar: Freitag, den 9.* und *23. März: Freitag, den 9.* und *23. Mai: Freitag, den 4.* und *18. Juni: Freitag, den 1., 15.* und *29.* — *Oktober: Freitag, den 19. November: Freitag, den 2., 16.* und *30. Dezember: Freitag, den 14.* — Dienstags und Freitags liegen die neuen Journale von 6 Uhr Abends ab im Bibliothekzimmer aus. — Der jährliche Beitrag — für die Berliner Mitglieder 20 Mk., für die auswärtigen Mitglieder 5 Mk., — wird von dem Rechnungsführer, Herrn Ministerialdirektor a. D. Dr. P. Micke, Berlin W., Kleiststr. 15, angenommen, eventuell auch für einen längeren Zeitraum im voraus. (§ 6 und § 9 der Satzungen). — Den Journalzirkel ordnet der Sekretär. — Dr. Edgar Meyer, Reichstagsufer 8, nimmt die *Anmeldungen zu Vorträgen* entgegen. — Der Vorstand der Deutschen Physikalischen Gesellschaft setzt sich bis zum Mai 1906 wie folgt zusammen: Vorsitzender: M. Planck; Beisitzer: W. v. Bezold, E. Hagen,

P. Drude, H. Rubens, E. Warburg; Rechnungsführer: P. Micke; stellvertretender Rechnungsführer: E. Jahnke; Schriftführer: F. Kurlbaum; stellvertretender Schriftführer: E. Meyer; Revisoren: M. Frhr. v. Seherr-Thoß, O. Krigar-Menzel; Bibliothekar: H. Zahn; stellvertretender Bibliothekar: F. Kiebitz; Redakteure der „Fortschritte der Physik": R. Aßmann, K. Scheel, letzterer zugleich Redakteur der „Verhandlungen" der Gesellschaft; Vorsitzender des wissenschaftlichen Ausschusses: W. Voigt; Mitglieder des wissenschaftlichen Ausschusses: R. Abegg, F. Braun, P. Drude, V. v. Lang, E. Lecher, O. Lummer, F. Richarz, H. Rubens, K. Scheel, O. Wiener.

Versammlung von Lehrern der Mathematik an Schweizerischen Mittelschulen. Die fünfte Jahresversammlung der Lehrer der Mathematik an schweizerischen Mittelschulen fand am 9. Dezember 1905 unter dem Vorsitz von Professor Gubler in Zürich statt. Es wurden folgende wissenschaftlichen Mitteilungen gemacht: Egli, Über den Unterricht der darstellenden Geometrie; Fehr, Über die gegenwärtigen Bestrebungen im geometrischen Elementarunterricht; Otti, Über die Vorteile, welche im Unterricht der Mittelschulen der Gebrauch der dezimalen Winkelteilung mit vierstelligen Logarithmen darbietet. — Zum Vorsitzenden des nächsten Jahres wurde Professor Fehr-Genf gewählt. Die nächste Jahresversammlung soll im Oktober 1906 in Basel stattfinden.

---

2. Preisaufgaben und gekrönte Preisschriften.

Preisaufgaben der Akademie der Wissenschaften zu Paris. In ihrer öffentlichen Sitzung vom 18. Dezember 1905 hat die Pariser Akademie der Wissenschaften folgende Preise in dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften ausgeschrieben:

1906: Prix Francoeur (1000 Fr.): Für den Urheber von Arbeiten oder Entdeckungen, die für den Fortschritt der reinen oder angewandten mathematischen Wissenschaften nützlich sind. — Prix Montyon (700 Fr.): Für Erfindung oder Vervollkommnung von Instrumenten, die dem Fortschritt des Ackerbaus, der mechanischen Künste oder der exakten Wissenschaften förderlich sind. — Prix Poncelet: Für ein Werk über reine Mathematik. — Prix Lalande (540 Fr.): Für die wertvollste Beobachtung, Abhandlung oder Arbeit in der Astronomie. — Prix Valz (460 Fr.): Für die interessanteste astronomische Beobachtung des Jahres. — Prix Jansen: Eine Goldmedaille für einen wichtigen Fortschritt in der physischen Astronomie. — Prix Saintour (3000 Fr.): Wird verteilt im Interesse der Wissenschaft.

1907: Prix Bordin (3000 Fr.): *Reconnaître d'une manière générale si les coordonnées des points d'une surface algébrique peuvent s'exprimer en fonctions abéliennes de deux paramètres, de telle sorte qu'à tout point de la surface corresponde plus d'un système de valeurs des paramètres (aux périodes près). Étudier en particulier le cas où l'équation de la surface serait de la forme* $z^2 = f(x, y)$, *f étant un polynome, et donner des exemples explicites de telles surfaces.* — Prix Vaillant (4000 Fr.): *Perfectionner en un point important le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées, c'est-à-dire le problème de l'intégration de l'équation*

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = f(x, y)$$

avec les conditions que la fonction u et sa dérivée suivant la normale au contour de la plaque soient nulles. Examiner plus spécialement le cas d'un contour rectangulaire. — Prix G. de Pontécoulant (700 Fr.): Für Untersuchungen über die Himmelsmechanik. — Prix Binoux (2000 Fr.): Für Arbeiten über die Geschichte der exakten Wissenschaften. — Prix Petit d'Ormoy (10000 Fr.): Für Arbeiten aus dem Gebiet der reinen oder angewandten Mathematik. — Prix Leconte (50000 Fr.): Für den Urheber neuer und wichtiger Entdeckungen in der Mathematik, der Physik, der Chemie, den Naturwissenschaften und den medizinischen Wissenschaften, sowie den Urhebern neuer Anwendungen dieser Wissenschaften.

1908: Grand Prix des sciences mathématiques (3000 Fr.): *Réaliser un progrès important dans l'étude de la déformation de la surface générale du second degré.* — Prix Fourneyron (1000 Fr.): *Etude théorique ou expérimentale des turbines à vapeur.* — Prix Damoiseau (2000 Fr.): *Théorie de la planète basée sur toutes les observations connues.*

1909: Prix Vaillant (4000 Fr.): *Perfectionner, en un point important, l'application des principes de la dynamique des fluides à la théorie de l'hélice.*

1910: Prix Pierre Guzman (100000 Fr.): Für ein Mittel, sich mit einem andern Stern als dem Planeten Mars in Verkehr zu setzen.

Preisverteilung der Akademie der Wissenschaften zu Paris. In ihrer Sitzung am 18. Dezember 1905 hat die Pariser Akademie folgende Preise im Gebiete der mathematischen Wissenschaften verteilt:

Herrn Stouff für die Gesamtheit seiner Arbeiten den Prix Francoeur. — Herrn Mesnager für seine theoretischen und experimentellen Arbeiten über die Elastizität und die Widerstandsfähigkeit der Materialien den Prix Montyon. — Herrn Lallemand für die Gesamtheit seiner Arbeiten über die Figur der Erde und die Verbesserungen an den geodätischen Instrumenten den Prix Poncelet. — Herrn Pickering für seine Arbeiten, insbesondere die Entdeckung zweier neuer Satelliten des Saturn, den Prix Lalande. — Herrn Giacobini für seine Entdeckung von neun Kometen seit 1896 den Prix Valz. — Herrn Kapteyn für seine Untersuchungen zur Himmelsmechanik den Prix Pontécoulant. — Herrn Fayet den Prix Damoiseau. — Herrn Fabry einen Preis von 1000 Francs. — Herrn Borel für die Gesamtheit seiner Arbeiten den Prix Petit d'Ormoy. — Den Prix Binoux den Arbeiten von Paul Tannery.

Der Lagrange-Preis der Belgischen Akademie der Wissenschaften ist dem ständigen Mitarbeiter am Geodätischen Institut zu Potsdam, Professor Dr. Hecker, für seine Untersuchung über „Schwerkraftbestimmungen auf dem atlantischen Ozean im Jahre 1901“ verliehen worden.

3. Hochschulnachrichten.

Universität Halle. In dem preußischen Etat 1906 sind unter den einmaligen Ausgaben für die Universität Halle vorgesehen: 4000 Mark zur Ergänzung der Bibliothek und Modellsammlung des Mathematischen Seminars.

Promotionen in Mathematik an der Faculté des Sciences zu Paris im Jahre 1905. Zoretti, Sur les fonctions analytiques uniformes

qui possédent un ensemble parfait discontinu de points singuliers. Stoenesco, Sur la propagation et l'extinction des ondes planes dans un milieu homogène et translucide, pourvu d'un plan de symétrie. Pompéiu, Sur la continuité des fonctions de variables complexes. Bernard de Montessus de Ballore, Sur les fractions continues algébriques. Husson, Recherche des intégrales algébriques dans le mouvement d'un solide pesant autour d'un point fixe. Reveille, Etude synthétique et analytique du déplacement d'un système qui reste semblable à lui-même. Monteil, Contribution à l'étude des courants de convection calorifique.

4. Personalnachrichten.

Ernennungen, Auszeichnungen usw.:

Dr. E. Aschkinass, Privatdozent der Physik an der Universität Berlin, wurde zum Professor ernannt.

Professor S. J. Barnet an der Stanford Universität wurde zum Professor der Physik an der Tulane Universität ernannt.

Professor Dr. O. Blumenthal an der Technischen Hochschule zu Aachen wurde zum etatsmäßigen Professor der Mathematik daselbst ernannt.

J. E. Bonegright wurde zum Professor der Mathematik an der Universität zu Ottawa ernannt.

Dr. H. Brunn, Privatdozent an der Universität München, wurde zum Honorarprofessor daselbst ernannt.

Dr. H. A. Bumstead in New Haven wurde zum Professor der Physik an der Shefffeld Scientific School daselbst ernannt.

Professor J. Rius Castizo in Saragossa wurde zum Professor der theoretischen Mechanik an der Universität Madrid ernannt.

Professor Dr. Dieterici an der Technischen Hochschule in Hannover hat den Ruf als o. Professor der Physik an der Universität Rostock angenommen.

Dr. F. W. Dyson, erster Assistent am Royal Observatory zu Greenwich, wurde zum Royal Astronomer für Schottland und zum Professor der Astronomie an der Universität Edinburg ernannt.

Dr. A. S. Gale in New Haven wurde zum Professor der Mathematik an der Universität in Rochester ernannt.

Professor Dr. Hecker vom Geodätischen Institut wurde von der belgischen Akademie der Wissenschaften der Lagrange-Preis zuerkannt.

Professor W. J. Hussey an der Lick-Sternwarte wurde zum Professor der Astronomie an der Michigan-Universität und Direktor des Detroit-Observatoriums in Ann-Arbor ernannt.

Geheimrat Professor Dr. F. Klein in Göttingen wurde von der Technischen Hochschule zu München zum Ehrendoktor der technischen Wissenschaften ernannt.

Dr. M. Mason wurde zum a. o. Professor an der Sheffield Scientific School ernannt.

Professor Dr. H. B. Newson an der Kansas Universität wurde zum o. Professor der Mathematik daselbst ernannt.

W. M. Persons, Instruktor der Mathematik an der Universität von Wisconsin, wurde zum a. o. Professor der Statistik am Dartmouth College ernannt.

Professor C. J. de La Vallée-Poussin an der Universität Löwen wurde der 10jährige belgische Preis in der Mathematik zuerkannt.

Professor Dr. Zenneck, Dozent der Physik an der Technischen Hochschule in Danzig, wurde zum o. Professor der Physik an der Technischen Hochschule in Braunschweig ernannt.

Dr. E. Zermelo, Privatdozent an der Universität Göttingen, wurde zum Professor ernannt.

Habilitation:

Oberlehrer Dr. R. Fuchs hat sich an der Technischen Hochschule zu Charlottenburg für reine Mathematik habilitiert.

Gestorben:

Professor Dr. Ch. J. Joly an der Universität Dublin, Königlicher Astronom für Irland, ist am 4. Januar 1906 im Alter von 41 Jahren gestorben.

---

5. Vermischtes.

Aufruf zur Errichtung eines Denkmals für Guido Hauck. — Der am 25. Januar 1905 verstorbene Geheime Regierungs-Rat Professor Dr. Guido Hauck hat sich in seiner über 27 Jahre umfassenden Berliner Lehrtätigkeit an der ehemaligen Bau-Akademie und an der Technischen Hochschule sowohl um seine spezielle Wissenschaft, die darstellende Geometrie, als auch um die Technische Hochschule so hohe Verdienste erworben, daß gleich nach seinem Tode der Wunsch laut wurde, ihm in den Räumen der Technischen Hochschule, deren Rektor er dreimal gewesen ist, ein Denkmal zu errichten.

Nachdem Rektor und Senat diesen gewiß im Sinne der zahlreichen Freunde und Schüler des Verewigten gefaßten Plan gebilligt haben, ist aus den Unterzeichneten ein Ausschuß gebildet, der den Plan zur Ausführung bringen will.

In der Überzeugung, daß das Andenken an den pflichttreuen, verehrten und geliebten Lehrer in den Herzen seiner vielen Schüler lebendig ist, ergeht an diese und an die sonstigen Freunde und Verehrer des Verewigten hiermit die herzliche Bitte, durch Spendung eines Beitrages für das zu errichtende Denkmal ihren Gefühlen der Verehrung für den teuren Entschlafenen Ausdruck zu geben und dazu mitzuwirken, daß sein Bild in künstlerisch würdiger Form der Nachwelt erhalten bleibt.

Beiträge bitten wir an den expedierenden Sekretär und Kalkulator Herrn Kiesel zu senden; derselbe wird bereit sein, sowohl Postanweisungen wie Zahlungen, in dem Prüfungsamte der Technischen Hochschule, wochentags von 10 bis 2 Uhr, in Empfang zu nehmen.

Berlin, im Dezember 1905.

Akademischer Architekten-Verein. Cranz, Professor, Dr. Dziobek, Professor, Dr. Ernst & Sohn, Verlagsbuchhandlung, Berlin. Flamm, Geheimer Regierungsrat, Professor, Rektor der Technischen Hochschule zu Berlin. Goering, Geheimer Regierungsrat, Professor. Grunmach, Professor, Dr. Gutzmer, Professor, Dr., Universität Halle a. S. Haentzschel, Professor, Dr. K. Hartmann, Geheimer Regierungsrat, Professor. Hertzer, Geheimer Regierungsrat, Professor, Dr. Hessenberg, Professor, Dr. Hettner, Geheimer Regierungsrat, Professor.

Dr. Hinckeldeyn, Ober-Baudirektor, I. Vorsitzender des Architekten-Vereins zu Berlin. Hossfeld, Geheimer Ober-Baurat. Hütte, Akademischer Verein. Jolles, Professor, Dr. Kayser, Baurat, Vorsitzender der Architekten-Vereinigung. Knoblauch, Professor, Dr., Vorsitzender der Mathematiker-Gesellschaft. Koch, Geheimer Baurat, Professor. Krigar-Menzel, Professor, Dr. Kühn, Geheimer Baurat, Professor. Kurlbaum, Professor, Dr. Lampe, Geheimer Regierungsrat, Professor. Dr. Liebermann, Geheimer Regierungsrat, Professor, Dr. von Linde, Professor, Dr., I. Vorsitzender des Vereins deutscher Ingenieure. Mathematischer Verein der Universität Berlin. Miethe, Geheimer Regierungsrat, Professor, Dr., Prorektor der Technischen Hochschule zu Berlin. Mönnich, Regierungs- und Baurat. Motiv, Akademischer Verein. Müller, Geheimer Oberbaurat und vortragender Rat im Ministerium der öffentlichen Arbeiten. Müller-Breslau, Geheimer Regierungsrat, Professor, Dr.-Ing. Paasche, Geheimer Regierungsrat, Professor, Dr. Parisius, Pastor. Planck, Professor, Dr. Post, Geheimer Ober-Regierungsrat, Professor, Dr. Riedler, Geheimer Regierungsrat, Professor, Dr., Dr.-Ing. Rietschel, Geheimer Regierungsrat, Professor. Rothe, Dr., Privatdozent. Rubens, Professor, Dr. Saal, Geheimer Ober-Baurat. Sarrazin, Geheimer Ober-Baurat, Dr.-Ing. Schmalz, Regierungs- und Baurat, Professor. Schwarz, Geheimer Regierungsrat, Professor, Dr. Slaby, Geheimer Regierungsrat, Professor, Dr. Siebeck, Dr., Laupps Verlagsbuchhandlung, Tübingen. Stäckel, Professor, Dr., Hannover. Steinitz, Professor, Dr. Thür, Wirklicher Geheimer Ober-Baurat, Dr., vortragender Rat im Ministerium der öffentlichen Arbeiten. Uber, Geheimer Baurat und vortragender Rat im Ministerium der öffentlichen Arbeiten. Wichert, Ober-Baudirektor, Abteilungsdirigent im Ministerium der öffentlichen Arbeiten. Witt, Geheimer Regierungsrat, Professor, Dr. Wolff, Geheimer Baurat, Professor.

Einweihungsfeier des physikalischen Instituts der Universität Göttingen. Auf dem großen Terrain in der Bunsenstraße erhebt sich in rotem Sandsteinbau das umfangreiche Hauptinstitut, welches mit einem Kostenaufwande von rund 400 000 Mark errichtet, die Abteilung für Experimentalphysik (Direktor: Geh. Rat Prof. Dr. Rieke) und die Abteilung für theoretische Physik (Direktor: Geh. Rat Prof. Dr. Voigt) beherbergt. Dieses Institut ist seit Beginn des Sommersemesters in Benutzung. Daneben in besonderem Bau hat die seit 10 Jahren bestehende Abteilung für angewandte Elektrizitätslehre ihre Wirkungsstätte. Diese Abteilung und das im alten physikalischen Institute Prinzenstraße 21 nunmehr würdig untergebrachte Institut für angewandte Mathematik und Mechanik sind die reifen Früchte der Bestrebungen, an der Göttinger Universität auch die angewandten Wissenschaften kräftig zur Geltung zu bringen, Bestrebungen, die unter Führung von Herrn Geh. Rat Prof. Dr. Klein und Herrn Geh. Rat Dr. Böttinger seit Jahren von der Göttinger Vereinigung zur Förderung der angewandten Physik und Mathematik mit stets wachsendem Erfolge betätigt werden. Der Neubau der Abteilung für angewandte Elektrizitätslehre wurde mit einem Kostenaufwande von 75 000 Mark vom Staate errichtet. Die innere Einrichtung mit 25 000 Mark ist ganz von der Göttinger Vereinigung beschafft worden. — Viele auswärtige Gäste waren der Einladung zu den Einweihungsfeierlichkeiten am 9. Dezember 1905 gefolgt.

Der Festakt wurde in Vertretung des Herrn Kultusministers durch Herrn Geh. Oberregierungsrat Kurator Dr. Höpfner eröffnet, der die Institute ihrer Bestimmung übergab und verkündete, daß von heute ab die Abteilung für angewandte Elektrizitätslehre als dritte Abteilung des physikalischen Instituts selbständig einem Institutsdirektor unterstehen solle, und daß Prof. Dr. Simon zum Institutsdirektor ernannt sei. Er verkündete ferner, daß der Herr Kultusminister dem neuen Institute eine Marmorbüste des Vor-

sitzenden der Göttinger Vereinignng, Dr. Böttinger, zu stiften beschlossen habe, daß Herrn Prof. v. Linde (München) die goldene Medaille für Wissenschaft, Herrn Baurat Rieppel (Nürnberg) der Rote Adlerorden 3. Klasse, Herrn Geh. Rat Prof. Dr. Riecke der Kronenorden 2. Klasse, Herrn Geh. Rat Prof. Dr. Voigt das Komturkreuz des Ordens Heinrichs des Löwen, und Herrn Prof. Simon der Kronenorden 4. Klasse verliehen sei.

Herr Geh. Rat Riecke hielt alsdann die Festrede. Nach herzlichem Dank an die Staatsregierung gab er eine historische Übersicht über die Entwicklung der Göttinger Physik, von der Zeit Lichtenbergs, in der es physikalische Institute noch nicht gab, sondern der Professor sich aus eigenen Mitteln ein Demonstrationskabinett halten mußte, bis auf den heutigen Tag und verweilte bei den großen Namen, die der Göttinger Physik ihre heutige Stellung gegeben haben, insbesondere W. Weber. Er zeigte, wie dann allmählig das physikalische Institut in Göttingen einen Sproß nach dem anderen abzweigte, zuerst die Abteilung für theoretische Physik (unter Voigt), dann das Institut für physikalische Chemie (unter Nernst, Dolezalek), das Institut für technische Physik (unter Mollier, Meyer, Lorenz, Prandtl), das geophysikalische Institut (unter Wiechert), das Institut für angewandte Elektrizitätslehre (unter des Coudres, Simon). Und dann gab er im Hinweis auf die große moderne Entwicklung der Physik einen Ausblick in die Zukunft und entwickelte die Gesichtspunkte, nach denen das neue Institut für die zukünftige Arbeit zweckmäßig eingerichtet worden sei. Ähnliche Darlegungen über die speziellen Absichten, die bei der Einrichtung ihrer Institute obgewaltet hätten, gaben Geh. Rat Voigt und Prof. Simon und luden gleichfalls zur Besichtigung ihrer Institute ein. Der letztere dankte namentlich auch der Göttinger Vereinigung, durch deren tatkräftige Unterstützung das Institut für angewandte Elektrizitätslehre zustande gekommen sei. Dann brachte der Prorektor der Universität, Herr Prof. Dr. Althaus die Glückwünsche der Universität, Herr Geh. Rat Prof. Dr. Lehmann als Dekan die Glückwünsche der philosophischen Fakultät dar. Der letztere verkündete, daß die Fakultät dem Tage zu Ehren sechs Ehrendoktoren zu ernennen beschlossen habe, die er feierlich promovierte. 1. Wirkl. Geh. Oberregierungsrat Dr. Naumann, 2. Baurat Rieppel, Nürnberg, 3. Prof. Zeemann, Amsterdam, der sich auch unter den Festgästen befand, dann 4. Prof. Dr. Henry Becquerel, Paris, 5. Prof. Heaviside Newton, Abbot (England) und 6. Prof. J. J. Thomson, Cambridge.

Mit der Überreichung und Verlesung einer künstlerisch ausgestatteten Dankadresse der Göttinger Vereinigung an Exzellenz Althoff durch die beiden Vorsitzenden der Göttinger Vereinigung, Herrn Geh. Rat Klein und Geh. Rat Böttinger, fand die offizielle Feier ihr Ende und die Führung durch die Institute begann.

Eine genaue Beschreibung des neuen physikalischen Instituts wird in einer besonderen Festschrift enthalten sein, die demnächst bei B. G. Teubner in Leipzig erscheint.

Unterrichtsausschuß des Vereins Deutscher Ingenieure. Der Verein Deutscher Ingenieure, der bereits im vergangenen Jahre eine Besprechung über Fragen des exaktwissenschaftlichen Unterrichts an Hochschulen und höheren Lehranstalten veranstaltet hatte (vgl. das im Namen des Vereins

von Herrn von Borries auf der Breslauer Naturforscherversammlung erstattete Referat), hat nunmehr im Anschluß an das Vorgehen der Naturforschergesellschaft einen eigenen Unterrichtsausschuß eingesetzt, dem unter dem Präsidium des ersten Vorsitzenden des Vereins, Prof. Dr. v. Linde (München), der Direktor des Vereins, Baurat Dr. Peters, aus den Kreisen der Industriellen die Herren Herzberg (Berlin), Rieppel (Nürnberg), Weismüller (Frankfurt a. M.), von Professoren an Technischen Hochschulen die Herren v. Bach (Stuttgart), v. Ernst (Stuttgart), Fricke (Braunschweig), Sommerfeld (Aachen), Stäckel (Hannover), von Lehrern an höheren Mittelschulen die Herren Hintzmann (Elberfeld) und Pietzker (Nordhausen) angehören.

Ferienkursus an der Universität Göttingen. In der Zeit vom 19. April bis 1. Mai 1906 wird an der Universität Göttingen für *Lehrer höherer Schulen* ein *Ferienkursus* abgehalten werden. Geheimrat Klein und Professor Behrendsen werden die von der Unterrichtskommission der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte empfohlenen *mathematischen* und *physikalischen Lehrpläne* einer eingehenderen Erörterung unterziehen. Außerdem werden den Teilnehmern noch folgende Vorträge bezw. Demonstrationen geboten: Prof. Behrendsen, Behandlung der Polarisation des Lichtes auf höheren Schulen; Prof. Prandtl, Vorführungen aus dem Gebiete der Festigkeitslehre und Hydraulik; Prof. Runge, Konstruktion auf der Kugelfläche, mit Hilfe der stereographischen Projektion; Prof. Simon, a) Wechselstromvorgänge, b) graphische Methoden der Elektrotechnik; Prof. Voigt, Neuere Probleme der Spektroskopie und die Mittel zu ihrer Lösung; Prof. Wagner, Die geographisch wichtigsten Kartenprojektionen und ihre Fehlergrenzen.

Gedächtnistafel für Ernst Abbe. In Eisenach ist an dem Geburtshause des vor einem Jahre in Jena verstorbenen Leiters der optischen Werkstätte von Karl Zeiß und Professors der Physik und Mathematik an der Universität zu Jena, Ernst Abbe, eine Gedenktafel angebracht worden.

Grabdenkmal für Karl Weierstraß. In der Sitzung der Berliner Mathematischen Gesellschaft am 29. November 1905 teilte der Vorsitzende, Professor Dr. Knoblauch, mit, daß beabsichtigt sei, aus freiwilligen Beiträgen ein Grabdenkmal für Karl Weierstraß zu errichten. Gründe, die dies bisher verhindert haben, lägen nicht mehr vor, und die Aufstellung des Grabmals solle deshalb im nächsten Frühjahr erfolgen. Die Gesellschaft beschloß, diese Mitteilung in ihren Sitzungsberichten zu veröffentlichen, um dadurch Schülern und Freunden von Weierstraß Gelegenheit zu geben, sich durch einen Beitrag an der Errichtung des Grabdenkmals zu beteiligen. Ein besonderer Aufruf soll nicht erlassen werden. Beiträge werden bis zum 15. Februar 1906 an den Vorsitzenden J. Knoblauch (Berlin W., Karlsbad 12) erbeten, der auch jede Auskunft in dieser Angelegenheit gern erteilen wird.

Literarisches.

1. Notizen und Besprechungen.

Erwiderung.

Im letzten Hefte dieser Berichte gibt Herr Dehn seiner Rezension, aus der ein Gesamturteil über meine „abstrakte Geometrie“ nicht hervorging, einen Zusatz, der mit dem Worte „Somit“ beginnt. Herr Dehn glaubt also noch immer, obwohl er von „verschiedenen Seiten“ das Gegenteil gehört hatte, es könne aus seiner Aufzählung einiger z. T. unwesentlicher Einzelheiten ein Gesamturteil ohne weitere Begründung gefolgert werden. Er behauptet ferner, wiederum ohne Beweis, daß mein Buch gegenüber denen von Pasch, Hilbert, Stolz und Gmeiner, nichts einigermaßen Wertvolles bringt. Demgegenüber läßt sich zeigen, daß nach dem z. Z. herrschenden Urteil und Geschmack in mathematischen Dingen in meinem Buche Folgendes, um nur Hauptsachen zu nennen, als neu und wertvoll anzusehen ist: 1) die Systematik, die ich den Grundlagen, insbesondere denen der Arithmetik gebe, 2) die Grundlegung der planaren und überplanaren Anordnung, 3) der Grundsatz der relativen Dichte, 4) die Begründung der hyperbolischen Geometrie ohne metrische Grundsätze, 5) die Auffassung von Verwandtschafts-Systemen als Zahlensysteme, welche früher nur als Gruppen angesehen wurden (z. B. die Vektorenrechnung, ferner die neue Wurfrechnung mit gebundenen Würfen), 6) die einfache Darstellung der euklidischen und nicht-euklidischen Bewegungen als Biquaternionen, 7) die ohne Meßbarkeit und Stetigkeit gegebene Definition der Polyeder-Gleichheit, 8) der ohne Meßbarkeit und Stetigkeit bewiesene Satz von der Gleichheit zweier Tetraeder gleicher Grundfläche und Höhe.

Diese Resultate finden sich weder in den angeführten Büchern, noch überhaupt in der mathematischen Literatur. Sie sind in dem oben angegebenen Sinne als wertvoll zu bezeichnen. Denn (ad 1) bei dem z. Z. herrschenden Interesse für grundlegende Probleme muß eine Systematik, die in gleicher Weise die Arithmetik, die Euklidische Geometrie und die Nicht-Euklidischen Geometrien umspannt, von Wert und Bedeutung sein. Die Grundlegung der planaren Ordnung (ad 2) ist von Wert, da sich nur hierauf eine strenge Definition eines zweifachen Kontinuum[1]) aufbauen läßt. Der Grundsatz der relativen Dichte (ad 3) ist von Wert, denn mit ihm läßt sich die projektive Geometrie begründen, und es galt als ein Fortschritt, als Hilbert in der Begründung der projektiven Geometrie die Dedekindsche Stetigkeit durch die weniger enthaltende Meßbarkeit ersetzte; der Grundsatz der relativen Dichte fordert noch weniger als die Meßbarkeit und ist zugleich der am wenigsten fordernde Grundsatz, der zur Begründung der projektiven Geometrie hinreicht. (ad 4) Die Begründung der hyperbolischen Geometrie ohne metrische Grundsätze bezeichnet Herr Dehn in seiner Rezension selbst als ein bemerkenswertes Resultat. (ad 5) Bei der großen Bedeutung des Gruppenbegriffs in der Mathematik ist es natürlich

1) Vgl. hiergegen z. B. F. Klein (Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, Leipzig 1902 S. 173), der diesen komplizierten Begriff als Grundbegriff annehmen muß.

von Wert zu sehen, daß verschiedenen Systemen, in denen man bisher nur die Gruppen-Eigenschaft bemerkt hatte, die mehr enthaltenden Zahlensystem-Eigenschaften zukommen. (ad 6) Die Riemannsche Darstellung der Drehungen einer Kugel durch linear gebrochene Substitutionen ist in den verschiedensten Disziplinen grundlegend geworden; aus diesem und anderen Gründen kann die Verallgemeinerung derselben auf beliebige Bewegungen und auf nicht-euklidische Räume unmöglich als wertlos angesehen werden. (ad 7 und 8) Hier genügt es auf die hierauf gerichteten Wünsche von Gauß und Hilbert hinzuweisen.[1])

Greifswald, Januar 1906. VAHLEN.

J. Thomae, Grundriß einer analytischen Geometrie der Ebene. [X u. 184 S.] 8. Leipzig 1906, B. G. Teubner.

Die ausgezeichneten Salmon-Fiedlerschen Bücher über alle Teile der Geometrie bieten eine solche Überfülle des Stoffes, daß für den Lernenden eine Scheidung dessen, was unbedingt nötig und was Spezialuntersuchung ist, schwer wird. Aus diesem Grund hat der Verfasser seinen Zuhörern bisher ein Skelett in die Hand gegeben, mit dem sie das in der Vorlesung Vorgetragene leicht repetieren und etwa Unverstandenes leicht ergänzen könnten, und das eben im allgemeinen nur das Nötige enthielt. Der Grundriß, der jetzt der Öffentlichkeit übergeben wird, ist im wesentlichen jenes Skelett, das bei der Neubearbeitung einige Erweiterungen erfahren hat. Er umfaßt die analytische Geometrie des Punktes, der Geraden, der Kurven und Büschel zweiter Ordnung und legt Gewicht darauf, die wichtigsten Sätze der projektiven Geometrie auf analytischem Wege zu erbringen, ohne die metrischen Beziehungen zu vernachlässigen. Hierdurch gedenkt der Verfasser das Verständnis der projektiven Geometrie zu erleichtern, deren Methoden nach seiner Meinung mit denen der analytischen Hand in Hand gehen müssen.

Die Entstehung des Büchleins aus einem Skelett macht es selbstverständlich, daß es eine Vorlesung nicht überflüssig machen will, daß es vielmehr den Lernenden beim Hören einer Vorlesung unterstützen und ihm die Anlegung eines Heftes erleichtern will. Besonders Begabte werden auch mit ihm allein sich die Fundamentalsätze der Geometrie der Ebene zu eigen machen können.

Jena. J. THOMAE.

Arthur Gordon Webster (Clark University, Worcester, Massachusetts), **The Dynamics of particles and of rigid, elastic and fluid bodies being lectures on mathematical physics.** [XI u. 588 S.] B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern, Band XI. 8⁰. Leipzig 1904, B. G. Teubner.

Obwohl der klassische Grundbestand der Mechanik noch immer als unerschüttert gelten darf, befindet sich diese Wissenschaft fortwährend in einer sehr lebhaften Entwicklung, durch welche die Züge ihrer Gesamterscheinung immer wieder verändert werden. Es ist daher mit Freuden zu begrüßen, wenn die — allerdings große — Anzahl von Lehrbüchern und Vorlesungen über Mechanik, welche bereits existieren und zum Teil Vortreffliches bieten, durch ein neues Werk vermehrt wird, welches, wie das vorliegende, in kräftiger Eigenart ein nicht zu breit ausgeführtes aber voll-

1) Mit der obigen Darlegung erklärt der Herausgeber die Diskussion im redaktionellen Teile des Jahresberichts für abgeschlossen.

ständiges Bild der modernen Mechanik entwirft und so auch dem Studierenden mit den Grundlehren der Wissenschaft zugleich die neuesten Anschauungen übermittelt.

Es handelt sich hier nicht nur um die zahlreichen Lösungen einzelner neuer Probleme, welche, durch die Bedürfnisse der Wissenschaft oder der Technik gefordert, den Tatsachenbestand der Mechanik fortwährend bereichern, die Tragweite ihrer Methoden erproben und in einem didaktischen Werke die Darstellung beleben; es sind vor allem Fragen prinzipieller Natur, welche, nachdem sie seit geraumer Zeit den Gegenstand tiefsinniger Untersuchungen gebildet haben, auch in einem einführenden Werke nicht mehr unberücksichtigt bleiben dürfen. Diese Untersuchungen sind nicht dem Schoße der reinen Bewegungslehre entsprungen: sie sind vielmehr durch die Entwickelung der gesamten physikalischen Anschauungen gezeitigt worden. Daher ist es für ein Lehrbuch der Mechanik eine gute Empfehlung, wenn es die Bezeichnung „being lectures of mathematical physics“ nicht nur auf dem Titel trägt, sondern wirklich rechtfertigt, wie das Buch von Webster. Wir sind nicht mehr unbedingt geneigt, die mechanistische Auffassung der Natur für die einzig mögliche zu halten; aber so lange die Mechanik Anspruch darauf erhebt, *eine* unter den möglichen Formen der Naturbeschreibung zu sein, muß sie den Fortschritten der Naturforschung sich anpassen. Aus diesem Gedanken sind die fundamentalen Arbeiten von Helmholtz und Hertz und was sich daran anschließt entstanden. Mit dem Bedürfnis der Anpassung an das moderne physikalische Denken stehen auch gewisse, mehr formale Neuerungen in Zusammenhang, im besonderen die Einführung der Vektorenrechnung, die Entwickelung der anschaulichen Methoden, welche zum Teil auf Poinsot zurückgehen, mit den Begriffen des Impulses, der Bewegungsschraube usw. arbeiten und eine weitgehende Beziehung zwischen Mechanik und Liniengeometrie geschaffen haben; ferner die Heranziehung des mehrdimensionalen Raumes, welche aus der Dynamik der Punktsysteme ein so interessantes Analogon zu der Dynamik des einzelnen Punktes gemacht hat.

Alle diese Dinge finden in dem Werke von Webster volle Berücksichtigung. Untersuchungen, welche ein rein mathematisches Interesse darbieten, würden das Buch zu stark belastet und seinen Charakter als Lehrbuch der physikalischen Mechanik zerstört haben. Die Stellen, an welchen derartige Untersuchungen einsetzen müssen, sind aber meist bezeichnet und mit den zur Ergänzung nötigen Literaturangaben versehen. Wie sehr auch hierbei der Verfasser bestrebt war, die neuesten Ergebnisse zu berücksichtigen, möge man etwa daraus entnehmen, daß bei der Erwähnung des Dirichletschen Prinzips bereits die Arbeit zitiert wird, in welcher Hilbert neuerdings den Riemannschen Beweis modifiziert und zu einem strengen gemacht hat. Um das Buch erfolgreich zu studieren, muß der Leser mit der höheren Mathematik wohl vertraut sein; doch gehen die Anforderungen nicht über die Kenntnisse hinaus, welche der Studierende in einer guten Universitätsvorlesung über Differential- und Integralrechnung erwerben kann. Einige zum Verständnis erforderliche spezielle mathematische Gegenstände werden in fünf ergänzenden Zusätzen dargelegt; anderes, wie z. B. die Grundlehren der Variationsrechnung, ist in den Text eingeflochten. —

Was die Anordnung des vorgetragenen Stoffes betrifft, so erscheint mir vor allem ein Punkt bemerkenswert zu sein. Es ist eine schwierige und

wichtige Frage, welche Stelle in einem Lehrbuch der gesamten Mechanik den allgemeinen Prinzipien anzuweisen sei; sie an den Anfang zu setzen, verbietet sich bei einem einführenden Werke von selbst, sie zu trennen und an verschiedenen Stellen zu behandeln, schadet der Einsicht in den gegenseitigen Zusammenhang und die verschiedenen Geltungsbereiche der Prinzipien; dem Gegenstande ein Schlußkapitel einzuräumen, empfiehlt sich in mancher Beziehung, verlangt aber von dem Leser, daß er den durchgearbeiteten Stoff nachträglich mit dem Geiste der allgemeinen Prinzipien durchdringt, was durch Heranziehung der Resultate vorhergehender Abschnitte nur unvollständig erreicht wird. Diese Schwierigkeit hat der Verfasser durch eine sehr glückliche Gruppierung überwunden: Nach zwei einleitenden elementaren Kapiteln, in denen die Grundbegriffe der Kinematik, der Vektorenrechnung und der Dynamik des materiellen Punktes auseinandergesetzt und die wichtigsten Bewegungsformen eines solchen (Zentralbewegung, harmonische Bewegung, Pendelbewegung) studiert werden, folgen sofort drei Kapitel, welche den Leser mit den großen mechanischen Prinzipien bekannt machen und, in fortschreitender Vertiefung, bis an die Schwelle der Hertzschen Mechanik führen. Das erste von diesen enthält das Prinzip der virtuellen Verrückungen, das D'Alembertsche Prinzip, das Gesetz von der Erhaltung der Energie, den Impulsbegriff, die Flächensätze, in dem nächsten werden die verschiedenen Formen des Prinzips der kleinsten Wirkung abgehandelt, die Lagrangeschen und Hamiltonschen Bewegungsgleichungen in ganz allgemeiner Weise aufgestellt. Das letzte Kapitel der Gruppe ist jenen höchst merkwürdigen und wichtigen Erscheinungen der kleinen Schwingungen, der Resonanz und der zyklischen Bewegungen gewidmet und ist vielleicht das Schönste in dem ganzen Buche. Was die Lektüre dieser drei Kapitel so außerordentlich anziehend gestaltet, ist die Durchdringung der mathematischen Deduktionen mit physikalischem Denken. Um nur ein Beispiel herauszugreifen, zitieren wir die im § 37 gegebene Interpretation der verschiedenartigen Bestandteile des Ausdruckes für die Reaktionskräfte in den Lagrangeschen Gleichungen und die anschließenden Bemerkungen. In dem Kapitel, das von den Schwingungen handelt, wird auch das Problem der schwingenden Saite diskutiert, und durch den Übergang von gewöhnlichen zu partiellen Differentialgleichungen die später folgende Mechanik der Kontinua in interessanter Weise vorbereitet. Bei der Besprechung der zyklischen Koordinaten und Bewegungen können allerdings die Kreiselerscheinungen nicht zur Erläuterung herbeigezogen werden, da diese erst in dem nächsten Abschnitt vorgetragen werden. Diesem unvermeidlichen Nachteil, den übrigens der Verfasser durch sehr hübsch gewählte Beispiele mehr elementarer Natur (wie das „Quadrantpendel“) auszugleichen weiß, steht der ungeheure Vorteil gegenüber, nunmehr die Mechanik der starren und deformierbaren Körper von vornherein unter den großen im ersten Abschnitt gewonnenen Gesichtspunkten betrachten zu können.

Die Dynamik der starren Körper, welche den Gegenstand des zweiten Teils bildet, wird eingeleitet durch einige rein geometrische Abschnitte; sie behandeln jene Vereinigung von Vektor und Vektormoment, durch welche sowohl die Verrückungen eines starren Systems als auch die auf ein solches wirkenden Kräfte sich darstellen lassen. Zentralachse, Schraubentheorie, Zylindroïd, sind einige Stichworte, welche hier zur Charakterisierung des

Inhaltes genügen müssen. Es folgt die Definition der Impulsschraube, der Trägheitsmomente und Trägheitsprodukte mit allen dazugehörigen Begriffen und Konstruktionen. Vier Paragraphen über die analytische Behandlung der Kinematik starrer Körper schließen das Kapitel. Das folgende ist der eigentlichen Dynamik gewidmet. Die schönen geometrischen Methoden von Poinsot und die Eulerschen Gleichungen werden zunächst für die Bewegung eines beliebigen starren Körpers um einen festen Punkt gegeben. Dann folgt die Theorie des symmetrischen Kreisels; da die Kenntnis der elliptischen Funktionen nicht bei dem Leser vorausgesetzt wird, beschränkt sich die Behandlung auf eine qualitative Diskussion der Bewegungsgleichungen, bei welcher alle wesentlichen Züge dieser eigenartigen Vorgänge ans Licht gesetzt werden. Zahlreiche Figuren, Abbildungen von Apparaten, konstruktiv entworfene oder durch graphische Vorrichtungen am Kreisel erhaltene Bewegungskurven erleichtern das Studium, Hinweise auf geistvolle technische Anwendungen (Griffin Mahlmühle, Torpedo des Admiral Howell, gyroskopischer Horizont des Contre-Admirals Fleuriais) erhöhen und beleben das Interesse an dem Gegenstande. Hatten die Eulerschen Gleichungen als Ausgangspunkt der analytischen Untersuchung gedient, so werden doch in deren Verlauf auch die Lagrangeschen Gleichungen und die Jacobische partielle Differentialgleichung ebenfalls herangezogen. Die Theorie der Lagrangeschen Gleichungen erfährt eine wichtige Ergänzung in den letzten Paragraphen, welche von den Erscheinungen des Rollens (erläutert durch die Beispiele der Billardkugel, des Reifens, des Velozipeds) handeln; diese Probleme sind analytisch durch das Auftreten nicht integrierbarer Bedingungsgleichungen charakterisiert und unter diesem Gesichtspunkt in neuerer Zeit vielfach untersucht worden; ich erwähne hier nur die interessante Arbeit von Hölder über nicht holonome Systeme, weil diese von Herrn Webster nicht zitiert wird. Den Schluß des Kapitels und damit des ganzen zweiten Teils bilden einige Paragraphen über relative Bewegung mit besonderer Berücksichtigung des Einflusses der Erdrotation auf die Bewegung eines Körpers an der Erdoberfläche.

Der dritte Teil des Buches zerfällt in zwei Hälften, deren erste aus einem sehr frisch und anregend geschriebenen Kapitel über Potentialtheorie besteht. Nicht nur die wichtigsten Sätze über das Newtonsche und logarithmische Potential werden vorgetragen, sondern auch zahlreiche allgemeine mathematische Hilfsmitel (Differentialparameter, krummlinige Koordinaten, Greensche Formeln) werden im Zusammenhang damit eingeführt, die Entwicklungen nach trigonometrischen und Kugelfunktionen finden hier ihre Stelle. Wenn somit dieses Kapitel (das achte des Buches) einen vorwiegend analytischen Charakter hat, so ist doch wiederum nirgends versäumt, anschauliche Interpretationen der mathematischen Ausdrücke zu geben, Resultate der Experimentalphysik in den Text einzuflechten, so z. B. die Methoden zur Bestimmung der mittleren Dichte der Erde, im besonderen die hübsch erdachte Methode, welche Mendenhall am Fujiyama in Japan erprobt hat.

So vorbereitet, gelangt der Leser zu den drei letzten Kapiteln des Buches, welche die zweite Hälfte des dritten Abschnittes bilden. Das erste von diesen (Kapitel IX) handelt von der Kinematik und Dynamik kontinuierlicher Massen im allgemeinen, von Stress und Strain. In den letzten

Paragraphen werden die Beziehungen zwischen Stress und Strain abgeleitet, unter der Voraussetzung, daß ein Stresspotential existiert, welches dann für isotrope Körper besonders einfache Formen annimmt. Die Ausdrücke für die Kraftkomponenten werden aufgestellt, die physikalische Bedeutung der auftretenden Konstanten diskutiert. Im zehnten Kapitel werden die wichtigsten Gegenstände der Hydrostatik studiert, sowie jenes berühmte Problem, dessen Lösung durch Barré de Saint-Venant einen der wichtigsten Fortschritte der neueren Elastizitätstheorie bezeichnet. Auch hier ist wiederum auf die experimentelle Bestätigung der Theorie Gewicht gelegt, welche Cornu durch seine schönen Messungen an gebogenen Glasstäben geliefert hat. Das letzte Kapitel bringt eine Darstellung der Hydrodynamik. Im Mittelpunkte steht die Theorie der Wirbelbewegungen. Von den beiden Hauptproblemen, mit welchen sich die Helmholtzsche Arbeit besonders beschäftigt, ist nur das der geradlinigen Wirbelfäden ausführlich behandelt, während die Diskussion kreisförmiger Wirbelfäden angedeutet wird. Es folgt eine kurzgefaßte Behandlung der Wellenbewegung, in welcher das Gezeitenproblem berührt und die theoretische Akustik vorbereitet wird. Ein Schlußparagraph ist den Flüssigkeitsbewegungen gewidmet, bei welchen die Viskosität eine Rolle spielt. —

Ich habe versucht, in diesem Referate einen Begriff von dem reichen Inhalte und der mannigfaltigen Behandlungsweise des Werkes zu geben, das mir zur Besprechung vorliegt, und zu zeigen, daß es sich hier um eine wertvolle Bereicherung unserer Lehrbuchliteratur handelt. Es ist mir kein Buch ähnlichen Umfanges bekannt, welches ich dem Studirenden der Physik und auch der Mathematik so unbedingt wie dieses zur Einführung in das Gesamtgebiet der Mechanik empfehlen möchte. Es steht zu hoffen, daß die englische Sprache der Verbreitung des Buches in Deutschland kein ernstliches Hindernis entgegensetzt. Der Teubnersche Verlag, welcher dem großen Werke von Routh nach wenigen Jahren diese Vorlesungen von Webster hat nachfolgen lassen und nun wieder das Erscheinen von Loves Lehrbuch der Elastizität in Aussicht stellt, wird mit diesen drei Unternehmungen dem Studium der Mechanik in Deutschland eine mächtige Anregung geben und sich dadurch ein wahres Verdienst um diese Wissenschaft erwerben.

Heidelberg. KARL BOEHM.

W. W. Rouse Ball, Histoire des Mathématiques. Edition française revue et augmentée. Traduite sur la troisième édition anglaise par L. Freund. Tome premier. VII, 422 p. 8⁰. Librairie A. Hermann. Paris 1906.

Die vorliegende französische Ausgabe des bekannten englischen Buches über die Geschichte der Mathematik hat der Schiffsleutnant Freund auf Grund der dritten Auflage des Originals übertragen. Es handelt sich aber nicht nur um eine bloße Übersetzung; denn es sind Zusätze hinzugefügt worden, die eine erwünschte Bereicherung der Darstellung bilden. Durch diese Vermehrung des Umfangs hat sich eine Teilung des Werks in zwei Bände erforderlich gemacht. Der bisher erschienene erste Band reicht bis zu Newtons Zeit heran; er umfaßt demnach die großen Epochen der Mathematik im Altertum, im Mittelalter und während der Renaissance sowie der

neueren Mathematik von Descartes bis Huygens. Den Beschluß des ersten Bandes bilden fünf Zusätze, die der Reihe nach behandeln: Vieta als Geometer, nach Chasles; Analyse der Originalschriften Napiers betreffend die Erfindung der Logarithmen, von Biot; Über Kepler, nach Chasles und Bertrand; Entwicklung der Prinzipien der Dynamik: Arbeiten von Galilei und Huygens, nach Mach; Über den Ursprung der Statik, Vorwort des Werkes von P. Duhem.

Alfred Manes, Versicherungswesen. I. u. II. Teil. 8°. [XII u. 468 S.] Leipzig 1905, B. G. Teubner.

Dieses Buch, dessen Verfasser in letzter Zeit durch zwei Monographien „die Haftpflichtversicherung, ihre Geschichte, wirtschaftliche Bedeutung und Technik 1902“ und „Versicherungswissenschaft auf deutschen Hochschulen Berlin 1904“ dem weiteren Publikum bekannt geworden ist, dürfte allen zu empfehlen sein, welche über die weitverzweigte Organisation des Versicherungswesens Aufschluß erhalten wollen. Besonderes Interesse dürfte bei den Lesern dieser Zeitschrift der Abschnitt über „Versicherungswissenschaft“ finden. Der Autor vertritt hier sehr überzeugend die These, daß nicht nur die Ausbildung von Versicherungstechnikern auf unsern Hochschulen anzustreben sei, sondern daß ein nicht minder starkes Bedürfnis nach Versicherungsanwälten bestehe, einer Institution, die bei uns im Gegensatz zum Auslande noch völlig unbekannt sei. Zugleich wünscht er überhaupt eine größere Verbreitung der Kenntnisse über das Wesen der Versicherung und zwar im Interesse der allgemeinen Bildung, wie im Interesse der Volkswirtschaft. Für den Fachmann sind von besonderm Wert die Abschnitte über Versicherungskartelle und die vielen neueren kleinen Versicherungszweige, die bisher eine literarische Berücksichtigung im Zusammenhange nicht erfahren haben. Die Darstellung ist ungemein klar, die Anordnung des Stoffes musterhaft, sodaß die Lektüre des Buches dem Leser gradezu einen Genuß bietet.

F. Bernstein.

Handbuch der Theorie der Gammafunktion. Von Dr. Niels Nielsen, Dozent der reinen Mathematik an der Universität Kopenhagen, Inspektor des mathematischen Unterrichts an den Gymnasien Dänemarks. [X u. 326 S.] gr. 8. Leipzig 1906, B. G. Teubner.

Dies Handbuch versucht eine Gesamtdarstellung der bis jetzt bekannten Eigenschaften und Anwendungen der Gammafunktion und verwandter Funktionen, in strenger und doch möglichst elementarer Form zu liefern; es ist daher als der erste neuere Versuch dieser Art zu bezeichnen, denn merkwürdigerweise ist seit dem Traité von Legendre keine für ihre Zeit vollständige Darstellung dieser Theorie publiziert worden. — Der erste Teil des Buches gibt, ohne Zuhilfenahme bestimmter Integrale sondern ausschließlich durch Anwendung der Theorie analytischer Funktionen, eine elementare Entwicklung der Eigenschaften von $\Gamma(x)$ und verwandter Funktionen, indem $\Gamma(x)$ mittels seiner Differenzengleichung definiert wird. — Im zweiten Teile wird eine recht vollständige Theorie der beiden Eulerschen Integrale und der durch Gammafunktionen ausdrückbaren bestimmten Integrale sowie ihrer Anwendung zur Herleitung der Reihen von Stirling, Kummer und Lerch gegeben; ebenso werden die beiden Mellinschen Umkehrprobleme und ihre Anwendung

auf gewisse Funktionengattungen behandelt. — Der dritte und letzte Teil untersucht die reziproken Gammafunktionen als Entwicklungsfunktionen durch eine Darstellung der von Schlömilch, Jensen, Pincherle und namentlich vom Verfasser ausgebildeten Theorie der Fakultätenreihen; hier findet sich wohl zum ersten Male eine Würdigung der Methoden, die Stirling über solche Reihen angedeutet hat. — Das Buch enthält endlich ein möglichst vollständiges Verzeichnis der reichen Literatur über die behandelten Theorien.

Kopenhagen. NIELS NIELSEN.

E. Czuber, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. In 2 Bänden. I. Band, mit 115 Figuren im Text. Zweite, sorgfältig durchgesehene Auflage. gr. 8. [XIV u. 560 S.]. Leipzig 1906, B. G. Teubner.

Bei der Bearbeitung der zweiten Auflage hat die Gesamtanlage des Werkes eine Änderung nicht erfahren, da mir weder die Urteile der Kritik noch die eigenen seither gemachten Erfahrungen eine solche als notwendig erscheinen ließen. Hingegen ist alle Sorgfalt darauf verwendet worden, den Inhalt abzurunden und den Zwecken, für welche das Buch bestimmt ist, vollkommener anzupassen; wo es angezeigt schien, die Darstellung präziser zu gestalten und die Ergebnisse schärfer zu formulieren. Von größeren Erweiterungen des Inhaltes seien erwähnt im I. Bande die hyperbolischen Funktionen, der Begriff der Funktion einer komplexen Variablen; im II. Bande die Eulerschen Integrale, die Fourierschen Reihen, Moment- und Schwerpunktsbestimmungen, die Sätze von Green. Die Einfügung historischer und literarischer Notizen wird manchem willkommen sein; auch die ziemlich zahlreichen, an passenden Stellen vorgelegten Probleme dürften zur Verwendbarkeit des Buches beitragen. So hoffe ich, die Absichten, welche mir bei der Anlage des Werkes vorschwebten, der Verwirklichung näher gebracht zu haben.

Wien. E. CZUBER.

F. Pockels, Lehrbuch der Kristalloptik. Mit 168 Figuren im Text und 6 Doppeltafeln. [X u. 520 S.] gr. 8. Leipzig 1906, B. G. Teubner.

In diesem Buch soll in erster Linie den Physikern, aber auch den Mathematikern und Mineralogen, die sich über die Probleme und Ergebnisse der Kristalloptik näher zu unterrichten wünschen, eine möglichst vollständige Übersicht der gegenwärtigen Kenntnisse auf diesem Gebiete der Optik geboten werden. Um auch den mit der theoretischen Physik weniger vertrauten Lesern das Eindringen zu erleichtern, werden die Gesetze der Lichtfortpflanzung in Kristallen zunächst aus Beobachtungstatsachen mit Hilfe naheliegender Verallgemeinerungen abgeleitet — also auf dem Wege, der in der Hauptsache auch derjenige der historischen Entwicklung gewesen ist —, und dann erst wird gezeigt, wie sich diese Gesetze aus den Differentialgleichungen der verschiedenen Lichttheorien ergeben. Von letzteren wird übrigens nach kurzer Charakterisierung der mechanischen Theorien weiterhin nur die elektromagnetische Theorie nebst ihren modernen, zur Erklärung der Dispersion, des Drehungsvermögens und der Absorption notwendigen Erweiterungen herangezogen.

Dem Zwecke des Buches entsprechend finden auch die Beobachtungsmethoden sowie die Beobachtungsresultate eingehende Besprechung,

während auf detaillierte Beschreibung der Instrumente allerdings verzichtet werden mußte, was aber um so eher angängig schien, als in dieser Hinsicht z. B. der „Grundriß der physikalischen Kristallographie" von Th. Liebisch alles Wünschenswerte bietet.

Dank dem Entgegenkommen des Herrn Dr. H. Hauswaldt konnte eine Anzahl von dessen vortrefflichen photographischen Aufnahmen von Interferenz- und Absorptionserscheinungen reproduziert und so eine weit bessere Veranschaulichung dieser Erscheinungen geboten werden, als es durch schematische Figuren allein möglich ist.

Heidelberg. F. Pockels.

J. A. Fleming (Prof. der Elektrotechnik am University College zu London), **elektrische Wellentelegraphie.** Vier Vorlesungen. Autorisierte deutsche Ausgabe von E. Aschkinaß. Mit 53 Abbildungen. [IV u. 185 S.] gr. 8. Leipzig 1906, B. G. Teubner.

Es schien eine dankenswerte Aufgabe zu sein, J. A. Flemings „Cantor Lectures on Hertzian Wave Telegraphy" durch die vorliegende Übersetzung auch einem größeren deutschen Leserkreise zugänglich zu machen. Denn obwohl das Thema der Telegraphie ohne Draht schon mehrfache Bearbeitungen gefunden hat, so existiert doch bisher in der deutschen Fachliteratur kein Werk, in welchem, wie hier, auf verhältnismäßig engem Raume sowohl die rein wissenschaftliche als auch die technische Seite des Gegenstandes in gleichem Maße berücksichtigt wird und in welchem beide mit der gleichen gründlichen Sachkenntnis behandelt werden.

Die der neuen Technik zugrunde liegenden wissenschaftlichen Prinzipien werden von einem völlig modernen Standpunkte aus erörtert, indem die Faraday-Maxwellschen Vorstellungen zusammen mit der Elektronentheorie zu einem einheitlichen Bilde verbunden werden. Dabei tritt in der Darstellung allenthalben jene Anschaulichkeit hervor, der wir gerade in den Werken englischer Autoren so häufig begegnen.

An der praktischen Ausgestaltung der drahtlosen Telegraphie hat der Verfasser bekanntlich als Mitarbeiter von Marconis Wireless Telegraph Company, die wohl von allen Unternehmungen auf diesem Gebiete nicht nur über die reichsten Erfahrungen verfügt, sondern auch die bedeutendsten Erfolge aufzuweisen hat, selbst einen hervorragenden Anteil gehabt. Daher dürfte es auch von besonderem Interesse sein, die Stellungnahme des Verfassers zu den praktischen Problemen jener Technik aus diesen Vorlesungen näher kennen zu lernen.

Berlin. E. Aschkinass.

Generalregister zu Band 1—50 der Zeitschrift für Mathematik und Physik. Bearbeitet von Dr. E. Wölffing, Professor an der Königl. Technischen Hochschule Stuttgart. [XII u. 308 S.] gr. 8. Leipzig 1905. B. G. Teubner.

Das Generalregister ist sachlich angeordnet und enthält die Titel der Abhandlungen und Rezensionen unter zahlreiche Stichwörter verteilt. Dabei ist die Klassifikation nicht nur nach dem Titel erfolgt, sondern es wurde immer auch der Inhalt einzelner Teile jeder Abhandlung sorgfältig berücksichtigt. Die Rezensionen sind in das Sachregister eingeordnet und am

Schlusse jedes Stichworts angeführt. Das Autorenregister umfaßt die Verfasser der Abhandlungen und der rezensierten Schriften und gibt bei jedem derselben das in der Zeitschrift enthaltene und nach anderen Quellen ergänzte biographische Material. E. Wölffing.

Jornal de Sciencias Matematicas e Astronomicas. Das von F. Gomes Teixeira begründete und lange Jahre erfolgreich geleitete „*Jornal*“ wird mit dem Band XV sein Erscheinen einstellen. Statt dessen erscheint von jetzt ab, ebenfalls unter der Leitung von F. Gomes Teixeira, ein neues Organ mit erweitertem Programm unter dem Titel: „*Annaes Scientificos da Academia Polytechnica do Porto*“. Nach dem vorliegenden ersten Heft sind die „Annaes“ in ähnlicher Weise wie das Journal de l'Ecole Polytechnique nicht ausschließlich der Mathematik gewidmet, vielmehr sollen außer der reinen und angewandten Mathematik alle an der Technischen Hochschule gelehrten Wissenschaften: Physik, Chemie, Naturwissenschaften, Sozialwissenschaften usw. darin Berücksichtigung finden. Die „Annaes“ werden in Heften von etwa 4 Bogen erscheinen, 4 Hefte bilden einen Band.

Auszeichnung der Zeitschrift: L'Enseignement mathématique. Bei Gelegenheit der internationalen Kunst- und Gewerbe-Ausstellung, die aus Anlaß der Feier der 75jährigen Unabhängigkeit in Brüssel veranstaltet war, ist die genannte Zeitschrift mit der goldenen Medaille ausgezeichnet worden.

Bibliothek Cremona. Die Bibliothek des verstorbenen Luigi Cremona ist zum Kauf ausgeboten. Sie besteht aus 3657 italienisch, 1163 französisch, 995 deutsch, 509 englisch und 23 lateinisch geschriebenen Abhandlungen und Abdrücken, sowie einer verhältnismäßig kleinen Zahl von Büchern und Zeitschriften.

Unter der Presse bei B. G. Teubner, Leipzig (vgl. XIV, Heft 10, S. 541): E. Blaschke, Vorlesungen über mathematische Statistik. — G. H. Bryan, Thermodynamics (in engl. Sprache). — H. Durège, Theorie der elliptischen Funktionen. 5. neubearb. Aufl. von L. Maurer. — L. Krüger, zur Ausgleichung der Widersprüche in den Winkelbedingungsgleichungen trigonometrischer Netze. — Mitteilungen der mathematischen Gesellschaft in Hamburg. Bd. IV, Heft 6. — Die physikalischen Institute der Universität Göttingen. Festschrift im Anschlusse an die Einweihung des neuen physikalischen Hauptinstitutes. Herausgegeben von der Göttinger Vereinigung zur Förderung der angewandten Physik und Mathematik. — H. Poincaré, Wissenschaft und Hypothese. Deutsche Ausgabe von F. und L. Lindemann. 2. Aufl. — H. Weber und J. Wellstein, Enzyklopädie der Elementarmathematik. III. Band: Die Anwendungen der Elementarmathematik. — B. Weinstein, philosophische Grundlagen der Naturwissenschaften.

2. Bücherschau.

Abbe, E., Gesammelte Abhandlungen. 2. Bd. Wissenschaftliche Abhandlungen aus verschiedenen Gebieten, Patentschriften, Gedächtnisreden. IV, 346 S. m. 16 Fig. u. 7 Taf. 8°. Jena 1906. *M.* 7.50.

Amodeo, F., Vita matematica napoletana. Studio storico, biografico, bibliografico. Parte Prima. Napoli 1905.

Beck, H., Die Strahlenketten im hyperbolischen Raum. 55 S. Dissert. Bonn 1905.

Döhlemann, K., Projektive Geometrie in synthetischer Behandlung. Mit 91 Fig. 181 S. 8°. 3. verb. Auflage. Leipzig 1905. ℳ 0.80.

Doster, G., Éléments de la théorie des déterminants, avec application à l'algèbre, la trigonométrie et la géométrie analytique dans le plan et dans l'espace, à l'usage des classes de mathématiques spéciales. 2e édition. XXXIII, 362 p 8°. Paris 1905. Fr. 8.—.

Graez, L., Die Elektrizität und ihre Anwendungen. 12. Auflage. XVI, 659 S. m. 595 Abbild. 8°. Stuttgart 1906. ℳ 7 —.

Hartwig, Th., Leitfaden der konstruierenden Stereometrie. Darstellung der Raumformen im Schrägbilde, nebst einigen Anwendungen von Schrägbildern auf dem Gebiete der theoretischen und rechnenden Stereometrie, darstellenden Geometrie, Mineralogie, mathematischen Geographie und Physik. 39 S. m. 55 Fig. 8°. Wien 1906. ℳ 1.—.

Hauck, G., Lehrbuch der Stereometrie. Auf Grund von Dr. Ferd. Kommerells Lehrbuch neu bearbeitet und erweitert. 9. Aufl., herausgegeben von V. Kommerell. Tübingen 1905. ℳ 2.60.

Heffter und **Koehler,** Lehrbuch der analytischen Geometrie. 1. Bd.: Geometrie in den Grundgebilden erster Stufe und in der Ebene. XVI, 527 S. 8°. Mit 136 Figuren. Leipzig 1905. ℳ 14.—.

Hepke, B., Über kürzeste Transversalen zwischen Erzeugenden einer hyperboloidischen Regelschar. 76 S. 8°. Breslau 1905. ℳ 2.—.

Horn, J., Gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. X, 391 S. 8°. Leipzig 1905. ℳ 10.—.

Kammer, O., Inversionen bei Permutationen mit Wiederholung. 21 S. Programm. Alsfeld.

Kemlein, G., Zum Unterricht in der analytischen Geometrie an den humanistischen Gymnasien Bayerns. Progr. Ludwigshafen 1905.

Kommerell, K., Riemannsche Flächen im ebenen Raum von vier Dimensionen. 49 S. 8°. Heilbronn 1905. ℳ 1.60.

Körbers Strahlendiagramm zur vereinfachten Herstellung perspektivischer Zeichnungen. Berlin 1905. ℳ 1.50.

Lightfoot, J., Graphic algebra. For elementary and intermediate students. With exercises and answers. s. 1.—.

Meyer, J., Einführung in die Thermodynamik auf energetischer Grundlage. VIII, 216 S. 8°. Halle a. S. 1906. ℳ 8.—.

Mohr, O., Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik. IX, 459 S. m. 31 Abbild. 8°. Stuttgart 1906. ℳ 15.—.

Münch, W., Zur Bestimmung der absoluten oder kosmischen Bewegung unseres Planetensystems durch vervollständigte Aberrationsmessungen. Dissert. 67 S. Berlin.

Noth, G., Differentialinvarianten und invariante Differentialgleichungen zweier 10-gliedriger Systeme. 32 S. 8°. Leipzig 1905. ℳ 1.60.

Reiner, J., Hermann von Helmholtz. 204 S. mit Bildnis. 8°. Leipzig 1905. ℳ 3.50.

Righi, A., Die moderne Theorie der physikalischen Erscheinungen (Radioaktivität, Jonen, Elektronen). Aus dem Italienischen von B. Dessau. V, 152 S. mit 17 Abb. 8°. Leipzig 1905. ℳ 2.80.

Schreber, K. und **Springmann, P.,** Experimentierende Physik. Zugleich vollständig umgearbeitete deutsche Ausgabe von Henri Abrahams Recueil d'expériences élémentaires de physique. 1. Band. VII, 171 S. mit 230 Abb. 8°. Leipzig 1905. ℳ 3.60.

Schubert, H., Auslese aus meiner Unterrichts- und Vorlesungspraxis. 2. Band. 218 S. 8°. Leipzig 1905. M 4.—.

Strenger, Über halbregelmäßige Vielflache. 44 S. Programm Schwäb. Hall.

Souchon, A., Sur l'intégration des équations générales de la dynamique analytique et sur les principales propriétés de leurs intégrales canoniques. 23 p. 8°. Tours 1905.

Tannery, J., Introduction à la théorie des fonctions d'une variable. 2e édition, entièrement refondue. Tome Ier: Nombres irrationels; Ensembles; Limites; Séries; Produits; Infinis; Fonctions élémentaires; Dérivées. IX, 423 p. 8°. Paris 1904. Fr. 14.—.

Vonderlinn, J., Parallelperspektive; Rechtwinklige und schiefwinklige Axonometrie. 112 S. Mit 121 Figuren. Leipzig 1905. M 0.80.

Weber, H., und **Wellstein, J.,** Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Band 1, Elementare Algebra und Analysis. 2. Auflage. Leipzig 1905. M 9.60.

Wieleitner, H., Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung. XXII, 313 S. 8°. Mit 82 Figuren. Leipzig 1905. M 10.—.

Winter, A., Über die logarithmischen Grenzfälle der hypergeometrischen Differentialgleichungen mit zwei endlichen singulären Punkten. Dissert. 73 S. Kiel 1905.

Wolff, G., Über Gruppen der Reste eines beliebigen Moduls im algebraischen Zahlkörper. Dissert. 46 S. 8°. Göttingen 1905. M 1.50.

3. Zeitschriftenschau.

(Von dem Inhalt der Zeitschriften werden nur die Aufsätze erwähnt, welche dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften angehören.)

Mathematische Annalen. 61. Band. 3. Heft.

Faber, Über die zusammengehörigen Konvergenzradien von Potenzreihen mehrerer Veränderlicher. Hurwitz, Zur Theorie der automorphen Funktionen von beliebig vielen Variablen. Klein, Beweis für die Nichtauflösbarkeit der Ikosaedergleichung durch Wurzelzeichen. Lietzmann, Zur Theorie der $n$ten Potenzreste in algebraischen Zahlkörpern. II. Über $n$te Normenreste. Staude, Das Hauptachsenproblem der Flächen 2. Ordnung. Kepinski, Über die Differentialgleichung $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{m+1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{n}{x}\frac{\partial z}{\partial t} = 0$. Riesz, Über mehrfache Ordnungstypen. Fejér, Das Ostwaldsche Prinzip in der Mechanik. Zemplén, Kriterien für die physikalische Bedeutung der unstetigen Lösungen der hydrodynamischen Bewegungsgleichungen. Mason, Beweis eines Lemmas der Variationsrechnung.

Proceedings of The London Mathematical Society. Series 2. Vol. 3. Part 6 and 7.

Johnston, The intersection of two conic sections. Hill, Filon, Chapman, On the projection of two triangles on the same triangle. Burnside, On the condition of reducibility of any group of linear substitutions. Hardy, On a class of analytic functions. Young, Linear content of a plane set of points. Orbituary Notice of Robert Tucker.

Annales de la faculté des sciences de Marseille. tome 14. 1904.

L. Sauvage, Premiers principes de la théorie générale des fonctions de plusieurs variables. Ch. Riquier, Sur les systèmes différentiels réguliers.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. Tome 139. 1904 II. Nos. 21 à 26. 21 Novembre — 26 Décembre 1904.

E. Picard, Sur un théorème général concernant les surfaces algébriques de connexion linéaire supérieure à l'unité. R. de Montessus de Ballore, Sur les

fractions continues algébriques. Maurice Fréchet, Généralisation d'un théorème de Weierstraß. P. Fatou, La série de Fourier et la série de Taylor sur son cercle de convergence. Lucien Libert, Les Léonides en 1904. D. Pompéiu, Sur les singularités des fonctions analytiques univoques. E. Picard, Sur la formule générale donnant le nombre des intégrales doubles de seconde espèce dans la théorie des surfaces algébriques. Vito Volterra, Sur les équations différentielles du type parabolique. Potron, Sur les groupes d'ordre p^m [où p est un nombre premier et m un nombre naturel > 4] dont tous les diviseurs d'ordre p^{m-2} sont abéliens. Amiral Fournier, Critère des navires à grande vitesse. P. Helbronner, Sur la télestéréoscopie. H. Bordier, Expériences permettant de déceler les rayons N. M. Berthelot, Sur quelques règles thermochimiques relatives à la possibilité et à la prévision des réactions. Loewy, Détermination faite en 1902 de la différence de longitude entre les méridiens de Paris et de Greenwich. J. Guillaume, Observations du soleil faites à l'observatoire de Lyon. R. Le Vavasseur, Sur les groupes continus finis ou infinis de l'espace. G. Weiss et L. Bull, Sur l'enregistrement des rayons N par la photographie. Charles Henry, Sur une méthode de décomposition des ensembles statistiques complexes ou ensembles irréductibles. Paul Painlevé, Sur le théorème des aires et les systèmes conservatifs. G. A. Crocco, Sur la stabilité des dirigeables. P. Langevin, Sur la théorie du magnétisme.

— Tome 140; 1905 I; Nos. 1 à 26. 2 Janvier—26 Juin 1905.

J. Boussinesq, Pouvoir refroidissant d'un courant fluide sur un ellipsoïde à axes inégaux, immergé dans ce courant. G. Lippmann, Franges d'interférences produites par le stystème de deux miroirs perpendiculaires entre eux. Maurice Fréchet, Sur les fonctions limites et les opérations fonctionnelles. S. Lattès, Sur les substitutions à trois variables et les courbes invariantes par une transformation de contact. G. A. Miller, Sur les sous-groupes invariants d'indice p^2. Ct· de Sparre, Au sujet de la déviation des corps dans la chute libre. P. Langevin, Sur une formule fondamentale de la théorie cinétique. Amiral Fournier, Résistance de l'eau à la translation des navires. Carènes de moindre résistance. J. Boussinesq, Conductibilité extérieure ou superficielle représentative pour un corps donné du pouvoir refroidissant d'un courant fluide. Chanoz et Perrigot, A propos d'une prétendue démonstration de l'existence des rayons N. H. Poincaré, Sur la généralisation d'un théorème élémentaire de Géométrie. E Picard, Sur quelques théorèmes relatifs aux surfaces algébriques de connexion linéaire supérieure à l'unité. Federigo Enriques, Sur les surfaces algébriques irrégulières. G. Remoundos, Sur quelques points de la théorie des nombres. S. Bernstein, Sur les équations du type parabolique. Loewy et Puiseux, Etude des photographies lunaires. Considérations sur la marche de la solidification dans l'intérieur d'une planète. Considère, Calcul des ponts en arc et des ponts suspendus. S. Carrus, Sur les familles de surfaces à trajectoires orthogonales planes. G. Darboux, Note sur la communication précédente. A. Buhl, Sur l'approximation des fonctions par des polynomes dans ses rapports avec la théorie des équations aux dérivées partielles; application au problème de l'état initial en Physique mathématique. E. Traynard, Sur une surface hyperelliptique. G. Castelnuovo, Sur les intégrales de différentielles totales appartenant à une surface irrégulière. Tzitzéica, Sur les équations différentielles linéaires du second ordre renfermant un paramètre. F. Riesz, Sur un théorème de E. Borel. Maurice Fouché, Sur la déviation des graves vers le Sud et sur la courbure des lignes de force. H. Pellat, Champ magnétique auquel est soumis un corps en mouvement dans un champ électrique. P. Langevin, Sur les ions de l'atmosphère. G. Fayet, Sur le caractère elliptique de la nouvelle comète Borelly. Ch. Féry, Pendule électrique à échappement libre. E. Borel, Sur une propriété des ensembles fermés. E. Maillet, Sur les zéros des fonctions entières d'ordre

infini non transfini. E. Bertin, Sur la gyration des navires. E. Maillet, Sur les solutions des systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients monodromes. P. Fatou, Sur l'intégrale de Poisson et les lignes singulières des fonctions analytiques. F. Severi, Sur la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique et sur les intégrales de Picard attachées à la surface. C[te] de Sparre, Sur la déviation des corps dans la chute libre (seconde communication). Ch. Féry, Thermomètre intégrateur. J. Boussinesq, Sur l'existence d'un ellipsoïde d'absorption dans tout cristal translucide, même sans plan de symétrie ni axe principal. J. Hadamard, Sur les équations linéaires aux dérivées partielles. Maurice Fouché, Sur la déviation des graves. Paul Dienes, La série de Taylor sur le cercle de convergence. G. Tzitzéica, Sur les équations différentielles du second ordre renfermant un paramètre. E. Cotton, Sur l'intégration approchée des équations différentielles. A. Petot, Sur le mode de fonctionnement du différentiel des automobiles. G. Carrus, Familles de Lamé à trajectoires orthogonales planes. Familles de surfaces à lignes de courbures planes. F. Enriques, Sur les surfaces algébriques de genre zéro. Maurice Fréchet, Sur les fonctions d'une infinité de variables. P. Fatou, Sur quelques théorèmes de Riemann. Marcel Brillouin, Indétermination de la trajectoire limite des planeurs rigides. G. Darboux, Sur les trajectoires orthogonales d'une famille de surfaces. J. Boussinesq, Formule rationnelle du coefficient de l'absorption de la lumière par un corps translucide quelconque. Th. Moreux, Sur la constitution des tâches solaires. L. Lecornu, Sur le frottement de glissement. G. Marié, Oscillations des véhicules de chemin de fer sur leurs ressorts de suspension. Driencourt, Sur la détermination des différences de longitudes à Madagascar et à la Réunion. G. Darboux, Des surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution. P. Painlevé, Sur les lois de frottement de glissement. Maurice Fréchet, La notion d'écart dans le calcul fonctionnel. Pigeaud, Sur le calcul des arcs encastrés. J. Boussinesq, Construction, dans un milieu opaque homogène, des rayons lumineux qui y pénètrent par une face plane. L. Lecornu, Sur la loi de Coulomb. A. Leduc, Sur la marche de la solidification de la terre. E. Picard, Sur la dépendance entre les intégrales de différentielles totales de première et de seconde espèce d'une surface algébrique. F. Severi, Le théorème d'Abel sur les surfaces algébriques. M. Bôcher, Sur les équations différentielles linéaires du second ordre à solution périodique. E. Traynard, Sur une surface hyperelliptique. Eugène et François Cosserat, Sur la dynamique du point et du corps invariable dans le système énergétique. H. Poincaré, Rapport présenté au nom de la Commission chargée du Contrôle scientifique des opérations géodésiques de l'équateur. Eugène Fabry, Sur le genre des fonctions entières. P. Zervos, Sur le problème de Monge. Belzecki, Sur l'équilibre d'élasticité des voûtes en arc de cercle. L. Torres, Sur la stabilité longitudinale des ballons dirigeables. Bertin, Sur le principe des navires à flottaison cellulaire. Max Mason, Sur l'équation différentielle $\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda A(x)y = 0$ où λ est un paramètre. R. Liouville, Sur la relation qui existe entre la vitesse de combustion des poudres et la pression. Pigeaud, Arcs associés à des longerons par des montants verticaux articulés. Albert Bazin, Théorie et imitation du vol à voile. P. Langevin, Sur l'impossibilité physique de mettre en évidence le mouvement de translation de la terre. E. Mathias, Sur la chaleur de vaporisation des gaz liquéfiés. Ponsot, Chaleur dans le déplacement de l'équilibre d'un système capillaire. P. Duhem, De l'hystérésis magnétique produite par un champ oscillant superposé à un champ constant. P. Colin, Travaux géodésiques et magnétiques aux environs de Tananarive. Georges Marie, Oscillations des véhicules de chemin de fer à l'entrée en courbe et à la sortie. A. Demoulin, Sur les surfaces de Voss de la Géometrie non-euclidienne. Ed. Maillet, Sur

l'équation indéterminéé $x^\lambda + y^a = bz^\lambda$. G. Rémoundos, Sur quelques points de la théorie des nombres et la théorie des fonctions. C. Stéphanos, Sur les forces donnant lieu à des trajectoires coniques. E. et H. Guye, Sur la rigidité électrostatique des gaz aux pressions élevées. E. Solvay, Sur le problème dit du travail statique; essai de dissociation des énergies mises en jeu. H. Lebesgue, Sur une condition de convergence des séries de Fourier. E. Vessiot, Sur les courbes minima. E. Guyou, Transmission précise de l'heure par le téléphone. G. Marié, Oscillations des locomotives sous l'action de diverses forces perturbatrices. R. de Montessus de Ballore, Sur les fractions continues algébriques de Laguerre. S. Bernstein, Sur les équations aux dérivées partielles du type elliptique. Martin Krause, Sur l'interpolation des fonctions continues par des polynomes. G. Lamare, Projet de construction d'une horloge hydraulique. S. Socolov, Corrélations régulières remarquables du système planétaire, (note non publiée). H. Poincaré, Sur la dynamique de l'électron. A. Demoulin, Principes de Géométrie anallagmatique et de Géométrie réglée intrinsèque. G. Rayet, Les ombres mouvantes de l'éclipse totale de soleil du 12 mai 1706. M. Bottasso, Sur une solution du problème de Monge relatif à l'équation

$$f(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n) = 0$$

à coefficients variables. Devaux-Charbonnel, La mesure de la capacité des longs câbles sous-marins. F. Launay et E. Maillet, Sur le débit probable des sources dans le bassin de la Seine pendant le second semestre de 1905. H. Renan et W. Ebert, Sur une détermination de la constante d'aberration au moyen des observations de 3 étoiles très voisines du pôle. L. Raffy, Sur la recherche des surfaces isothermiques. Marcel Brillouin, Le mouvement de la terre et la vitesse de la lumière.

— Tome 141; 1905 II; Nos. 1—12. 3 Juillet—18 Septembre 1905.

E. Picard, Sur une inégalité relative à la connexion linéaire et sur le calcul du genre numérique d'une surface algébrique. J. Boussinesq, Propagation des ondes le long d'une colonne liquide compressible, se composant de filets à vitesses inégales et remplissant un tuyau élastique horizontal, sans tension longitudinale. J. Boussinesq, Calcul, pour les diverses contextures et épaisseurs de paroi possibles, de la résistance élastique qu'un tuyau sans tension longitudinale oppose au gonflement de la colonne liquide le remplissant. E. Husson, Recherches des intégrales algébriques dans le mouvement d'un corps solide pesant autour d'un point fixe. Loewy, nouvelle méthode pour la détermination de la réfraction à toutes les hauteurs. Ch. André, Appareil à éclipses artificielles du soleil. C. Guichard, Sur les propriétés infinitésimales de l'espace non-euclidien. E. Cotton, Sur l'évaluation des erreurs dans l'intégration approchée des équations différentielles. Janssen, Sur l'éclipse solaire totale du 30 août 1905. J. Boussinesq, Sur un cas simple, où se calculent aisément l'action mutuelle des anneaux juxtaposés constituant un tuyau et l'influence de cette action mutuelle sur la propagation des ondes liquides dans le tuyau. H. Padé, Sur la convergence de la Table des réduites d'une fraction rationnelle. Loewy, Etude de la réfraction à toutes les hauteurs; formules relatives à la détermination des coordonnées des astres. A. Demoulin, Sur la théorie des surfaces et des enveloppes de sphères en Géométrie anallagmatique. P. Boutroux, Sur les propriétés d'une fonction holomorphe dans un cercle où elle ne prend pas les valeurs 0 et 1. A. Buhl, Sur de nouvelles séries de polynomes. C[te] de Sparre, Sur le frottement de glissement. A. Pansiot, Sur le jour sidéral. Auric, Sur les fractions continues algébrique. Jouguet, Sur la similitude dans le mouvement des fluides. H. Deslandres, Etude de l'atmosphère solaire autour des taches. P. Painlevé, Sur les lois du frottement de glissement. G. Darboux, Sur une équation différentielle du quatrième ordre. E. Maillet, Sur les nombres transcendants.

Loewy, Eclipse du soleil du 30 août observée à Paris. J. Violle, Mesures actinométriques effectuées pendant l'éclipse du 30 août 1905. R. Mailhat, Sur l'éclipse de soleil du 30 août 1905. A. Demoulin, Sur les enveloppes de sphères dont les deux nappes se correspondent avec conservation des angles. G. Darboux, Sur une équation différentielle du quatrième ordre II. G. Rayet, L'éclipse totale de soleil du 30 août 1905. A. Demoulin, Sur deux systèmes cycliques particuliers. Auric, Sur la généralisation des fractions continues algébriques. Zervos, Sur le problème de Monge. H. Deslandres, Note préliminaire sur l'observation de l'éclipse totale du soleil, à Burgos, le 30 août 1905. H. Andoyer, Observation de l'éclipse du 30 août 1905. D. Eginitis, Observation de l'éclipse solaire du 30 août 1905 à Athènes.

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. XII, Number 1. Number 2.

Scott, The elementary treatment of conics by means of the regulus. Townsend, Arzelà's condition for the continuity of a function defined by a series of continuous functions. Bussey, Galois field tables for $p^n < 169$. Cole, The twelfth summer meeting of the American Mathematical Society. Schottenfels, A set of generators for ternary groups. Epsteen, Note on the structure of hypercomplex number systems. Kasner, A geometric property of the trajectories of dynamics. Miller, On the possible numbers of operators of order 2 in a group of order 2^m. Manning, On the arithmetical nature of the coefficients in groups of finite monomial linear substitutions. Hedrick, A modern calculus of variations. Kellog, Two books on modern analytic geometry. Notes.

Transactions of the American Mathematical Society. Vol. 6. Number 1.

Fréchet, Sur l'écart de deux courbes et sur les courbes limites. Eiesland, On a certain sytem of conjugate lines on a surface connected with Euler's transformation. Eisenhart, Surfaces of constant cuvature and their transformations. Lennes, Volumes and areas. Lovett, On a problem including that of several bodies and admitting of an additional integral. Sharpe, On the stability of the motion of a viscous liquid. Loewy, Über die vollständig reduziblen Gruppen, die zu einer Gruppe linearer Substitutionen gehören. Carver, On the Caylay-Veronese class of configurations.

Annals of Mathematics. Second series. Vol. 7. No. 1.

Porter, Concerning Green's theorem and the Cauchy-Riemann differential equations. Saurel, On the singularities of tortuous curves. Saurel, On the twist of a tortuous curve. Huntington, The continuum as a type of order: an exposition of the modern theory. V—VI. With an appendix on the transfinite numbers. Bôcher, A problem in analytic geometry with a moral.

Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Vol. XXV. No. IX. No. X.

Milne, Certain mathematical instruments for graphically indicating the direction of refracted and reflected light rays. Metzler, Vanishing aggregates of determinant minors. Muir, The theory of general determinants in the historical order of development up to 1852.

Prace Matematyczno-Fizyczne. Tom XVI. 1905.

Kalinowski, Sur le phénomène du retard dans la double réfraction électrique et dans la rotation magnétique du plan de polarisation dans les liquides. Stephansen, Eine Bemerkung zur Theorie der linearen Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten. Guldberg, Über lineare homogene Differenzengleichungen derselben Art. Laparewicz, Application des formes binaires quadratiques à la décomposition des nombres en facteurs premiers. Kepinski, Sur les vibrations transversales des verges élastiques. Miller, Theorems relating to quotient-groups. Corczynski, Sur les méthodes de déduction de la loi de Kirchhoff. Biernacki, Sur les miroirs produits par la disintégration galvanique du

fer. Biernacki, Sur un analysateur à pénombre et son application à l'étude de la lumière elliptiquement polarisée. Mittag-Leffler, Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène. Merecki, L'influence de la variable activité du soleil sur les mouvements apériodiques de l'atmosphère terrestre.

Nouvelles Annales de mathématiques. 4me Série. Tome 5. Juillet—Août 1905.

Lucien Lévy, Remarques sur la détermination des moments fléchissants produits par le passage d'un convoi sur une poutre à deux appuis simples E. Mathy, Méthode particulière d'intégration de $\int_{\gamma}^{\beta} \sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}\, dx$ quand α, β, γ, δ sont réels et que $\alpha > \beta > \gamma > \delta$. Application à la Géométrie. H. Piccioli, Sur l'équation intrinsèque des lignes qui appartiennent à certaines surfaces de révolution et du second degré. A. Sainte-Laguë et I. Haag, Représentation de cercles par des points. T. Hayashi, Un théorème relatif aux valeurs moyennes. Lancelot, Détermination d'une surface algébrique. G. Remoundos, Sur les rapports hyperanharmoniques.

— 4me Série. Tome 5. Septembre 1905

Lery, Nouvelles démonstration du théorème de d'Alembert. Pomey, Nouvelle démonstration du théorème de d'Alembert. Chassiotis, Notes sur les courbes gauches. Lancelot, Détermination d'une courbe algébrique gauche. Jamet, Sur une propriété de la parabole. Correspondance.

Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure. 3e série. Tome 21; Novembre—Décembre 1904.

Niels Nielsen, Sur la représention asymptotique d'une série de factorielles. Georges Voronoï, Sur une fonction transcendante et ses applications à la sommation de quelques séries. Seconde partie: Sommation des séries dépendant du nombre des diviseurs de nombres entiers positifs. I. Hadamard, Recherches sur les solutions fondamentales et l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles. Premier mémoire. Maurice Fréchet, Sur les fonctions de lignes fermées.

— 3e série. Tome 22; Janvier—September 1905.

S. Pincherle, Sur les fonctions déterminantes. E. Picard, Sur la formule générale donnant le nombre des intégrales doubles distinctes de seconde espèce relatives à une surface algébrique. I. Hadamard, Recherches sur les solutions fondamentales et l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles. Second mémoire. P. Duhem, Recherches sur l'élasticité. E. Cartan, Sur la structure des groupes infinis de transformations. A. Guldberg, Sur les équations linéaires aux différences finies. I. Boussinesq, Propagation des ondes le long d'une colonne liquide compressible se composant de filets à vitesses inégales et contenue dans un tuyau élastique horizontal, sans tension longitudinale. E. Lindelöf, Sur les fonctions entières d'ordre entier. L. Raffy, Recherches sur les surfaces isothermiques.

Bulletin des sciences mathématiques. 2e série, tome 28, September—Décembre 1904.

G. Darboux, Etude sur le développement des méthodes géométriques. E. Picard, Sur le développement de l'Analyse mathématique et ses rapports avec quelques autres sciences. H. Poincaré, L'état actuel et l'avenir de la Physique mathématique.

— 2e série, tome 29, Janvier—Septembre 1905.

Louis Kollros, Sur l'approximation périodique des irrationnelles cubiques. G. Darboux, Sur la sphère de rayon nul et sur la théorie du déplacement d'une figure invariable. Article nécrologique sur Paul Tannery. G. Darboux, Sur

les surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution. J. Boussinesq, Sur l'existence d'un ellipsoïde d'absorption dans tout cristal translucide, même sans plan de symétrie ni axe principal, et sur la construction des rayons lumineux dans les milieux opaques. J. Clairin, Sur l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(x, y, z)$. R. Le Vavasseur, Sur l'énumération des sous-groupes du groupe linéaire, homogène, à quatre variables: sous-groupes à un et à deux paramètres. J. Dolbnia, Sur la théorie de la transformation des fonctions elliptiques. Transformation d'un ordre impair. E. Estanave, Construction de surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution définies par G. Darboux. H. Lebesgue, Remarques sur la définition de l'intégrale. L. Zoretti, Sur un théorème de la théorie des fonctions analytiques.

L'Enseignement Mathématique. VII[e] Année. Mo. 6. Novembre 1905.

Guldberg, L'Enseignement mathématique en Norvège. Ermakoff, Restes de quelques séries usuelles. Teixeira, Sur les démonstrations de deux formules pour le calcul des nombres de Bernoulli. Combebiac, Les axiomes de la géométrie. Richard, Sur le mouvement relatif et le mouvement de la terre. Monnet, Sur les théorèmes généraux de la mécanique et le calcul vectoriel. Brand, Méthode rapide pour retrouver les formules fondamentales des triangles sphériques. Réformes à accomplir dans l'enseignement des mathématiques. Enquête sur la méthode de travail des mathématiciens; les résultats, II. Mélanges et Correspondances. Chronique. Notes et Documents. Bibliographie.

4. Kataloge.

Johann Ambrosius Barth, Leipzig. 25 Jahre Verlagstätigkeit 1881—1905.
A. Hermann, Paris. Bulletin des publications nouvelles.
C. Kirsten, Hamburg. Antiquariats-Katalog 35. Mathematik und Physik.
List & Franke, Leipzig. Antiquarisches Verzeichnis Nr. 377. Mathematik, Mechanik, Geodäsie.
Georg Reimer, Berlin. Bericht über die Verlagstätigkeit im Jahre 1905.
B. G. Teubner, Leipzig. Mitteilungen. 38. Jahrgang. Nr. 2.

5. Bei der Redaktion eingegangene Schriften.

[Titel, Preis usw. der eingesandten Schriften werden hier regelmäßig veröffentlicht. Besprechungen geeigneter Bücher bleiben vorbehalten. Eine Rücksendung der eingegangenen Schriften kann nicht erfolgen.]

Annuario del Circolo Matematico di Palermo 1905.

W. W. Rouse Ball, Histoire des Mathématiques. Edition française revue et augmentée, traduite sur la troisième édition anglaise par L. Freund. Tome Premier. VII, 422 p. 8°. A. Hermann, Paris 1906.

J. Bauschinger, Die Bahnbestimmung der Himmelskörper. Mit 84 Figuren im Text. XV, 653 S. 4°. W. Engelmann, Leipzig 1906.

L. Bianchi, Teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche rotonde. 74 p. 4°. Roma 1905.

O. Th. Bürklen, Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie der Ebene. Mit 32 Figuren. Göschensche Verlagshandlung, Leipzig 1905.

E. Czuber, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. In 2 Bänden. I. Band, mit 115 Figuren im Text. Zweite, sorgfältig durchgesehene Auflage. gr. 8°. XIV, 560 S. B. G. Teubner, Leipzig 1906.

P. Duhem, Les origines de la statique. Tome premier. IV, 360 p. 8°. A. Hermann, Paris 1905.

H. B. Fine, A College Algebra. VIII, 595 p. 8°. Ginn & Co., London.

J. A. Fleming, Elektrische Wellentelegraphie. Autorisierte deutsche Ausgabe von E. Aschkinaß. B. G. Teubner, Leipzig 1906.

Th. Friesendorff, Theorie der Berührung fester elastischer Körper und über die Härte (Russisch). St. Petersburg 1905.

Generalregister zu Band 1—50 der Zeitschrift für Mathematik und Physik. Bearbeitet von Dr. E. Wölffing, Professor an der Königl. Technischen Hochschule Stuttgart. XII, 308 S. gr. 8°. B. G. Teubner, Leipzig 1905.

F. Gomes Teixeira, Tratado de las curvas especiales notables. Memoria premiada por la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales de Madrid, y publicada por la misma Academia. IX, 632 p. Fol. Madrid 1905.

R. Guimaraes, Un manuscript intéressant. Mémoire présenté à l'Académie royale des sciences de Lisbonne.

A. Hamburger, Über die Restabschätzung bei asymptotischen Darstellungen der Integrale linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung. 58 S. 8°. Dissert. Berlin 1905.

F. Hartogs, Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen, insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen, welche nach Potenzen einer Veränderlichen fortschreiten. Habilitationsschrift. [Mathematische Annalen, Band LXII.]

A. Koppisch, Zur Invariantentheorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. 34 S. 8°. Dissert. Greifswald 1905.

J. Horn, Gewöhnliche Differerentialgleichungen beliebiger Ordnung. 391 S. 8°. G. J. Göschensche Verlagshandlung, Leipzig 1905.

Kunzes Kalender für das höhere Schulwesen Preußens. 12. Jahrgang 1905. II. Teil. Mit Benutzung amtlichen Materials herausgegeben von Toeplitz und Malberg. Breslau 1905.

J. G. Leathem, Volume and surface integrals used in physics. 47 S. 8°. Cambridge University Press. 1905. 2 s 6 d.

A. Manes, Grundzüge des Versicherungswesens. B. G. Teubner, Leipzig 1906.

F. Marotte, L'Evolution actuelle de l'enseignement mathématique en Angleterre et en Allemagne.

J. Pierpont, The theory of functions of real variables. Volume I. Ginn & Co. Boston 1905.

F. Pockels, Lehrbuch der Kristalloptik. Mit 168 Figuren im Text und 6 Doppeltafeln. X, 520 S. gr. 8°. B. G. Teubner, Leipzig 1906.

Fr. Rogel, Das Rechnen mit Vorteil. Eine gemeinfaßliche, durch zahlreiche Beispiele erläuterte Darstellung empfehlenswerter Vorteile und abkürzender Verfahren. B. G. Teubner, Leipzig 1905.

M. v. Rohr, Die optischen Instrumente. 130 S. 8°. B. G. Teubner, Leipzig 1905.

H. Rudolph, Kausalität und Weltanschauung. Eine Beantwortung erkenntnistheoretischer und psychologischer Fragen im Anschluß an die Programmabhandlung: „Über die Zulässigkeit der gegenwärtigen Theorie der Materie". Coblenz 1905.

Bastian Schmid, Philosophisches Lehrbuch. Zum Gebrauch an höheren Schulen und zum Selbststudium. VIII, 165 S. 8°. B. G. Teubner, Leipzig 1906.

E. Schroeder, Vorlesungen über die Algebra der Logik (Exakte Logik). Zweiter Band, zweite Abteilung. Herausgegeben im Auftrage der Deutschen Mathematiker-Vereinigung von Eugen Müller. Mit einem Bildnis Ernst Schröders. B. G. Teubner, Leipzig 1905.

H. Schubert, Auslese aus meiner Unterrichts- und Vorlesungspraxis. Zweiter Band. 218 S. 8°. Göschensche Verlagshandlung, Leipzig 1905.

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft. Dritter Jahrgang. B. G. Teubner, Leipzig 1904.

O. Staude, Analytische Geometrie des Punktes, der geraden Linie und der Ebene. Ein Handbuch zu den Vorlesungen und Übungen über analytische Geometrie. Mit 387 Figuren im Text. B. G. Teubner, Leipzig 1905.

O. Stolz, und **J. A. Gmeiner,** Einleitung in die Funktionentheorie. II. Abteilung. Mit 11 Figuren im Text. B. G. Teubner, Leipzig 1905.

A. Süß, Die Gruppen, die mit der allgemeinen projektiven Gruppe der Ebene gleiche Zusammensetzung haben. Dissert. 32 S. 8°. Greifswald. B. G. Teubner, Leipzig 1905.

J. Thomae, Grundriß einer analytischen Geometrie der Ebene. X, 184 S. 8°. B. G. Teubner, Leipzig 1906.

O. Toeplitz, Über Systeme von Formen, deren Funktionaldeterminante identisch verschwindet. Dissert. 48 S. 8°. Breslau 1905.

J. Torka, Die Flächen II. Ordnung in den mathematischen Getrieben. Ein System der Raumgetriebe. [Verhdlgn. d. Vereins z. Förderung des Gewerbefleißes].

Arthur Gordon Webster, The Dynamics of particles and of rigid, elastic and fluid bodies being lectures on mathematical physics. XI, 588 S. B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern. Band XI. 8°. B. G. Teubner, Leipzig 1904.

P. Wendland, Schlußrede der 48. Versammlung Deutscher Philologen und Schulmänner nebst einem Zukunftsprogramm. 20 S. 8°. B. G. Teubner, Leipzig 1905.

H. Wieleitner, Theorie der algebraischen Kurven höherer Ordnung. XXII, 313 S. 8°. Göschensche Verlagshandlung, Leipzig 1905.

W. Wien, Über Elektronen. Vortrag gehalten auf der 77. Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte in Meran. 28 S. 8°. B. G. Teubner, Leipzig 1905.

K. Wünschmann, Über Berührungsbedingungen bei Integralkurven von Differentialgleichungen. Dissert. 36 S. 8°. Greifswald. B. G. Teubner, Leipzig 1905.

J. Vonderlinn, Parallelperspektive. Rechtwinklige und schiefwinklige Axonometrie. Mit 121 Figuren. Göschensche Verlagshandlung, Leipzig 1905.

Berichtigungen zu dem Aufsatz:

Über eine Darstellung des Systems der absoluten Geometrie von L. Schlesinger, Band XIV.

S. 567, Gl. (6) ist m_1^2 statt m_1 zu setzen;

„ Zeile 12 v. u. fehlt die Gleichungsnummer (11);

„ „ 10 v. u. muß die Gleichung heißen:

$$\frac{d^2}{dr^2}\left[\left(\frac{\partial r_1}{\partial \varphi}\right)^2 + m_1^2\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} + K(r, \varphi)\left[\left(\frac{\partial r_1}{\partial \varphi}\right)^2 + m_1^2\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = 0;$$

„ Zeile 5 v. u. ist zu setzen

$$\left[\left(\frac{\partial r_1}{\partial \varphi}\right)^2 + m_1^2\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \omega.$$

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, mit Einschluß ihrer Anwendungen. Hrsg. im Auftrage der Akademien der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München und Wien, sowie unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen. In 7 Bänden zu je 6—8 Heften. gr. 8. geh.

Bisher erschien:

I. **Arithmetik und Algebra**, 2 Teile, red. von W. Frz. Meyer.
  I. Teil. [XXXVIII u. 554 S.] geh. *M* 17.—, in Halbfranz geb. *M* 20.—
  II. Teil. [X u. S. 555—1197] geh. *M* 19.—, in Halbfranz geb. *M* 22.—

II. **Analysis**, 2 Teile, red. von H. Burkhardt und W. Wirtinger.
  I. Teil. Heft: 1. [160 S.] 1899. *M* 4.80; 2./3. [240 S.] 1900. *M* 7.50; 4. [160 S.] *M* 4.80. 5. [199 S.] 1904. *M* 6.—
  II. Teil. Heft: 1. [175 S.] 1901. *M* 5.20.

III. **Geometrie**, 3 Teile, red. von W. Frz. Meyer.
  II. Teil. Heft: 1. [160 S.] 1903. *M* 4.80.
  II. Teil. Heft: 2. [96 S.] 1904. *M* 2.80.
  III. Teil. Heft: 1. [183 S.] 1902. *M* 5.40.
  —— Heft: 2/3. [256 S.] 1903. *M* 6.80.

IV. **Mechanik**, 2 Teile, red. von F. Klein u. C. H. Müller.
  I. Teil. I. Abt. Heft: 1. [121 S.] 1901. *M* 3.40; 2. [156 S.] 1902. *M* 4.60. 3. [156 S.] 1903. *M* 4.60.
  —— II. Abt. Heft: 1. [152 S.] 1904. *M* 4.40.
  II. Teil. Heft: 1. [147 S.] 1901. *M* 3.80; 2. [131 S.] 1903. *M* 3.80.

V. **Physik**, 2 Teile, red. von A. Sommerfeld.
  I. Teil. Heft: 1. [160 S.] 1903. *M* 4.80.
  —— Heft: 2. [159 S.] 1905. *M* 4.80.
  II. Teil. Heft: 1. [280 S.] 1904. *M* 8.—

VI. 2: **Astronomie**, red. von K. Schwarzschild.
  Heft: 1. [193 S.] 1905. *M* 5.80.

Unter der Presse:

VI. 1: **Geodäsie und Geophysik**, red. von Ph. Furtwängler und E. Wiechert.

In Vorbereitung:

VII. **Historische, philosophische und didaktische Fragen behandelnd, sowie Generalregister.**

Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées. Publiée sous les auspices des Académies des sciences de Göttingue, de Leipzig, de Munich et de Vienne avec la collaboration de nombreux savants. Édition française, rédigée et publiée d'après l'édition allemande sous la direction de Jules Molk, professeur à l'université de Nancy. En sept tomes. Tome I: vol. 1, fasc. 1. [160 pag.] gr. 8. 1904. n. *M* 4.—

Abraham, Dr M., Privatdozent an der Universität Göttingen, Theorie der Elektrizität. I. Band: Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität. Mit einem einleitenden Abschnitte über das Rechnen mit Vektorgrößen in der Physik. Von Dr. A. Föppl. Zweite, umgearbeitete Auflage von Dr. M. Abraham. Mit 11 Figuren im Text. [XVIII u. 443 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. geb. n. *M* 12.—. II. Band: Elektromagnetische Theorie der Strahlung. Von Dr. M. Abraham. [X u. 404 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. *M* 10.—

Ahrens, Dr. W., in Magdeburg, Scherz und Ernst in der Mathematik. Geflügelte und ungeflügelte Worte. [X u. 522 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. geb. n. *M* 8.—
—— mathematische Unterhaltungen und Spiele. [X u. 428 S.] gr. 8. 1901. In Original-Leinwandband mit Zeichnung von P. Bürck in Darmstadt n. *M* 10.—

Bachmann, Dr. Paul, Professor in Weimar, Zahlentheorie. Versuch einer Gesamtdarstellung dieser Wissenschaft in ihren Hauptteilen. Fünfter Teil. Allgemeine Arithmetik der Zahlenkörper. [XXII u. 548 S.] gr. 8. 1905. geh. n. *M* 16.—, in Leinw. geb. n. *M* 17.—

Bolyai de Bolya, Wolfgang, tentamen iuventutem studiosam in elementa matheseos purae elementaris ac sublimioris methodo intuitiva evidentiaque huic propria introducendi, cum appendice triplici. Editio secunda. Tomus II: Elementa geometriae et appendices. Mandato Academiae Scientiarum Hungaricae suis adnotationibus adiectis ediderunt Josephus Kürschák, Mauritius Réthy, Béla Tötössy de Zepethnek, Academiae Scientiarum Hungaricae sodales. 2 partt. 4. 1904. Pars I. Textus. [LXIII u. 437 S.] Pars II. Figurae. [VIII u. 82 lithogr. Tafeln.] In Halbkalbleder geb. n. *M* 40.—

Börnstein, Dr. R., und **Dr. W. Marckwald**, Professoren an der Universität Berlin, sichtbare und unsichtbare Strahlen. Mit 82 Abbildungen im Text. [VI u. 142 S.] 8. 1905. geh. *M* 1.—, in Leinw. geb. *M* 1.25.

Bruns, Dr. Heinrich, Professor der Astronomie an der Universität zu Leipzig, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmaßlehre. [VIII u. 310 S. u. Anhang 18 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. *M* 8.40.

Bucherer, Dr. A. H., Privatdozent an der Universität Bonn, mathematische Einführung in die Elektronentheorie. Mit 13 Figuren im Text. [IV u. 148 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. geb. n. *M* 3.20.
—— Elemente der Vektoranalysis. Mit Beispielen aus der theoretischen Physik. 2. Auflage. [VIII u. 103 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. *M* 2.40.

Cesàro, Ernesto, Professor der Mathematik an der Königl. Universität Neapel, elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung. Mit zahlreichen Übungsbeispielen. Nach einem Manuskript d. Verf. deutsch hrsg. von Dr. G. Kowalewski, Professor a. d. Universität Greifswald. Mit 97 Figuren im Text. [VI u. 894 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. geb. n. *M.* 15.—

Czuber, Hofrat Emanuel, Professor an der Technischen Hochschule zu Wien, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. 2 Bände. gr. 8.
I. Band. 2. sorgfältig durchgesehene Auflage. Mit 115 Figuren im Text. [XIV u. 560 S.] 1906. In Leinw. geb.
II. — Mit 78 Figuren im Text. [IX u. 428 S.] 1898. In Leinw. n. *M.* 10.—

Festschrift Adolph Wüllner gewidmet zum siebzigsten Geburtstage 13. Juni 1905 von der Königl. Technischen Hochschule zu Aachen, ihren früheren und jetzige Mitgliedern. Mit dem Bildnis A. Wüllners in Heliogravüre, 8 Tafeln und 91 Figuren im Text. [VIII u. 264 S.] gr. 8. 1905. geh. n. *M.* 8.—, geb. n. *M.* 9.—

Fisher, Dr. phil. Irving, Professor der Nationalökonomie an der Yale Universität, kurze Einleitung in die Differential- und Integralrechnung (Infinitesimalrechnung). Aus der durch mehrere Verbesserungen des Verfassers vervollständigten dritten englischen Ausgabe übersetzt von N. Pinkus. Mit 11 Figuren im Text. [VI u. 72 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. geb. n. *M.* 1.80.

Fleming, J. A., Professor der Elektrotechnik am University College zu London, elektrische Wellen-Telegraphie. 4 Vorlesungen. Autorisierte deutsche Ausgabe von Professor Dr. E. Aschkinaß, Privatdozent an der Universität Berlin. Mit 53 Abbild. [IV u. 185 S.] gr. 8. 1906. geh. n. *M.* 4.20, in Leinw. geb. n. *M.* 5.—

Föppl, Dr. Aug., Professor an der Königl. Technischen Hochschule zu München, Vorlesungen über technische Mechanik. In 4 Bänden. gr. 8. Preis des ganzen Werkes in 4 Leinwand-Bänden n. *M.* 44.—
I. Band. Einführg. i. d. Mechanik. 3. Aufl. M. 136 Fig. i. Text. [XVI u. 428 S.] 1905. geb. n. *M.* 10.—
II. — Graphische Statik. 2. Aufl. Mit 176 Fig. im Text. [XII u. 471 S.] 1903. geb. n. *M.* 10.—
III. — Festigkeitslehre. 3. Aufl. Mit 83 Fig. im Text. [XVI u. 434 S.] 1905. geb. n. *M.* 10.—
IV. — Dynamik. 2. Aufl. Mit 69 Fig. im Text. [XV u. 506 S.] 1901. geb. n. *M.* 12.—

Gans, Dr. Richard, Privatdozent an der Universität Tübingen, Einführung in die Vektoranalysis. Mit Anwendungen auf die mathematische Physik. Mit 31 Figuren im Text. [X u. 98 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. *M.* 2.80.

Heffter, Dr. L., Professor an der Universität Kiel, und **Dr. C. Koehler,** Professor an der Universität Heidelberg, Lehrbuch der analytischen Geometrie. I. Band: Geometrie in den Grundgebilden erster Stufe und in der Ebene. Mit 136 Figuren im Text. [XVI u. 528 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. *M.* 14.—

Jahnke, Dr. E., etatsmäßiger Professor an der Königl. Bergakademie zu Berlin, Vorlesungen über die Vektorenrechnung. Mit Anwendungen auf Geometrie, Mechanik und mathematische Physik. Mit 32 Figuren im Text. [XII u. 235 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. *M.* 5.60.

Klein, Geheimer Regierungsrat Dr. **F.,** und Dr. **E. Riecke,** Professoren an der Universität Göttingen, neue Beiträge zur Frage des mathematischen und physikalischen Unterrichts an höheren Schulen. Vorträge, gehalten bei Gelegenheit des Ferienkurses für Oberlehrer der Mathematik und Physik, Göttingen, Ostern 1904. Enthaltend Beiträge der Herren O. Behrendsen, E. Bose, E. Götting, F. Klein, E. Riecke, F. Schilling, J. Stark, K. Schwarzschild. gr. 8. 1904. Teil I. Mit 6 Figuren im Text. [VIII u. 190 S.] geh. n. *M.* 3.60. Teil II. Mit 151 Figuren und 5 Doppeltafeln. [VI u. 198 S.] geh. n. *M.* 4.60, geb. n. *M.* 5.— Beide Teile in einen Band geb. n. *M.* 8.60.

Kohlrausch, Wirkl. Geh. Oberregierungsrat, Prof. Dr. **F.,** in Marburg, Lehrbuch der praktischen Physik. Zehnte, vermehrte Auflage des Leitfadens der praktischen Physik. Mit zahlr. Figuren im Text. [XXVIII u. 656 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. *M.* 9.—

Leibniz, G. W., nachgelassene Schriften physikalischen, mechanischen und technischen Inhalts. Herausgegeben und mit erläut. Anmerk. versehen von Dr. E. Gerland, Professor an der Kgl. Bergakademie in Klausthal. Mit 200 Figuren im Text. A. u. d. T.: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. XXI. Heft. [VI u. 256 S.] gr. 8. 1906. geh. n. *M.* 10.—

JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN
MATHEMATIKER-VEREINIGUNG

IN MONATSHEFTEN HERAUSGEGEBEN VON

A. GUTZMER

IN HALLE A. S.

15. BAND. 2. HEFT. FEBRUAR.

AUSGEGEBEN AM 28. FEBRUAR 1906.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1906.

JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG.

IN MONATSHEFTEN HERAUSGEGEBEN VON A. GUTZMER IN HALLE A. S.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

☞ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Bücher usw.) sind an

Prof. Dr. A. Gutzmer in Halle a. S., Martinsberg 8,

zu richten.

☞ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich: von größeren Aufsätzen 25 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen und Mitteilungen 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☞ Jeder Band des Jahresberichts in Monatsheften umfaßt vom 12. Bande ab 38 Bogen (= 608 Druckseiten) und kostet für Mitglieder der Vereinigung, Porto inbegriffen, Mark 14.70, für Nichtmitglieder Mark 18.—. Mitglieder haben ihr Abonnement bei der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig, Poststraße 3, aufzugeben, Nichtmitglieder dagegen bei einer Sortimentsbuchhandlung.

☞ Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung zählt z. Zt. über 660 Mitglieder. Der jährliche Mitgliedsbeitrag beträgt 2 Mark, kann aber auch durch einmalige Zahlung von 30 Mark abgelöst werden. Beitrittserklärungen nimmt der Schriftführer der Vereinigung, Prof. Dr. A. Krazer, Karlsruhe in Baden, Westendstraße 57, oder die oben genannte Verlagsbuchhandlung entgegen. Die Ablösungssumme bezw. der Jahresbeitrag ist an die Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig einzusenden.

INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.

Die preußischen Lehrpläne für den mathematischen Unterricht am Gymnasium und die Vorschläge der Breslauer Unterrichtskommission.

Von Max Nath in Nordhausen.

Die Vorschläge für die Neugestaltung des mathematischen Unterrichts, welche die in Breslau 1904 ernannte Unterrichtskommission im September 1905 der Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte in Meran vorgelegt hat, nehmen sicherlich das Interesse jedes Lehrers der Mathematik im höchsten Maße in Anspruch. Entsprechend der Bedeutung der Stelle, von der sie ausgingen, hat die preußische Unterrichtsverwaltung ja auch bei einer Anzahl höherer Lehranstalten die Möglichkeit geschaffen, ihre genauere Ausgestaltung im Unterricht zu versuchen und ihre Durchführbarkeit zu prüfen. Das Urteil der mit dieser Aufgabe betrauten Fachgenossen wird gewiß in erster Linie für die weitere Entwicklung der so wichtigen Angelegenheit maßgebend sein. Aber auch jeder andere wird versuchen nach seinen Erfahrungen und theoretischen Überzeugungen zu ihr Stellung zu nehmen, und da die Kommission selbst eine möglichst breite Diskussion ihrer Vorschläge als erwünscht bezeichnet, wird auch die rein literarische Erörterung der Sache ihre Berechtigung haben.

Es soll also versucht werden, *die* Frage in einigen Punkten der Entscheidung etwas näher zu führen, ob der von der Kommission vorgelegte Lehrplan in der dem humanistischen Gymnasium zur Verfügung stehenden Zeit, — unter der Voraussetzung allerdings, daß der Tertia vier Stunden zuerteilt werden — bewältigt werden kann, welche Gebiete dabei etwa stofflich zu beschränken, in welcher Art die Methodik zu ändern sein wird. Unberührt soll die Entscheidung darüber bleiben, ob das Realgymnasium unbeschadet seiner Eigenart es zulassen kann, daß Stundenzahl und Ziel des mathematischen Unterrichts dem des Gymnasiums angeglichen wird. Unabweislich aber ist mit der Behandlung der zur Tagesordnung stehenden Frage eine dauernde Rücksichtnahme auf die zur Zeit für Preußen geltenden Lehrpläne verbunden. Des-

wegen, und weil auf diesem Wege durch typographische[1]) Hervorhebung mancherlei an Übereinstimmungen und Abweichungen leicht ins Auge springt, folgt zunächst eine übersichtliche Nebeneinanderstellung des allgemeinen Lehrziels, der Lehraufgaben der einzelnen Klassen und der Zielleistungen.

Lehrziel.

Preußische Lehrpläne von 1901

Sicherheit und Gewandtheit im Rechnen mit bestimmten Zahlen, besonders auch im Kopfrechnen, und in der Anwendung dieser Fertigkeiten auf die gewöhnlichen Verhältnisse des bürgerlichen Lebens. Arithmetik bis zur Entwicklung des binomischen Lehrsatzes für ganze positive Exponenten. Algebra bis zu den Gleichungen zweiten Grades einschließlich. Die ebene und körperliche Geometrie und die ebene Trigonometrie. Der Koordinatenbegriff. Einige Grundlehren von den Kegelschnitten.

Vorschläge von 1905.

1. Ein wissenschaftlicher Überblick über die Gliederung des auf der Schule behandelten mathematischen Lehrstoffs,
2. eine gewisse Fertigkeit der mathematischen Auffassung und ihrer Verwertung für die Durchführung in Einzelaufgaben,
3. endlich und vor allem die Einsicht in die Bedeutung der Mathematik für die exakte Naturerkenntnis und die moderne Kultur überhaupt.

Lehraufgabe der einzelnen Klassen.

VI.

Die Grundrechnungsarten mit ganzen Zahlen, *unbenannten und benannten*. Die deutschen Maße, Gewichte und Münzen nebst Übungen in der dezimalen Schreibweise und den einfachen dezimalen Rechnungen. Vorbereitung der Bruchrechnung.

Die Grundrechnungsarten mit ganzen Zahlen, *benannten und unbenannten,* **im beschränkten Zahlbereich.** Die deutschen Maße, Gewichte und Münzen. Übungen in der dezimalen Schreibweise und in den einfachen dezimalen Rechnungen, **als** Vorbereitung für die Bruchrechnung.

V.

Teilbarkeit der Zahlen. Gemeine Brüche. Fortgesetzte Übungen mit benannten Dezimalzahlen wie in VI. [Einfache Aufgaben aus der Regeldetri (durch Schluß auf die Einheit oder ein gemeinschaftliches Maß zu lösen).]

Rechnen. Fortgesetzte Übung im Rechnen mit benannten Dezimalzahlen, [unter Erweiterung des Gebietes der zur Verwendung kommenden Maße (auch ausländischer Gewichte und Münzen)]. **Längenmessungen verschiedener Art (auch im Gelände); einfachste Aufgaben**

---

1) Erklärung der typographischen Hervorhebungen:
[ ] = Auslassungen auf der einen oder andern Seite.
Gesperrt = Umsetzungen an andere Stellen (Klassen).
Kursiv = Veränderungen der Ausdrucksweise und Zutaten von nicht grundsätzlicher Bedeutung.
Fett = Grundsätzliche Änderungen und Zusätze.

Preußische Lehrpläne von 1901.	Vorschläge von 1905.
	der Flächen- und Raumberechnung unter Verwertung des Zusammenhanges zwischen Rauminhalt und Gewicht. (Bei allen derartigen Rechnungen ist stets ein Überschlag der Größenwertung des Ergebnisses vorauszuschicken). Teilbarkeit der Zahlen. Gemeine Brüche [(zunächst als benannte Zahlen)].
	Propädeutische Raumlehre. Einführung in die Grundbegriffe der Raumanschauung, jedoch derart, daß der Raum vorwiegend als Träger planimetrischer Beziehungen erscheint. Raumausdehnungen, Flächen, Linien, Punkte zunächst an der Umgebung erläutert und bestätigt an den verschiedensten Körpern. Ebene Figuren zunächst als Teil der Körperbegrenzung, dann als selbständige Gebilde, **an welchen die Begriffe der Richtung, des Winkels, des Parallelismus, der Symmetrie zum Verständnis zu bringen sind.** Übungen im Gebrauche des Lineals und Zirkels, beständiges Zeichnen und Messen.

IV.

Preußische Lehrpläne von 1901.	Vorschläge von 1905.
Rechnen. Dezimalbruchrechnung. Einfache und zusammengesetzte Regeldetri mit ganzen Zahlen und Brüchen; Aufgaben aus dem bürgerlichen Leben, namentlich die einfachsten Fälle der Prozent-, Zins- und Rabattrechnung.	**Rechnen.** Dezimalbruchrechnung. [Abgekürztes Rechnen (an einfachsten Beispielen).] Regeldetri unter Vermeidung aller Übertreibung schematischer Formen. Aufgaben aus dem bürgerlichn Leben, insbesondere einfache Fälle der Prozent- (Zins-. Rabatt-)Rechnung. **Vorbereitung des arithmetischen Unterrichts durch Wiederholung geeigneter, früher gelöster Aufgaben unter Anwendung von Buchstaben statt bestimmter Zahlen. Deutung vorgelegter Buchstabenausdrücke und Auswertung solcher Ausdrücke durch Einsetzung bestimmter Zahlwerte. Zusammenhang der Kopfrechenregeln mit den Klammerregeln.**
Planimetrie. Propädeutischer geometrischer Anschauungsunterricht. Übungen im Gebrauch von Zirkel und Lineal. Lehre von den Geraden, Winkeln und Dreiecken.	**Raumlehre.** Lehre von den Geraden, Winkeln und Dreiecken. **Beweglichkeit der Figuren; Abhängigkeit der Dreiecksstücke voneinander; Übergangsfälle (rechtwinklige Dreiecke, gleichschenk-**

Preußische Lehrpläne von 1901. | **Vorschläge von 1905.**

Vorschläge von 1905 (Fortsetzung): **lige, gleichseitige).** Einfache Parallelogrammsätze, ausgehend von der Konstruktion der Gebilde.

U III.

Preußische Lehrpläne von 1901:

Arithmetik. Die Grundrechnungen mit absoluten Zahlen und *Einführung der positiven und negativen Zahlengrößen unter Beschränkung auf das Notwendigste.* Bei den Übungen sind auch Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten zu benutzen.

Planimetrie. Erweiterung der Dreieckslehre. Lehre von den Parallelogrammen, den Sehnen und Winkeln am Kreise. Konstruktionsübungen.

Vorschläge von 1905:

Arithmetik. Systematische Zusammenfassung der Grundrechnungsregeln durch Buchstabenformeln. *Begriff der relativen Größe, entwickelt an praktischen Beispielen und veranschaulicht durch die beiderseits unendlich ausgedehnte Zahlenlinie. Rechenregeln für relative Größen.* **Fortsetzung der Übungen in Auswertung von Buchstabenausdrücken unter Heranziehung der negativen Größen und steter Betonung des funktionalen Charakters der auftretenden Größenveränderungen.** Anwendung auf reine und eingekleidete Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten. Unterschied zwischen identischen und Bestimmungsgleichungen.

Raumlehre. Erweiterung der Lehre vom Parallelogramm. Das Trapez. Fundamentale Sätze der Kreislehre. **Betrachtung des Einflusses, den die Größe- und Lageänderung einzelner Stücke auf den Gesamtcharakter der Figur ausübt.** Konstruktionen im engen Anschluß an den Lehrgang unter Ausschluß der nur durch Kunstgriffe lösbaren Aufgaben.

O III.

Preußische Lehrpläne von 1901:

Arithmetik. Wiederholung der Bruchrechnung in Anwendung auf Buchstabenausdrücke. Ergänzung des in U III Gelernten. Einfache Sätze der Proportionslehre. Gleichungen ersten Grades mit einer und mehreren Unbekannten. [Potenzen mit positiven ganzzahligen Exponenten.]

Planimetrie. Wiederholung und Fortsetzung der Kreislehre. Sätze über die Flächengleichheit der Figuren (Pytha-

Vorschläge von 1905:

Arithmetik. Ergänzung und Erweiterung der Buchstabenrechnung, namentlich Zerlegung von Polynomen. Einfachste Sätze über Proportionen. Reine und eingekleidete Gleichungen ersten Grades mit einer und mehreren Unbekannten. **Abhängigkeit eines Größenausdrucks von einer in ihm auftretenden Variabeln. Graphische Darstellung einfacher linearer Funktionen und Benutzung dieser Darstellung zur Auflösung von Gleichungen.**

Raumlehre. Flächenvergleichung und Flächenberechnung [unter Heranziehung von Gebilden mit verwickelterer gerad-

Preußische Lehrpläne von 1901.

goreischer Lehrsatz). Berechnung der Flächen geradliniger Figuren. Konstruktionsaufgaben.

Vorschläge von 1905.

liniger Begrenzung]. Annäherungsberechnung krummlinig begrenzter Flächenstücke. [Wiederholung der etwa in Quinta vorgekommenen Raumberechnungen.] Aufgaben wie in Untertertia.

U II.

Preußische Lehrpläne von 1901.

Arithmetik. Lehre von den Potenzen, Wurzeln und Logarithmen. Übungen im Rechnen mit (fünf- oder vierstelligen) Logarithmen. Einfache quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten.

Planimetrie. Ähnlichkeitslehre, Proportionalität gerader Linien am Kreise, stetige Teilung. Regelmäßige Vielecke. Kreisumfang und -inhalt. [Konstruktionsaufgaben.]

Vorschläge von 1905.

Arithmetik. Potenzen und Wurzeln. Reine und eingekleidete Gleichungen zweiten Grades mit einer Unbekannten. Zusammenhang zwischen Koeffizienten und Wurzeln. **Betrachtung des von einer Variabeln abhängenden quadratischen Ausdrucks in seiner dadurch bedingten Veränderlichkeit unter graphischer Darstellung. Lösung von Aufgaben zweiten Grades mit einer Unbekannten durch Schnitte von Geraden und Parabeln. Betrachtung der graphischen Darstellung als Mittel zur Veranschaulichung empirisch gefundener Zusammenhänge.**

Raumlehre. Ähnlichkeitslehre unter besonderer Verwertung der Ähnlichkeitslage. Proportionen am Kreise. Berechnung von Näherungswerten für Kreisumfang und Kreisinhalt durch polygonale Annäherung. **Eingehende Verfolgung der gegenseitigen Abhängigkeit von Seitenverhältnissen und Winkelarten bei Dreiecken, besonders bei den rechtwinkligen. Aufstellung und Erprobung von Tabellen für diese Abhängigkeit (als Vorbereitung für die Trigonometrie) im Anschluß daran praktische Aufgaben (Aufnahmen am Meßtisch).**

O II.

Preußische Lehrpläne von 1901.

Arithmetik. Gleichungen, besonders quadratische, mit mehreren Unbekannten.

Vorschläge von 1905.

Arithmetik. **Erweiterung des Potenzbegriffes, Auffassung der Potenz als Exponentialgröße,** Begriff und Anwendung des Logarithmus. Arithmetische Reihen erster Ordnung und geometrische Reihen, Anwendung der letzteren auf Zinseszins- und Rentenrechnung (in einfachsten, der Wirklichkeit entnommenen Aufgaben). **Graphische Darstellung der Abhängigkeit**

Preußische Lehrpläne von 1901.

Planimetrie. Einiges über harmonische Punkte und Strahlen [sowie über Transversalen. Anwendung der Algebra auf die Geometrie. Konstruktionsaufgaben, besonders auch solche mit algebraischer Analysis.]

Trigonometrie. Goniometrie. Einfache Dreiecksberechnungen.

Vorschläge von 1905.

von Numerus und Logarithmus. Rechentabellen. Lösung quadratischer Gleichungen mit zwei Unbekannten sowohl durch Rechnung als durch graphische Darstellung.

Raumlehre. Trigonometrie unter Anknüpfung an die konstruktive Planimetrie. **Anwendung zu praktischen Aufgaben der Dreiecks- und Vierecksmessung. Charakterisierung der gegenseitigen Abhängigkeit zwischen der Winkeländerung und der Funktionsänderung durch die Formeln der Goniometrie; graphische Darstellung dieser Abhängigkeit.** *Behandlung geeigneter Aufgaben auf mehrfachem Wege, konstruktiv und mit Hinzunahme der Rechnung.* Eingehen auf die harmonischen Beziehungen und die Grundlagen der neueren Geometrie als Abschluß der Planimetrie.

I.

U und O I.

Arithmetik. Arithmetische Reihen erster Ordnung und geometrische Reihen, Zinseszins- und Rentenrechnung. Grundlehren der Kombinatorik und ihre nächstliegende Anwendung auf die Wahrscheinlichkeitslehre. [Binomischer Lehrsatz für ganze, positive Exponenten. Wiederholender Aufbau des arithmetischen Lehrganges (Erweiterung des Zahlenbegriffs durch die algebraischen Operationen von der positiven bis zur komplexen Zahl). Gleichungen, auch solche höherer Grade, die sich auf quadratische zurückführen lassen.]

Fortsetzung der Übungen in der **Trigonometrie** [und im Lösen **planimetrischer Konstruktionsaufgaben**].

Stereometrie und deren Anwendung auf die mathematische Erd- und Himmelskunde. Anleitung zum perspektivischen Zeichnen räumlicher Gebilde.

Der **Koordinatenbegriff.** Einige Grundlehren von den **Kegelschnitten.**

U I.

Arithmetik. Zusammenhängende Betrachtung der bisher aufgetretenen Funktionen in ihrem Gesamtverlauf nach Steigen und Fallen (ebenso Heranziehung der Begriffe des Differentialquotienten und des Integrals) mit Benutzung zahlreicher Beispiele aus der Geometrie und Physik, insbesondere der Mechanik. Einfachste Sätze der Kombinatorik mit einigen Übungsbeispielen.

Raumlehre. Stereometrie unter Berücksichtigung der wichtigsten Elemente der Projektionslehre. Übungen im geometrischen Zeichnen. [Einfachste Sätze der sphärischen Trigonometrie.] Mathematische Geographie, [einschließlich der Lehre von den Kartenprojektionen].

O I.

1. Kegelschnittslehre sowohl in analytischer als in synthetischer Behandlung, [mit Anwendung auf die Elemente der Astronomie].
2. Wiederholungen aus dem Gesamt-

Preußische Lehrpläne von 1901.	Vorschläge von 1905.
Ergänzungen, Zusammenfassungen und Übungen auf allen Gebieten der vorhergehenden Klassen.	gebiet des mathematischen Schulunterrichts, *womöglich an der Hand größerer Aufgaben, die rechnerisch und zeichnerisch durchgeführt werden müssen.* 3. Rückblicke unter Heranziehung geschichtlicher und philosophischer Gesichtspunkte.

Zielleistungen.

Bearbeitung von vier mathematischen Aufgaben aus vier verschiedenen Gebieten.	Verlangt wird einerseits eine **zusammenhängende Darstellung eines allgemeinen Themas**, andrerseits die vollständige (**rechnerische und zeichnerische**) Behandlung einer Aufgabe. Ebenso dürfte bei der mündlichen Prüfung **mehr Gewicht auf das Verständnis als auf das Auswendigwissen vieler spezieller Formeln** zu legen sein.

Beschränken wir unsere Betrachtungen zunächst auf die Lehraufgaben der unteren Klassen, so zeigt sich dem ersten Blick eine nicht ganz unbeträchtliche Stoffvermehrung. Sie besteht in der Verlegung der propädeutischen Raumlehre nach V, in der Forderung, daß der Rechenunterricht dieser Klasse sich mit Flächen- und Raumberechnungen zu befassen habe, in der weiteren, daß die IV im Rechenunterricht die abgekürzte Dezimalrechnung lehren und den arithmetischen Unterricht durch die Deutung und Auswertung von Buchstabenausdrücken vorbereiten solle. Dazu kommt, daß in dieser Klasse in der Raumlehre die ganze Dreieckslehre und die einfachsten Parallelogrammsätze erledigt werden sollen. Völlig abweichend von den Lehrplänen ist allerdings nur die Vorwegnahme der planimetrischen Lehrstoffe. — Die methodischen Bemerkungen hatten unter Nr. 2 vorgeschrieben, es solle, „sowohl die Wiederholung der Grundrechnungsaufgaben in VI als auch die Behandlung des Bruchrechnens unter Anlehnung an die mathematische Form geschehen, so daß dabei auch die Verwendung von Klammern und Vorzeichen dauernd geübt wird.“ Unzweifelhaft hat aber die Einfügung der Vorschrift deshalb stattgefunden, um die Wichtigkeit dieser Übungen nach Gebühr noch stärker hervorzuheben. Sollen sie den Wert haben, der ihnen zukommen kann, so dürfen sie nicht ganz nebenbei betrieben werden, sie müssen, wenn auch nicht ganze Stunden füllend, doch als ein ständiger Teil des Rechenunterrichts, nach Art der Kopfrechenaufgaben, behandelt werden. So ist es bisher wohl selten geschehen, teil-

weise, weil den Lehrern, die auf dieser Stufe ja leider immer noch vielfach die Elementarlehrer der Anstalt sind, Verständnis und die Möglichkeit, sich dieses zu erarbeiten, abging. In jüngster Zeit sind brauchbare Hilfsmittel[1]) entstanden, und es ist zu hoffen, daß dieser Seite des Quartanerunterrichts nun mehr Beachtung geschenkt werden wird. Die für die Erledigung der Lehraufgabe zur Verfügung stehende Zeit wird dadurch aber eingeschränkt. Und sie ist schon knapp genug. Die zusammenhängende und systematische Einführung in das Verständnis der Dezimalbruchrechnung ist schon jetzt nur bei weisester Zeiteinteilung zu erreichen, die Behandlung der Regeldetri und Zinsrechnung muß auf das Allernotwendigste beschränkt werden. Dadurch, daß die in VI begonnenen ersten Übungen in der Dezimalrechnung auch in V weitergeführt werden sollen, mag ja einige Erleichterung eintreten. Und sicherlich ist es nicht beabsichtigt, die Regeldetri erst in IV *beginnen* zu lassen. Wenn die Vorschriften der Lehrpläne, die den Beginn nach V setzen, nicht übernommen sind, so ist das wohl als ein Übersehen aufzufassen. Wenn also schon von VI ab als Anwendungen des Lehrstoffs der Klassen besonders im Kopfrechnen auch einfache Aufgaben aus der Regeldetri- und Zinsrechnung verwendet werden, *stehend* das ganze Jahr hindurch verwendet werden, so mag diese Vorübung die Kürzung der Zeit in IV etwa ausgleichen können.

Sehr bedenklich verringert wird aber die für die Einübung der gewöhnlichen Bruchrechnung bestimmte Zeit. Die Lehrpläne von 1901 enthalten für VI die Vorschrift: Vorbereitung der Bruchrechnung. Ist in den Vorschlägen daraus geworden: Übungen etc. . . . *als* Vorbereitung für die Bruchrechnung, so ist damit aus der VI ein Stück Pensum ausgeschaltet und nach V verschoben. Die dezimale Schreibweise, in welcher zunächst doch die Dezimalbrüche auftreten, läßt den Begriff des *Bruches* gegenüber dem der *Stelleneinheit* ziemlich weit zurücktreten; die Lehrpläne und wohl auch die Vorschläge ihrerseits beabsichtigen in erster Linie, das Rechnen mit dezimalen Zahlen *wie mit ganzen Zahlen* einzuüben. Es heißt einen fremden, dem Schüler nicht leicht zugänglichen Gedanken einführen, wenn diese Übungen auch als Vorübungen zur eigentlichen Bruchrechnung benutzt werden. Gemeint war mit dieser Vorschrift der Lehrpläne wohl, was die methodischen Bemerkungen unter Nr. 2 sagen: „Ebenso ist die Einführung und das Wesen der Brüche anschaulich zu gestalten und bei den Erklärungen davon auszugehen, daß die Schüler mit Bruchteilen wie mit benannten Zahlen

1) H. Müller und F. Pietzker, Rechenbuch für die unteren Klassen der höheren Lehranstalten. Leipzig 1903, B. G. Teubner. S. 245—274, wo des Guten eher vielleicht zu viel getan ist.

(die Lehrpläne von 1892 sagten noch besser: mit konkreten Dingen) rechnen lernen." Diese Formulierung der Vorschrift schließt sich organisch an die sonstigen Lehraufgaben der Klasse an, und sie ermöglicht zugleich in V einen leichten Übergang zu der abstrakten Bruchrechnung, gewissermaßen einen Übergang von der Rechnung mit benannten zu der mit unbenannten Zahlen.[1])

Von drei Seiten wird also der Einübung der Bruchrechnung der Raum verengt. Aus VI ist sie so gut wie verbannt, in V hat sie nicht mehr vier, sondern nur drei Stunden zur Verfügung, und sie muß auch diese noch mit den Übungen in der Flächen- und Raumausrechnung teilen. Die Aufgabe könnte unlösbar erscheinen, wenn nicht die Erläuterungen der Vorschläge zu ihrem Lehrplan und die Worte an der Spitze der Lehraufgaben für VI den Weg wiesen. „Im Rechenunterricht der unteren Klassen wird der Zahlenkreis, dem die Beispiele zu entnehmen sind, gehörig einzuschränken, Zahlen, die über 100 000 hinausgehen, werden zu vermeiden sein." „Die Grundrechnungsarten . . . *im beschränkten Zahlenbereich.*" Für die Bruchrechnung wird das noch schärfer zu betonen sein. Vor anderthalb Jahrzehnten schwelgte der Rechenunterricht in mancherlei Luxus. Es erschien als Ruhm, konnten die Klassen mit Sicherheit die Primzahlen bis 400 oder noch weiter angeben, Additionsaufgaben mit ungleichnamigen Brüchen ausführen, deren Nenner vier- oder fünfstellige Zahlen waren, die Aufgaben für Haus und Klassen brachten die Notwendigkeit Brüche zu kürzen, die fünf- und sechsstellige Zähler oder Nenner hatten, in denen Primzahlen zwischen 400 und 500 und noch höher hinauf enthalten waren. Wieviel Zeit es kostete, auch nur den besseren Teil dahin zu führen, ist leicht einzusehen. Ob es sich seitdem überall geändert hat? Einsicht in das Mögliche und noch mehr in das Nötige mag zur Minderung der Ansprüche geführt haben, *jetzt* wird Beschränkung zur Notwendigkeit. *Sicherheit* und *Gewandtheit* im Bruchrechnen, soweit es in dem praktischen Leben und in der Wissenschaft Verwendung findet, kann erreicht werden, ohne daß derartige Ansprüche gestellt werden, die Verkleinerung des Übungsfeldes wird sie im Gegenteil erhöhen. Mit dieser aber muß Ernst gemacht werden, und ob dann die gebräuchlichen Aufgabensammlungen nicht eine energische Säuberung werden erfahren müssen, bleibe jetzt unerörtert.

Der geometrische Lehrstoff, der der Unterstufe zugewiesen ist, schließt sich ganz glücklich zu einem Ganzen zusammen, planimetrische

1) Hier haben in VI die Vorschläge die präzisere Fassung. In der natürlichen Folge geht das Rechnen mit benannten Zahlen dem mit unbenannten voran.

und stereometrische Einsichten elementarster Art vermittelnd. Die dem Rechenunterricht der V zugewiesenen Übungen im Ausmessen und Berechnen von Flächen und Räumen möchten wir als eine glückliche Ergänzung zu der propädeutischen Raumlehre betrachten, die eine Brücke zwischen den beiden Disziplinen schlägt. Neu ist der Gedanke ja keineswegs, in Wirklichkeit umgesetzt worden ist er freilich wohl nur an einzelnen Stellen.[1]) Daß die Ansichten, wie und in welcher Ausdehnung propädeutische Raumlehre zu erteilen sei, noch immer stark auseinandergehen, ist aus der Literatur des Gegenstandes leicht zu ersehen.[2]) Die Vorschriften der Vorschläge sind etwas mehr ins einzelne gehend als die der Lehrpläne, die von dem Vorbereitungsunterricht nur verlangen, daß er „von der Betrachtung einfacher Körper ausgehend das Anschauungsvermögen ausbildet und zugleich Gelegenheit gibt, die Schüler im Gebrauch von Zirkel und Lineal zu üben.“ Vor dem zu langen Verweilen bei Betrachtungen körperlicher Verhältnisse scheinen die Vorschläge, — und mit Recht — zu warnen, wenn sie verlangen, daß „der Raum vorwiegend als Träger planimetrischer Beziehungen“ erscheinen soll.[3])

Welche Methode anzuwenden sei, um im geometrischen Anfangsunterricht den Stoff den Schülern nahe und zum Verständnis zu bringen, darüber haben wir in der oben angeführten kurzen Abhandlung unsere Ansichten ausgesprochen.[4]) Mit ihnen trifft an manchen Punkten zusammen, was die Erläuterungen der Vorschläge darüber sagen: „er wird auf das sorgfältigste vermeiden müssen, Dinge, die dem natürlichen Gefühl als selbstverständlich erscheinen, durch eine pedantische Beweisführung dem Verständnis zu entfremden, vielmehr alle logischen Beweise zu einem Bewußtwerden der ganz von selbst im Geiste auftretenden Erwägungsmomente zu gestalten suchen, mit dieser Behandlung aber auch erst allmählich einsetzen.“ Die Lebhaftigkeit, mit der diese Gesichtspunkte hier und auch in der Lehrbuchliteratur sonst[5]) noch

1) Vgl. M. Simon, Über den einleitenden geometrischen Unterricht auf Quarta (Jahresb. d. Deutsch. Math.-Ver. XIII, S. 279 ff.).

2) Vgl. z. B. M. Nath, Zur Methodik des geometrischen Anfangsunterrichts (Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht 36, S. 1—8).

3) Vgl. G. Holzmüller, Vorbereitende Einführung in die Raumlehre. Leipzig 1904, B. G. Teubner.

4) a. a. O. S. 3 und 6.

5) Vgl. auch: K. Schwering und W. Krimphoff, Ebene Geometrie. 5. Aufl. Freiburg i. Br. 1905, Herder. Vorrede: „Wir beabsichtigen die Raumlehre so vorzutragen, wie sie von dem jugendlichen Geiste am leichtesten erfaßt und verarbeitet werden kann, nicht aber zugleich allen wissenschaftlichen Anforderungen zu genügen. . . . . Endlich ist es im Anfangsunterricht gerade das logische Element, welches dem kindlichen Geiste die größten Schwierigkeiten bereitet. Wer

immer betont werden, läßt darauf schließen, daß sie keineswegs ein Gemeingut der Lehrerwelt geworden sind, daß vielmehr ein heftiger Widerstand mühsam und mit erst allmählich sich einstellendem Erfolge zu bekämpfen ist. Und so ist es wohl wirklich. In der öffentlichen Erörterung tritt der Gegensatz nicht sehr zutage, da die Partei der Konservativen sich auf ein passives Beharren bei ihren Anschauungen beschränkt, aber das Dasein ist dem Kundigen wohl bekannt, er beobachtet die Ergebnisse ihrer Arbeit an den eigenen Schülern, er empfindet das Widerstreben schnell, wo es sich darum handelt, für die Zusammenarbeit übergreifende Grundsätze aufzustellen. Aber doch wird erst die Besiegung dieses Widerstrebens, die Abkehr von dem Ideal streng-wissenschaftlichen Betriebes, zu Unterrichtsergebnissen führen, die von dem Alter und der geistigen Ausbildung der Knaben erwartet werden können, und die dem mathematischen Unterricht der Oberstufe die geeignete Unterlage bieten, Anregung und Erwartung, an Stelle von Verlehrtheit und Abneigung. Wir stimmen A. Höfler völlig bei, wenn er von dem mathematischen Unterricht sagt: „Dieser soll auf der Unterstufe die Schüler vor allem mit mathematischen *Einzeltatsachen* bekannt machen, sie erst auf der Mittelstufe deren *logische Verknüpfung* verstehen lehren, endlich auf der Oberstufe den *logischen Formen des mathematischen Denkens als solchen* ein in charakteristischen Fällen sogar noch intensiveres Interesse als dem mathematischen Inhalt selbst zuwenden."[1]) Wie restlos durchführbar die Vorschriften der Lehrpläne sind, auch wenn der mathematische Unterricht auf der Unter- und selbst auf der Mittelstufe unter Zurücktreten der logischen Beweisführung wesentlich auf die Anschauung begründet wird, davon hatten wir Gelegenheit an deutschen Schulen persönlich Kenntnis zu nehmen.[2])

es versucht, den Begriff des Winkels einem Quartaner logisch klar zu machen oder ihm durch einen Beweis die Überzeugung beizubringen, daß alle rechten Winkel gleich sind, der wird viele Mühe umsonst aufwenden und bei genauerem Zusehen gewahren, daß der Schüler die vorgetragenen Erklärungen und Beweise auswendig gelernt hat ohne inneres Verständnis. Daher wendet sich der Unterricht zuerst und fast ausschließlich an die Anschauung. . . . Hat der Lernende so (sc. durch Zeichnung) einen gewissen Vorrat mathematischer Begriffe und Kenntnisse durch Anschauung erworben, so kann die eigentliche Denkarbeit beginnen, der Stoff kann nach Begriffen und Urteilen geordnet und durch Schlußketten eigentlich logisch verknüpft werden. Auf dieser Stufe erkennt der Lernende selbst die Notwendigkeit eines Beweises und fragt nicht mehr unwillig, was denn an einer so klaren Sache eigentlich zu beweisen sei."

1) Vgl. A. Höfler, Vortrag auf der XIV. Hauptversammlung des Vereins zur Förderung des math. u. naturw. Unterrichts in Jena 1905. (Unterrichtsbl. für Math. u. Naturw. hrsg. von F. Pietzker. XI, S. 97.)

2) am Real- und Reformgymnasium zu Karlsruhe i. B. (Direktor Treutlein).

Bei solchem Unterricht, der natürlich von Modellen, festen und beweglichen, der Schule gehörigen und von den Schülern selbst gefertigten, den ausgiebigsten Gebrauch machen wird, wird die Forderung der Vorschläge, die Abhängigkeit der Figurenstücke voneinander zu beobachten, die Übergangsfälle ins Auge zu fassen, ohne Schwierigkeiten durchzuführen sein. An vielen Stellen wird derartigen Betrachtungen ohnedies schon ein größerer Raum gegeben worden sein.

Unter der Voraussetzung also, daß mit der Beschränkung des Übungsstoffes auf die Verwendung kleinerer Zahlen besonders in der Bruchrechnung, mit der Vermeidung von rein formal in Betracht kommenden komplizierten Aufgaben Ernst gemacht wird, daß der Unterricht in der Raumlehre nicht nur in seinem propädeutischen Teil, sondern auch später noch vorwiegend anschaulich gestaltet wird, darf damit gerechnet werden, daß die Lehraufgaben der Unterstufe sich werden bewältigen lassen.

Wenden wir uns nun der Mittelstufe, den Klassen U III bis U II zu, so kann festgestellt werden, daß hier die Lehraufgaben der offiziellen Lehrpläne und diejenigen der Unterrichtskommission dem Inhalte nach nur ganz geringfügige Verschiebungen aufweisen. Hauptsächlich kommt als solche in Frage die Aufgabe der U II, in den Gedanken der Abhängigkeit von Seitenverhältnissen und Winkeln beim Dreieck einzuführen. Bedeutungslos ist dagegen, daß in U III die Lehre von den Potenzen mit ganzen positiven Exponenten nicht erwähnt, in U II die von den quadratischen Gleichungen etwas weiter geführt wird, indem auf den Zusammenhang zwischen Wurzeln und Koeffizienten besonders hingewiesen wird. Stärker als auf der Unterstufe tritt aber die Abweichung in der *Methode* der Behandlung hervor, noch mehr in der Arithmetik als in der Raumlehre. Dem unbestimmteren Ausdruck der offiziellen Lehrpläne ist die bestimmte Formulierung gegenübergestellt: „Systematische Zusammenfassung der Grundrechnungsregeln durch Buchstabenformeln." Die Erläuterungen fügen hinzu: „In der Systematik des arithmetischen Unterrichts ist jede pedantische Beweisführung zu vermeiden, bei der ohnehin vielfach die Gefahr der Beweiserschleichung durch einen circulus vitiosus vorliegt. Vielmehr sind die Sätze der theoretischen Arithmetik als wissenschaftliche Zusammenfassung dessen zu behandeln, was bereits lebendig im Bewußtsein vorhanden ist." Man darf annehmen, daß diese Ausführungen im Sinne der Lehrpläne von 1901 sprechen. Auch diese beabsichtigen wohl schon, dem Übermaß theoretischer Betrachtungen bei der Einführung in die Arithmetik zu steuern. („Unter Beschränkung auf das Notwendigste".) Worauf es ankommt, ist aber jetzt unzweideutig ausgesprochen. Die Buchstaben-

rechnung soll ganz einfach, ohne Belastung mit abstrakt-philosophischen Gesichtspunkten und mit Forderungen allgemein-gültiger Strenge als Zahlenrechnung betrieben werden; nur daß an die Stelle bestimmter Zahlen Buchstaben getreten sind, so daß die Ergebnisse der Operationen sich nicht mehr in der Form anderer Zahlen, sondern in der von Aggregaten der Bestandteile der Aufgabe darstellen. Mag der Unterricht in der Praxis auch schon an vielen Stellen diese Gestalt angenommen haben, noch öfters ihr sich nähern, es ist von Wichtigkeit, daß der Grundsatz scharf hervorgehoben wird. Die Lehrbücher führen ihn noch nicht mit der nötigen Entschlossenheit durch, sie belasten sich meist noch mit zu viel Ballast aus Rücksichten auf Strenge und Wissenschaftlichkeit, auch da, wo sie den Anspruch erheben, für den Anfangsunterricht dienen zu können.[1]) Doch noch mehr als sie, aber vor allem im Verein mit ihnen, sündigt oft der Neuling, der von den Höhen der Wissenschaft her in die Tertia versetzt, seiner Schüler Erkenntnis zu jenen Höhen hinaufzuheben vergeblich sich müht[2]), noch schlimmer, die natürlichen klaren Vorstellungen der Knaben im Nebel der Unsicherheit verwirrt und ihnen das Vertrauen zu eigner Geisteskraft raubt. Im besten Falle ist mechanisches, gedankenloses Hin- und Herschieben der Buchstaben das unzureichende Ergebnis, noch öfter ein völliges Versagen. Aus diesen Erfahrungen heraus kann die bestimmte nüchterne Fixierung des elementaren Standpunktes nur mit Genugtuung begrüßt werden. Alles was unter Nr. 2a der Erläuterungen noch weiter an Winken mitgeteilt wird, ist eine zwar nicht neue, aber doch mit Recht neu betonte Folgerung aus diesem Grundsatze.

Nach Stoff und Verteilung wenig geändert sind die Lehrpläne zur Raumlehre auf dieser Stufe. Die Bedeutung der Konstruktionsaufgaben scheint etwas zurückgetreten, vielleicht nicht ohne Beziehung auf die Schätzung, die ihnen auch sonst wohl zuteil wird. So lebhaft vor 1901 gewünscht wurde, daß neben der Aneignung der Lehrsätze und ihrer Beweise die Übungen im Konstruieren als unumgänglich nötig bezeichnet würden, so kritisch ist später der Wert dieser Übungen eingeschätzt worden. Während die offiziellen Lehrpläne in jeder Klasse von IV ab Konstruktionsaufgaben vorschreiben, finden sie in den Vorschlägen nur für Tertia einen Platz, auch hier mit einer starken Einschränkung, auf die die Lehrpläne erst in den methodischen Bemerkungen hinweisen. Es ist aber darauf aufmerksam zu machen, daß durch die

1) Immer noch zu den besten Leistungen gehört das 1884 erschienene Heftchen: Bork u. Poske, Hauptsätze der Arithmetik. Berlin, G. Reimer.

2) Vgl. A. Rausch, Philosophische Propädeutik in: Handbuch für Lehrer höherer Schulen. Leipzig 1906, B. G. Teubner. S. 223 oben.

neuen Übungen, die die Vorschläge im geometrischen Unterricht der Mittelstufe vorschreiben, teilweise dasselbe oder etwas Ähnliches erreicht werden kann, wie durch die Konstruktionsaufgaben. Indem der Gedanke der gegenseitigen Abhängigkeit der Elemente einer planimetrischen Figur voneinander, dieser selbst von den ersten dauernd gepflegt wird, indem diese Veränderlichkeit durch Überlegung und Zeichnung verfolgt und festgestellt wird, gestalten sich Betrachtungen dieser Art zu einem Mittel, die mathematische Phantasie in Bewegung zu setzen, zu üben und auszubilden, wie es auch die Konstruktionsaufgaben sind. Und indem die Betrachtungen funktionaler Abhängigkeit sich nicht auf die Planimetrie beschränken, grundsätzlich vielmehr auch die im arithmetrischen Unterricht auftretenden Gebilde ins Auge fassen, stellen sie die beiden sonst leicht unvereinigt nebeneinander stehenden Gebiete unter einen gemeinschaftlichen Gesichtspunkt, gewiß zur Förderung des mathematischen Denkens. Mit vollem Recht heben die Erläuterungen der Vorschläge dann hervor, welchen Wert für die Entwicklung des funktionalen Denkens gerade den Determinationen der Konstruktionsaufgaben, und hier wieder der Diskussion der Grenzfälle zukommt. Indem nicht selten der Wunsch nach Übersichtlichkeit und einfachem Ausdruck hier dazu führen wird, die planimetrischen Beziehungen in algebraischer Form auszudrücken, und weiter durch die grundsätzlich gepflegte graphische Darstellung der Abhängigkeit arithmetischer Ausdrücke von ihren Teilen, wird schon auf der Mittelstufe *die* Vorstellung vorbereitet und herausgehoben, die zur Zeit auch in Prima oft genug dem Schüler noch schwer nahe und zur Klarheit zu bringen ist, die Darstellbarkeit geometrischer Wahrheiten in der Sprache der Arithmetik, die geometrische Deutbarkeit eines algebraischen Zusammenhangs. Ohne Schwierigkeit wird dann in U II auch die Aufgabe zu lösen sein, die als Vorbereitung für die Trigonometrie im Zusammenhange des geometrischen Pensums gestellt ist, den Zusammenhang von Seitenverhältnissen und Winkelgrößen im Dreieck erkennen und als gesetzmäßig auffassen zu lehren.

Möglich erscheint die Lösung der Aufgabe unter der Voraussetzung einer Beschränkung in Stoff und Übungen, wie die Erläuterungen sie andeuten, Beschränkungen, auf welche freilich auch schon die Lehrpläne von 1901 hinzielten (vgl. methodische Bemerkungen Nr. 4.) So heißt es auch jetzt: „Alle künstlichen Operationen, Divisionen komplizierter Polynome u. dgl. sind zu vermeiden, ... mancherlei Einzelheiten aus dem bisherigen Pensum auszuscheiden, manche Dinge überhaupt nur ganz flüchtig zu berühren, insbesondere die Ausdehnung der für rationale Beziehungen erwiesenen Sätze auf den Fall der Irrationalität nur durchaus praktisch zu

behandeln, d. h. unter Hinweis auf die Möglichkeit, den beim Ersatz des Irrationalen durch rationale Zahlen zu begehenden Fehler nach Belieben zu verringern." Gewiß soll die Aufzählung der statthaften Einschränkungen mit dieser Aufzählung nicht erschöpft sein, es soll nur Richtung und Prinzip angedeutet werden, die für die Entscheidungen über das Zulässige maßgebend sein können. Die Methode des Unterrichts wird, unter der Voraussetzung der gekennzeichneten Beschränkung, allmählich immer mehr auf Schärfung des logischen Denkens ausgehen müssen, so sehr sie auch jetzt es vermeiden muß, die Forderung vollster logischer Strenge und Schärfe pedantisch festzuhalten. Dahin zielt die Bemerkung: „Indirekte Beweise sind möglichst zu vermeiden, die Umkehrung direkt bewiesener Beziehungen, soweit sie — wie meistens — dem gesunden Verstand auf der Hand liegt, als selbstverständlich zu behandeln."

Die einschneidensten Veränderungen bringen die Lehrpläne der Vorschläge dem Unterricht auf der Oberstufe, sowohl was die Stoffauswahl und Stoffverteilung, als was die empfohlene Methodik betrifft. Am deutlichsten ausgesprochen ist eine Vereinfachuug für die Trigonometrie. Neben dem Hinweis auf die Verwertung zu praktischen Aufgaben der Dreiecks- und Vierecksmessung findet sich in den Erläuterungen die Bemerkung: „In der Trigonometrie sind alle künstlichen Umformungen beiseite zu lassen." Hier ist gewiß viel gesündigt worden und wird noch gesündigt. Zeit, Kraft und Interesse der Schüler wird vergeudet in dem Drill derselben für die Lösung von Dreiecksaufgaben, die die Kenntnis von den Beziehungen der ϱ, ϱ_a etc., der Seitenabschnitte und der Winkel voraussetzen, und davon abgesehen zu goniometrischen und algebraischen Umformungen nötigen, die erst nach vielfacher, dem Ergebnis für die mathematische Bildung durchaus nicht entsprechender Übung dem Schüler so vertraut werden, daß er sie selbständig auszuführen und anzuwenden vermag. Hier macht sich ein Formalismus breit, der nicht oft und scharf genug gekennzeichnet und zurückgewiesen werden kann.[1]) Die in den Jahresberichten mitgeteilten Aufgaben für die Reifeprüfungen regen in dieser Hinsicht nicht selten zu

1) Ähnlich äußert sich A. Gille (Lehrproben u. Lehrgänge Heft 74, S. 21). Nachdem er erwähnt hat, wie das Heranziehen angewandter Aufgaben aus anderen Unterrichtsfächern oder aus dem praktischen Leben manchen Mathematiker als eine Hintansetzung der reinen Wissenschaft erscheinen mag, fährt er fort: „Wenn diese Vernachlässigung etwa auf Kosten gekünstelter geometrischer Dreieckskonstruktionen, überraschender algebraischer Lösungen oder langwieriger goniometrischer Transformationen mit Hilfe von r oder ϱ geschieht, so dürfte es kaum zu beklagen sein."

eigenartigen Gedanken an. Und nicht besser im Gebiete der Gleichungen mehrerer Unbekannten, der trigonometrischen Gleichungen, der stereometrischen Berechnungen u. a. m. Schon die methodischen Bemerkungen der Lehrpläne von 1901 empfehlen unter Nr. 9 dem Übelstande, „daß der Unterricht auf der Oberstufe einen zu ausschließlich rechnerischen Charakter annimmt," durch fortgesetzte Übungen in geometrischer Anschauung und Konstruktion zu steuern. Nach derselben Richtung gehen die Ratschläge, die die Erläuterungen erteilen, die praktische Verwertung der Trigonometrie zu wirklichen Messungen, die Pflege der stereometrischen Konstruktionsaufgaben mit besonderer Berücksichtigung guter zeichnerischer Behandlung, die Heranziehung von Aufgaben aus der Physik. Dem gegenüber treten die in den offiziellen Lehrplänen bezeichneten Lehraufgaben in der Planimetrie und teilweise auch in der Arithmetik etwas zurück. Des binomischen Lehrsatzes, des ehrwürdigen Schlußsteins aller früheren ministeriellen Lehrpläne, wird keine Erwähnung getan.

Stark hervorgehoben wird aber wieder die funktionale Abhängigkeit. Wo die Lehrpläne von 1901 den „wiederholenden Aufbau des arithmetischen Lehrganges" vorschreiben, sprechen die der Vorschläge von der „zusammenhängenden Betrachtung der bisher aufgetretenen Funktionen in ihrem Gesamtverlauf nach Steigen und Fallen"[1]), von der graphischen Darstellung der Abhängigkeit von Numerus und Logarithmus, der trigonometrischen Funktionen und der Winkel.

Bei dieser Gelegenheit soll „eventuell" der Begriff des Differentialquotienten und des Integrals herangezogen werden. Indem die Erläuterungen hervorheben, daß es sich nur um die allereinfachsten Beispiele von Differentialen und Integralen handeln kann, sind sie geneigt, die Entscheidung über die Methodik den einzelnen Fachlehrern zu überlassen. Der Ausdruck ist so vorsichtig gewählt, „weil die Anschauungen in Lehrerkreisen noch zu wenig geklärt sind."[2]) Das ist ja in

---

1) Eine dem Geist dieser Vorschläge entsprechende Darstellung bietet wohl Fr. Haacke, Entwurf eines arithmetischen Lehrganges für höhere Schulen. Leipzig 1905, B. G. Teubner.

2) Der von uns selbst eingenommene Standpunkt ist präzisiert in dem Vortrage: „Die Bildungsaufgabe der Mathematik im Lehrplan der höheren Schulen" (Unterrichtsbl. f. Math. u. Naturw. hrsg. von Pietzker, X, Heft 4 u. 5). — Für die Einführung ist seitdem besonders eingetreten A. Schülke (Ebenda Heft 3), Fr. Haacke (a. a. O. S. 6): „Bleibt man wirklich bei den Elementen stehen, so mutet man damit dem Schüler keine prinzipiellen Schwierigkeiten weiter zu, dafür aber eröffnet man ihm einen Einblick in eine der fruchtbarsten Methoden, die der rechnende Geist jemals ersonnen hat .... Aus Bildungsgründen und aus praktischen Gründen scheint mir ihre Aufnahme in den Lehrplan in kürzerer oder

der Tat der Fall. Eine Erörterung der Frage auf der XIII. Hauptversammlung des Vereins zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und der Naturwissenschaften führte bei der Abstimmung zu dem Ergebnis, daß die Gegner eine Stimme mehr zählten als die Anhänger.[1]) Den in der Diskussion laut gewordenen Besorgnissen hat J. Tropfke mit Recht entgegengehalten, daß „nicht die mechanische Einübung eines neuen Formalismus die Folge der Neueinführung der Infinitesimalrechnung in moderner Form sein wird, sondern die fruchttragende Erkenntnis, wie eine neue Symbolik schwierige Rechnungen vereinfacht, anscheinend getrennte Gebiete vereinigt und neue, ja schwerere Aufgaben mit Leichtigkeit behandeln läßt," wie gerade hier dem Primaner ein großes Maß von Anregung, der eigene Trieb, die neuen Waffen an höheren Problemen zu erproben, entspringt.[2]) Die Gefahr formalistischer Behandlung liegt freilich nahe. Sie ist auch in der Lehrbuchliteratur bereits zutage getreten.[3]) Indessen, wie sie zu vermeiden sei, daß der Wert der Einführung in die Gedankengänge des Infinitesimalkalküls an einer ganz andern Stelle liege, darauf ist genug hingewiesen und der rechte Weg zum Ziel gezeigt worden[4]), wie es auch jetzt wieder die Lehrpläne der Vorschläge und deren Erläuterungen tun, indem sie empfehlen, einen recht mannigfaltigen Kreis von Aufgaben aus der Mathematik und Physik mit möglichst einfachen Mitteln der höheren Analysis zu bearbeiten. Je mehr dabei jede einzelne Aufgabe die

---

späterer Zukunft als wirklicher Abschluß der elementaren Mathematik notwendig zu sein .... Die Einführung der Infinitesimalrechnung in den Lehrplan erleichtert und konzentriert das Primanerpensum und gibt ihm den krönenden Abschluß." Ähnlich O. Gutsche, Mathematische Übungsaufgaben. Leipzig 1905, B. G. Teubner. S. IV: Ich habe „es stets für erforderlich erachtet, meine Schüler mit den Grundlehren der Infinitesimalrechnung bekannt zu machen. Ich glaube, die meisten haben mir Dank dafür gewußt."

1) Vgl. Unterrichtsblätter f. Math. u. Naturw. X, Heft 6. S. 133.

2) Vgl. C. Rethwisch, Jahresberichte über das höhere Schulwesen, 1904. XII, S. 3.

3) Vgl. R. Schröder, Die Anfangsgründe der Differential- und Integralrechnung. Leipzig 1905, B. G. Teubner.

4) z. B. A. Höfler in seinen „Bemerkungen zu den Berliner Verhandlungen über Fragen des höheren Unterrichts mit besonderer Beziehung auf Mathematik und Naturwissenschaften. Wien 1891, Hölder. S. 32—37. — Wie oft ist von maßgebender Stelle auf J. Perrys Höhere Analysis für Ingenieure aufmerksam gemacht worden! (Übersetzt von R. Fricke und Fr. Süchting. Leipzig 1902, B. G. Teubner.) Und immer noch findet man eine reiche Quelle für Material und Behandlungsweise in den Arbeiten von C. Schellbach, die freilich nicht mehr ganz bequem zu erlangen sind, in den „Mathematischen Lehrstunden". Berlin 1860, bei G. Reimer, in der „Sammlung und Auflösung mathematischer Aufgaben", Ebenda 1863, endlich in den „Neuen Elementen der Mechanik". Ebenda 1860.

Möglichkeit bietet, des Grundgedankens des Kalküls sich wieder bewußt zu werden, je weniger ihre Lösung so angelegt wird, daß wirklich die mechanische Anwendung der Regeln der Differentiation und Integration hinreicht um sie zu erledigen, desto gewinnbringender und erfolgreicher wird die Einsicht in das Wesen der Methode werden, desto befähigter der Schüler sie selbständig auf Probleme anzuwenden, deren Lösung innerhalb des Bereiches der ihm zur Verfügung gestellten Mittel liegt.

Im besondern wird die Lehre von den Kegelschnitten Gelegenheit geben, die neuen Gedanken zu verwenden. Wenn für „die Behandlung der Kegelschnitte die synthetische und analytische Seite möglichst gleichmäßig zu berücksichtigen“ empfohlen wird, so befinden sich die Vorschläge in voller Übereinstimmung mit den Lehrplänen, die „eine möglichst einfach gehaltene Darstellung einiger Grundeigenschaften der Kegelschnitte, die auch in synthetischer Form gegeben werden kann,“ vorsehen, aber „weder in analytischer noch in sogenannter neuerer Geometrie einen systematischen Unterricht“ beabsichtigen (meth. Bemerkungen 8). Ein Stück über diese Absichten hinaus gehen freilich die Vorschläge, indem sie die Behandlung der Kegelschnitte durch die Empfehlung vielen Zeichnens in den Dienst der Ausbildung der Raumanschauung stellen, durch den Hinweis auf „die Abhängigkeit der Gestalt des Kegelschnitts vom Kegel selbst“ für die weitere Entwicklung des funktionalen Denkens in Anspruch nehmen.

Denn diese beiden Gesichtspunkte, „die Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens und die Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens“, die schon auf den früheren Stufen für die Auswahl und Anwendung maßgebend gewesen waren, treten auf der Oberstufe noch ausschlaggebender hervor. Um ihretwillen sind gewisse Gebiete, die Gegenstand des Unterrichts sind, mehr in den Hintergrund gestellt, andere, wie vor allem die nebeneinander hergehende, rechnerische und zeichnerische Behandlung derselben Aufgabe[1]) weit nach vorn gerückt. Erweitert erscheint um ihretwillen insbesondere die Lehraufgabe für die Behandlung der Kegelschnitte. Da aber durch die Gewöhnung an die graphische Darstellung arithmetischer Zusammenhänge und durch die Betrachtung der Abhängigkeit der Figuren von ihren Bestandteilen und dieser voneinander der Weg in einer Weise bereitet sein wird, wie die gegenwärtigen Verhältnisse es in den seltensten Fällen mit sich bringen, wird diese Erweiterung die Erreichung des Lehrzieles nicht gefährden.

---

1) Etwa im Sinne von K. Schwering, 100 Aufgaben aus der niederen Geometrie. 2. Aufl. Freiburg 1903, Herder.

Ein Wort muß noch gesagt werden zu der Heranziehung von Aufgaben aus der Physik, die „nicht nur auf die sehr erwünschte Verbindung des mathematischen und physikalischen Denkens abzielt, sondern auch als Entlastung des zeitlich so sehr eingeschränkten physikalischen Unterrichts gedacht“ ist. Schon die Lehrpläne von 1901 haben diesen Wert der Verbindung mathematischen und physikalischen Denkens erkannt und dessen Zustandekommen zu fördern gesucht, indem sie die Lösung physikalischer Aufgaben mit Hilfe mathematischer Betrachtungen im mathematischen Unterricht vorzunehmen gestatteten und auf der Oberstufe die Vereinigung des mathematischen und physikalischen Unterrichts in der Hand *eines* Lehrers empfahlen (meth. Bemerkungen 11.) Die Vorschläge scheinen aber weiter zu gehen und aus den von der Entlastung des physikalischen Unterrichts handelnden Worten läßt sich fast die Absicht annehmen, die mathematischer Behandlung zugänglichen Teile der Physik ganz auf die mathematischen Lehrstunden zu übertragen. Sollte eine solche Absicht vorliegen, so müßten gegen ihre Durchführung erhebliche Bedenken ausgesprochen werden. Es würden beide Teile dabei zu kurz kommen. Die Zeit würde nicht ausreichen, um eine gründliche Behandlung der physikalischen Lehrstoffe, zu denen ja auch noch mathematische Geographie und Grundlehren der Astronomie treten sollen, zu gestatten. Und selbst eine knappe und vielleicht nicht gar zu eindringende Darstellung würde für die eigentlichen mathematischen Lehraufgaben den Raum über Gebühr verengen. Soll es dagegen heißen, daß ausgewählte Aufgaben physikalischen Inhalts, die mathematischer Behandlung innerhalb der durch die Kenntnisse der Schüler gesteckten Grenzen zugänglich sind, in den mathematischen Lehrstunden bearbeitet werden sollen, so ist nichts dagegen einzuwenden. Die Zahl dieser Aufgaben wird nur beschränkt sein können, aber der Zweck, zu dem sie behandelt werden, läßt sich doch erreichen. Sie vor allem werden dazu hinführen, daß sich bei den Lernenden eine „Einsicht in die Bedeutung der Mathematik für die exakte Naturerkenntnis“ entwickelt, die die Vorschläge als eines der drei abschließenden Ziele des mathematischen Unterrichts bezeichnen. Hier tut es wenig zur Sache, wenn nur eine geringere Zahl von Problemen zur Behandlung gekommen sind. Alles kommt darauf an, daß der Schüler die quantitativen Beziehungen klar erfaßt, die Möglichkeit der Anwendung mathematischer Betrachtungen erkannt und die Lösung streng oder näherungsweise, möglichst numerisch, durchgeführt hat. Eben deswegen wird auch gerade hier „ein Heranführen bis an die Schwelle der Infinitesimalrechnung“ oder auch einen Schritt über sie hinweg auch dem mathematischen Unterricht in der

Prima des *Gymnasiums* nicht unmöglich sein, wenn nur eben nicht Geübtheit in der Verwendung des Kalküls, sondern Eindringen und Einsicht in den Geist der Methode als das zu erstrebende Ziel vor Augen steht.

Damit wären wir zu dem Punkte gelangt, zu den mit den Vorschlägen ins Auge gefaßten Lehrzielen Stellung zu nehmen und zu überlegen, ob die für die Zielleistungen festgestellten Forderungen unsre Zustimmung finden können. Eine auffällige Verschiedenheit tritt an beiden Stellen hervor, wenn die offiziellen Vorschriften und die neuen Vorschläge nebeneinander gestellt werden. Das Lehrziel ist in den Lehrplänen rein stofflich bezeichnet, (erst die meth. Bemerkungen enthalten in Nr. 1 einige darüber hinausgehende Gedanken), die Zielleistungen sind mit einer Unbestimmtheit umschrieben, die sich erst aus der Beziehung auf die Festsetzungen des „allgemeinen Lehrziels" rechtfertigt. Die Vorschläge umschreiben im Gegenteil das Lehrziel mehr in formaler Beziehung und stellen für Zielleistungen bestimmtere Forderungen. Sie kommen damit einem Wunsche entgegen, der nach Freiheit in der Erledigung des Lehrstoffs verlangt, der für eine Ausgestaltung des Unterrichts auf der obersten Stufe schwärmt, „der losgelöst von Revisionen programmmäßiger Einzelkenntnisse, eine wirkliche geistige Durchdringung des Stoffes mit wahrhaftem Interesse und in freudiger Arbeit im Gefolge habe."[1]) Was an Einzelkenntnissen etwa darzubieten ist, haben die Lehraufgaben der verschiedenen Stufen ja angeführt. Es kann nicht so sehr *darauf* ankommen, daß sie alle präsent gehalten werden, als vielmehr, daß bei Abschluß des Unterrichts der Lernende die Übersicht über den Zusammenhang im Ganzen gewonnen habe und eine Einzelheit in ihn einzureihen imstande sei. Zugleich mit dieser Geschicklichkeit wird sich dann auch die Fähigkeit entwickeln, die erworbenen Kenntnisse und noch mehr diese „Fähigkeit der mathematischen Auffassung" für die Durchführung von Einzelaufgaben zu verwerten. Das hier aufgestellte Lehrziel findet sich in voller Übereinstimmung mit dem in Halle 1904 angenommenen 4. Leitsatz:

> „Ein auf das Wichtigste und Notwendigste beschränktes, aber sicheres und klares Wissen ist das erste Ziel; das zweite ist die Fähigkeit möglichst gewandter und selbständiger Verwertung dieses Wissens. Das Feld dafür bietet zunächst die Mathematik selbst; dann die naturgeschichtlichen Unterrichts-

1) Charakteristik eines Vortrages von H. Schotten (über die Aufgaben des mathematischen Unterrichts) auf dem Internationalen Mathematikerkongreß in Heidelberg. 1904, durch J. Tropfke a. a. O. S. 6.

fächer, insbesondere die Physik; endlich auch, soweit nicht besondere umfangreichere sachliche Belehrungen zur Vorbereitung nötig sind, die Verhältnisse des Lebens."[1])

Eine sehr bedeutsame Änderung suchen die Zielleistungen einzuführen. Der seitherige Brauch, je eine Aufgabe aus verschiedenen Gebieten zur Bearbeitung in der schriftlichen Reifeprüfung zu stellen, ist nicht ohne Bedenken. Vor allem ist unter ihm eine gewisse Einseitigkeit schwer zu vermeiden, er fordert vielmehr fast zu ihrer Pflege auf. Das Überwiegen des Algebraismus, der rechnerischen Seite des mathematischen Unterrichts, wird beinahe absichtlich groß gezogen. Die Gebiete, die der Unterricht auf der Oberstufe vorführt, gehören ihr ganz vornehmlich an, Stereometrie, Trigonometrie, in den vornehmlich gepflegten Teilen, noch mehr die analytische Geometrie und die Teile der Arithmetik und Algebra, die der Prima zugewiesen sind. Bei der Ausführlichkeit, mit der sie z. Z. behandelt werden, bleibt ein verhältnismäßig kleiner Raum für planimetrische Konstruktionsaufgaben. Eine Durchmusterung der Jahresberichte würde zahlenmäßig die Richtigkeit dieser Ansicht bestätigen, die übrigens auch durch die Ausdehnung, die die genannten Gebiete in Büchern wie der bekannten Aufgabensammlung von H. C. E. Martus[2]) einnehmen, erhärtet wird. Zudem bietet die Lösung der so gestellten Aufgaben keineswegs eine volle Gewähr für die sachgemäße Ausbildung der Schüler. Ganz abgesehen von dem „Andre Werte einsetzen", worin gelegentlich die Hauptleistung der Prüflinge bestanden haben soll, kann die Behandlung der Disziplin eine recht einseitige, auf gewisse Spezialitäten und Liebhabereien gerichtete gewesen sein, ohne daß dies in der Wahl der Aufgaben für die aufsichtsführende Instanz so leicht zutage tritt. Hier regen nun die Vorschläge einen gewissen Fortschritt an. Die Aufgabe, ein allgemeines Thema zusammenhängend darzustellen, könnte verschiedene Vorteile bieten, wenn das Thema richtig gewählt und gehörig begrenzt ist. Sicherheit, Klarheit und Zusammenhang des Wissens, Fähigkeit seiner Anwendung auf die Lösung von Aufgaben, zugleich aber das Maß der Gewandtheit in der Darstellung könnte dabei in höherem Maße aufgewiesen und erkannt werden, als bei der Auflösung einer bestimmt gestellten Aufgabe. Es würde insofern eine Erleichterung eintreten, als das Gelingen der Arbeit nicht in gleicher Weise von der Kenntnis irgend einer Einzelheit des Wissens, von der Sicherheit des Rechnens abhängen würde, die doch oft genug auch bei sonst verläßlichen

1) A. a. O. S. 129.

2) Mathematische Aufgaben (2 Teile und 2 Teile Lösungen). Leipzig. C. A. Koch.

Schülern durch die Aufregung der Prüfungszeit Einbuße erleiden. Und es käme noch eines hinzu. Wohl jedem Lehrer der Mathematik wird es einmal oder öfters vorgekommen sein, daß ein Schüler, der durch die Klarheit und Sicherheit seiner schriftlichen Arbeiten seine volle Zufriedenheit erworben hat, in der Reifeprüfung an der Klippe des deutschen Aufsatzes strandet, dessen Anforderungen an Gedankengehalt und Gewandtheit in der Erörterung er nicht genügen konnte. Liegt dann die Neigung nahe, den Schüler als geistig unreif auf der Schule zurückzuhalten, so geschieht ihm doch, gewiß nicht immer, aber des öfteren Unrecht. Seine Verstandesausbildung braucht keineswegs hinter der anderer zurückzustehen, die im deutschen Aufsatz erfreulichere Leistungen aufzuweisen haben, sie betätigt sich nur dem Gedankenkreise entsprechend, in dem er sich mit Vorliebe bewegt, das eine Mal ausreichend und normal, an anderer Stelle schwerfällig und mangelhaft. Nicht selten würde bei solchen Prüflingen der Ausfall im deutschen Aufsatz weniger schwer in die Wagschale fallen, wenn dieser Teil des Examens in der Mathematik ein befriedigendes Ergebnis gehabt hätte. — Um die andre Seite der Zielleistung, die vollständige Durchführung einer Aufgabe in rechnerischer und zeichnerischer Beziehung, wird der Streit der Meinungen nicht groß sein. Vielleicht wird zumeist die Sorge Ausdruck finden, daß solcher Aufgaben im Bereich der Lehraufgaben keine große Auswahl sein werde, ein Einwurf, der freilich auch gegen die vorgeschlagenen Gesamtdarstellungen gemacht werden mag. Natürlich würden zu viel Schwierigkeiten entstehen, um so größer, je eiliger und allgemeiner die Vorschläge Verwirklichung finden sollten. Aber mit dem Hineinwachsen des Gedankenkreises in ihre Absichten wird doch eben der Lehrstoff selbst und das Aufgabenmaterial eine Umwandlung erfahren, die diese Verlegenheit heben dürfte. Verbindung planimetrischer Konstruktionen mit trigonometrischer Berechnung, stereometrische Konstruktionsaufgaben, die zugleich synthetische und analytische Lösung einer Aufgabe aus der Lehre der Kegelschnitte, die graphische und rechnerische Lösung eines Systems von Gleichungen wird das Nötige, wenn nicht mehr, liefern. Und wie freudig begrüßt man die Forderung, im mündlichen Examen mehr das Verständnis als die Einzelheiten der Kenntnisse zu prüfen! Wie freudig *könnte* man sie begrüßen, wenn sie nicht so schwer zu erledigen wäre. Sie ist in letzter Zeit auch von anderer Seite gestellt worden.[1]) Ihre Erfüllung erstrebt jeder Mathematiker und seiner

1) Für die Schulprüfungen in der Chemie verlangt A. **Günthart**, Der chemische Unterricht als philosophischer Unterricht (Beilage zum Jhrb. 1905 des

Aufgabe sich bewußte Examinator. Aber einmal, den Stand der Kenntnisse, ihre Klarheit und ihre Sicherheit, ihren Zusammenhang und ihre Begründung zu erforschen, ist doch *auch* die Aufgabe vornehmlich einer mündlicher Prüfung. Ganz von ihr abzusehen oder auch nur sie zur Nebensache zu machen, geht nicht an, so sehr auch das Bestehen auf nebensächlichem Detail von Übel ist.[1]) Doch davon abgesehen, ist die Prüfung, die auf Feststellung des Verständnisses abzielt, für den Prüfling nicht leichter. Die Auffassung des Sachverhaltes, über den er urteilen soll, die richtige Beurteilung wie die korrekte Darstellung des Urteiles stellen größere Ansprüche an ihn, als wenn er sich nur über den Besitz von Kenntnissen auszuweisen hätte. Den Ansprüchen zu genügen, hindert ihn zudem die Bedrängnis seiner Lage nach seiner Individualität in höherem oder geringerem Maße. Auch die Geschicklichkeit des Examinators kommt in Betracht, bei der Auswahl der Fragen, bei ihrer Formgebung, bei der Art, wie er auf die vielleicht unvollständigen Ausführungen des Geprüften eingeht, aus ihr die richtigen Vorstellungen und Gedankengänge erkennt, ihrer weiteren, klaren Entwicklung behilflich ist. Es gehört in den Rahmen der hier besprochenen Reform, daß ein solcher Vorschlag gemacht wird, *seine* Verwirklichung dürfte von allen am meisten zu wünschen übrig lassen.

Denn sicherlich, die Vorschläge der Unterrichtskommission werden nur allmählich, nur teilweise, nur annäherungsweise ins Leben treten. Konnten wir in ihnen eine dankenswerte Tat erblicken, dankenswert weniger wegen des völlig Neuen, das sie bringen, als deswegen, weil vielfach als empfehlenswert Erkanntes zu einem zusammenhängenden Ganzen verschmolzen, von sachkundiger und maßgebender Stelle als das bezeichnet wird, was für die Weiterentwicklung des Unterrichts förderlich und notwendig ist, was dazu dienen kann, ihn „an die moderne Aufgabe der Schule anzupassen", „der stetig wachsenden Bedeutung der Mathematik und ihrer Methoden für unsre Gesamtkultur Rechnung zu tragen", und konnten wir die Ausführbarkeit fast in allen Stücken als möglich bezeichnen, so ist diese Ansicht durchaus

---

Rg. zu Barmen) S. 8: „Es sollen auch hier die Prüfungen nicht die Menge des eingeheimsten Einzelwissens über chemische Stoffe feststellen, sondern nur den Grad des erworbenen Interesses, d. h. die Fähigkeit des Schülers, neue, ihm unbekannte chemische Vorstellungen in sein theoretisches System einzuordnen."

1) Jener Schulrat war ganz im Recht, der den in geschichtsphilosophischen Erörterungen sich ergehenden Examinator aufforderte, Schlachtendata zu fragen, und der ein andermal die Frage, unter was für einem Baum Augustin die Stimme Gottes vernommen habe, selbst dahin beantwortete, seinetwegen könnte es ein „Apfelbaum" gewesen sein.

nicht unwidersprochen.[1]) Und „das ist wohl natürlich; denn für ältere Lehrer ist es keine leichte Aufgabe, einen gewohnten und lieb gewordenen Weg plötzlich zu verlassen und einen ganz neuen einzuschlagen."[2]) Aber die Vorschläge stehen ja durchaus im Stadium der Diskussion; sie zu einer bindenden Vorschrift durch amtliche Verordnung zu machen, wünschen selbst ihre Väter nicht. Was zunächst Not tut, der praktische Versuch ihrer Durchführung an geeigneter Stelle, das ist in die Wege geleitet. Damit ist man ein gut Stück voran gekommen. Die Beobachtungen und Erfahrungen, die so gesammelt werden, werden Hilfsmittel schaffen, die für die Verbreitung in weiteren Kreisen eine Vorbedingung sind, geeignete Lehrbücher und noch mehr eine geeignete Umgestaltung des Aufgabenmaterials. Beide sind der Schüler wegen unentbehrlich, beide werden dem Lehrer nützlich sein und ihm die Arbeit erleichtern. Sie werden vielleicht im einzelnen auch noch manche Umänderung der Vorschläge bewirken, deren Wert aber nur durch die Erprobung im Unterricht erkannt werden kann. Nebenher aber wird eine vielseitige Besprechung in den Kreisen der Fachgenossen die grundlegenden Gedanken immer mehr verbreiten, vor allem bei den jüngeren, die in den Beruf des Lehrers eintretend dem Neuen noch unbefangen gegenüberstehen und zu dessen Aneigung unbedenklicher bereit sind. Nachhaltig und fruchtbringend werden die Wirkungen zweifellos sein, vergeblich wird die Kommission nicht gearbeitet haben.

Nordhausen, Jan. 1906.

Die Frage der Einführung der Infinitesimalrechnung in den Mittelschulunterricht vom österreichischen Standpunkte.[3])

Von E. Czuber in Wien.

Hochgeehrte Anwesende! Das Programm unserer regelmäßigen Zusammenkünfte gelegentlich der Naturforscherversammlungen und auf den vor bald einem Dezennium ins Leben getretenen Mathematikerkongressen hat über rein fachwissenschaftliche Bestrebungen hinaus eine sehr wichtige und dankenswerte Bereicherung erfahren durch die Einbeziehung von Unterrichtsfragen. Seit einer Reihe von Jahren sind derlei Fragen, alle Kategorien der mittleren und der Hochschulen

1) Z. B. Ausführungen des Professor E. Böhm in der Dezembersitzung 1905 der Berliner Gymnasiallehrergesellschaft. (Tägl. Rundschau 1905 Nr. 597.)

2) A. Waldeck, Zeitschrift für das Gymnasialwesen, 48. Jhrgg. S. 737.

3) Vortrag, gehalten gelegentlich der 77. Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte in Meran am 25. September 1905.

betreffend, zu eingehender und vielseitiger Erörterung gekommen, zumeist unter Bezugnahme auf die Verhältnisse Deutschlands. Wir sind diesen Ausführungen teils in persönlicher Teilnahme an den Verhandlungen, teils durch stetige Wahrnehmung der daraus erwachsenen Literatur mit größter Aufmerksamkeit und lebhaftem Interesse gefolgt, an dem anderwärts Erreichten und Angestrebten unsere eigenen Schulverhältnisse prüfend und messend.

Eine dieser Fragen hat nun in der letzten Zeit bestimmte Formen und durch ihr fast gleichzeitiges Auftreten in verschiedenen Ländern ein Gepräge angenommen, das sie über das Niveau der persönlichen Einzelbestrebung hinaushebt und als das Ergebnis eines historischen Werdeganges erkennen läßt: es ist die Frage nach einer zeitgemäßen Umgestaltung des mathematischen Unterrichtes an den höheren Schulen. Hat sie in Frankreich eine der allgemeinen Beachtung höchst würdige Lösung bereits gefunden, so scheint sie sich in Deutschland, wo die Wege durch die neuen preußischen Lehrpläne von 1901 geebnet sind, der Lösung zu nähern.

Man wird es unter solchen Umständen wohl verständlich finden, wenn wir die uns beglückende Gelegenheit, da nach dreijähriger Pause die Naturforscherversammlung wieder auf österreichischem Boden tagt, wahrnehmen, um zu der erwähnten Frage von unserem Standpunkte aus Stellung zu nehmen und in die Bewegung, die auch bei uns bereits Boden gefaßt hat, in der Absicht auf die Herbeiführung eines glücklichen Verlaufes einzugreifen.

Den Behörden, die in Unterrichtsangelegenheiten das letzte entscheidende Wort zu sprechen haben, ist in unseren Versammlungen — das wird kein Einsichtiger mehr bestreiten können — eine beratende Stimme von hohem Wert erwachsen: schon in der Zusammensetzung aus Vertretern der Wissenschaft und der Schule liegt eine Gewähr für die allseitige Beleuchtung auftauchender Fragen, und die Freiheit der Meinungsäußerung, die uns hier gesichert ist, vermag den Wert des Urteils nur zu erhöhen.

Bevor ich zur Sache selbst übergehe, möchte ich mich auch für unseren Teil der Bitte anschließen, mit welcher Geheimrat Klein sein vorjähriges Referat auf der Breslauer Versammlung geschlossen hat und die *mutatis mutandis* dahin geht, unsere Unterrichtsverwaltung möge dem, was wir nach reiflicher Erwägung als im Interesse der fortschreitenden Entwicklung unserer Schulen gelegen befinden, ernste und wohlwollende Prüfung zuteil werden lassen.

I. Historischer Rückblick.

Um eine Würdigung des heutigen Standes zu ermöglichen, sei mir gestattet, ein knappes Bild von dem Entwicklungsgang des mathematischen Unterrichtes in Österreich während des vorigen Jahrhunderts zu entwerfen.

Ich beginne mit den *Universitäten*, weil die Zustände an diesen bis zu einem gewissen Grade maßgebend sein mußten für alle anderen Schulgattungen, und stütze mich dabei auf Daten über unsere zwei ältesten Universitäten, die Prager und die Wiener.[1])

Um es gleich mit dürren Worten zu sagen, stand hier der mathematische Unterricht bis zu den fünfziger Jahren auf einer recht bescheidenen Stufe; die großen Errungenschaften auf dem Gebiete unserer Wissenschaft am Ausgange des 18. und in der ersten Hälfte des vorigen Jahrhunderts gingen an unseren Universitäten während jener Epoche spurlos vorüber.

Zu Ende des 18. Jahrhunderts umfaßte die „Philosophie" drei Jahrgänge; die Mathematik hatte hier an der Wiener Universität folgenden Lehrplan:

1. Jahr: Elementar-Mathematik, nach Kästners Anfangsgründen[2]);

2. Jahr: Angewandte Mathematik, nach dem gleichen Lehrbuche;

3. Jahr: Praktische Geometrie, Trigonometrie und höhere Mathematik, nach Karstens Lehrbegriff.[3])

Die Elementarmathematik war obligat, die höhere jedoch nur für solche verbindlich, die nach zurückgelegten philosophischen Studien sich ferner dieser Wissenschaft zu widmen gedachten.[4]) Diese Ver-

---

1) Festschriften, welche die Senate genannter Universitäten aus Anlaß des 50jährigen Regierungsjubiläums des Kaisers 1898 veranstalteten. — Bezüglich der Wiener Universität standen mir noch Aufzeichnungen zur Verfügung, die ich der Güte des *Rector magn.* Hofrates Prof. Dr. F. Schindler verdanke.

2) Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie und Perspektiv. Abgefaßt von Abraham Gotthelf Kästner. Göttingen, im Verlag bey Vandenhoek und Ruprecht. 1792—1797. In 4 Teilen.

3) Lehrbegriff der gesamten Mathematik. Aufgesetzt von Wencesl. Joh. Gustav Karsten, der Phil. Doktor, der Mathem. Professor und der Churfl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften Mitglied. Greifswald, gedruckt und verlegt von Anton Ferdin. Röse. 1767—1775. In 7 Teilen.

4) Die Elementarmathematik ruhte in Prag von 1804 bis zur Reorganisation in den Händen von L. Jandera, die höhere von 1827 bis über jene Zeit hinaus in den Händen J. Ph. Kuliks. — An der Wiener Universität lehrten in der ersten Hälfte des Jahrhunderts Elementarmathematik: R. Döttler, J. Hantschl, J. Appeltauer, J. L. Madlener, W. Bauer, J. Jenko, J. Salomon; höhere Mathematik: F. v. Kesaer, A. Burg, J. Hantschl, J. Appeltauer, A. v. Ettings-

hältnisse blieben im Wesen bis zur Thunsehen Reform bestehen, nur daß das philosophische Studium später auf zwei Jahrgänge reduziert wurde und daß die unterlegten Lehrtexte wechselten.[1]) Als ein Fortschritt muß es schon vermerkt werden, wenn Ettingshausen von 1828 an die freie Vorlesung über höhere Mathematik nach eigenen Heften hält, wenn J. Littrow 1835 seiner Vorlesung über höhere Mathematik eine Übersetzung von Lacroix' Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung und der Vorlesung über Mechanik Poissons *„Traité de mécanique“* zugrunde legt und später der ersteren Vorlesung ein selbstverfaßtes Buch widmet, dem von 1838 ab auch Petzval seinen Unterricht anpaßt.

Von 1783 (Prag 1784) ab war für die Mathematik die deutsche Vortragssprache bestimmt, 1804 jedoch mit Hofdekret aufgehoben und wieder die lateinische eingeführt worden, die erst 1824 abermals der deutschen gewichen ist. Nach zeitgenössischen Angaben und auch nach den unterlegten Texten zu schließen, bewegten sich die mathematischen Vorträge auf einem sehr elementaren Niveau und entsprachen auch formell keineswegs den Anforderungen, die an diesen Unterricht heute an der Mittelschule gestellt werden.

Mit der erwähnten Reorganisation vom Jahre 1849 tritt ein völliger Umschwung auf mathematischem Gebiete ein. Die Elementarmathematik als solche verschwindet vom Lehrprogramm der Universität, und es entfaltet sich bald eine reiche wissenschaftliche Tätigkeit; neben den angestellten Professoren, die sich auf die grundlegenden Gebiete vornehmlich verlegen, beteiligen sich Privatdozenten an dem Unterrichte, und das Programm nimmt durch Einbeziehung der verschiedensten Spezialgebiete jene Gestaltung an, die den heutigen Studienbetrieb an den Universitäten kennzeichnet.[2]) Damit kommt auch die Ausbildung

hausen, J. Littrow, J. Petzval. Die große Zahl der Dozenten erklärt sich aus der wiederholten Notwendigkeit der Teilung der sehr zahlreichen Kollegien.

1) Für die Elementarmathematik diente später ein einheimisches Werk als Vorlage, nämlich: *Elementorum Matheseos purae pars prima, continens Algebram, et pars altera, continens Geometriam, Trigonometriam et Sectiones conicas. Auctore* Ig. Appeltauer, *in Universitate Viennensi Math. Prof. publ. et ordin. Viennae et Tergesti, apud Josephum Geistinger,* 1814, 1817.

2) Zur Kennzeichnung dieses Entwicklungsprozesses sei das erstmalige Auftreten einiger wichtigen Spezialkollegien nebst den Namen der Dozenten angeführt: Integration linearer Differentialgleichungen (1849/50, Petzval), Neuere Methoden der Geometrie (1850, E. G. Jacobi), Theorie der krummen Linien und Flächen zweiten Grades (1850/1, Schaub), Theorie der elliptischen Funktionen (1851/2, G. Rosenhain), Variationsrechnung (1854, Petzval). Neuere Geometrie (1863/4, J. Frischauf), Zahlentheorie (1865/6, Frischauf), Funktionen einer komplexen

der Lehrer der Mathematik in ganz neue Bahnen, worüber später noch einige Bemerkungen folgen werden.

An den *polytechnischen Schulen,* mit deren Gründung in Österreich zu Beginn des vorigen Jahrhunderts in Prag und Wien[1]) der Anfang gemacht wurde, war der Mathematik, insbesondere der höheren, von Anbeginn eine bevorzugte Stellung eingeräumt, und ich kann mit Befriedigung konstatieren, daß sich diese Tradition bis in die Gegenwart erhalten hat: bei Lehrenden und Lernenden steht die Überzeugung fest, daß die Mathematik die Grundlage bildet für jeden wissenschaftlichen Fortschritt auf technischem Gebiete. Schon in dem ersten auf die Gründung einer polytechnischen Schule gerichteten Plane Gerstners war in dem höheren der beiden projektierten Kurse die Mathematik mit drei Professuren, darunter auch eine für Astronomie, vertreten. Die Verfassung des k. k. polytechnischen Institutes in Wien vom Jahre 1818 setzt im Lehrplane die höhere Mathematik mit je zwei Vortrags- und einer Übungsstunde täglich durch ein Jahr an. Um die hierfür erforderliche Vorbildung zu schaffen, gingen der „Technischen Abteilung“ des Instituts zwei Vorbereitungsklassen unter dem Namen „Realschule“ voraus, in welchen die Elemente gelehrt wurden. Bald aber stellte sich die Notwendigkeit heraus, auch solchen den Zutritt zur Technischen Abteilung zu eröffnen, die nicht den Weg über die Realschule genommen, und so wurde denn 1819 eine Professur der Elementarmathematik errichtet, die bis über die Zeit der Errichtung der modernen Realschule hinaus, bis zur Reorganisation der technischen Lehranstalten nach dem Fachschulsystem im Jahre 1865, aufrecht blieb. Nur erhöhte sich in der späteren Zeit ihr Programm, indem es an das Lehrziel der Realschule und des Gymnasiums anschloß, und es ist bezeichnend, daß 1864 unter dem Titel *Elementar*mathematik gelesen wurde: Algebraische Analysis mit Inbegriff der höheren Gleichungen, sphärische Trigonometrie, analytische Geometrie der Ebene und des Raumes und *Elemente der Differential- und Integralrechnung.* Ein viel

Variablen (1866/7, G. Blažek), Analytische Geometrie der Kegelschnitte nach den neueren Methoden (1868, O. Stolz), Determinanten (1869/70, Stolz), Potentialtheorie (1873/4, H. Streintz), Funktionenlehre (1876, Boltzmann), Geschichte der Mathematik (1880, V. Sersawy), Graßmanns Ausdehnungslehre (1887/8, G. Kohn), Versicherungsmathematik (1890/1, Sersawy).

1) Nach den Programmen etc. des k. k. polytechnischen Instituts in Wien und des ständigen polytechnischen Instituts in Prag, ferner den Schriften: „Das ständisch-polytechnische Institut zu Prag, von Dr. C. Jelinek, Prag 1856“ und „Das k. k. polytechnische Institut in Wien, seine Gründung etc. von W. F. Exner, Wien 1861“. Die auf Prag bezüglichen Behelfe sind mir durch die Güte des *Rector magn.* Prof. W. Rippl zugänglich gemacht worden.

weiter reichendes Programm wies die Lehrkanzel der *höheren* Mathematik auf, nämlich die Theorie der Funktionen einer und mehrerer Variablen, Differential- und Integralrechnung nebst der Infinitesimalgeometrie und den Elementen der Variationsrechnung.[1]) Diese Grundzüge sind bis auf den heutigen Tag erhalten geblieben, nur daß sich der Inhalt der Vorlesungen den Fortschritten der Wissenschaft und den Bedürfnissen der Technik entsprechend entwickelt hat.

Einer Vorlesung muß ich noch besonders Erwähnung tun, die 1885 an der Wiener Technischen Hochschule eingeführt worden ist und, soviel mir bekannt, auch anderwärts Nachfolge gefunden hat. Um nämlich den Chemikern ein abgeschlossenes Maß mathematischer Bildung zu gewähren, ist ein vierstündiges Kolleg während der ersten zwei Studiensemester über die Grundlehren der höheren Mathematik geschaffen worden, dessen Hauptteil die Elemente der Infinitesimalrechnung ausmachen. Ich selbst halte dieses Kolleg seit 14 Jahren und hatte so vielfache Gelegenheit, zu beobachten, wie sich die Abiturienten unserer Mittelschulen zu diesem Lehrstoff stellen. An der Wiener Universität ist später gelegentlich der Einbeziehung der Versicherungstechnik ins Lehrprogramm eine ähnliche, aber weniger umfangreiche Vorlesung eingeführt worden, die sich auch für die Bedürfnisse der Naturhistoriker und Chemiker als zweckmäßig bewährt hat.

Man darf wohl sagen, daß die polytechnischen Schulen in der ersten Hälfte des vorigen Jahrhunderts auf mathematischem Gebiete den Universitäten vielfach vorangingen, und noch weit über die Reorganisation von 1849 hinaus bestritten Universitätsstudierende, wenigstens in Prag und Wien, ihren Bedarf an mathematischen Kollegien gern zum Teil an den dortigen Technischen Hochschulen. Auch in

1) An dem Prager Institut haben die Verhältnisse einen ganz anderen Verlauf genommen, wohl hauptsächlich wegen der organischen Verbindung, in der es ursprünglich mit der philosophischen Fakultät stand; hier, wo der Begründer und erste Direktor des Instituts, Gerstner, zugleich Professor der angewandten Mathematik war, sollten sich die Hörer ihre mathematische Bildung holen. Darum hatte das Prager Institut anfänglich nur Vorlesungen über Elementarmathematik, und auch für diese in Verbindung mit praktischer Geometrie wurde eine eigene Lehrkanzel erst 1839 systemisiert. Zu einer Vertretung der höheren Mathematik kam es aber erst 1852, nachdem vorher wiederholt die Notwendigkeit einer Lehrkanzel dieses Faches dringend dargestellt worden war. Bei der Reorganisation nach Fachschulen entfiel die Elementarmathematik als solche und ging in einen vorbereitenden Kurs über wie in Wien.

Bis zur Reorganisation von 1865 lehrten Mathematik in Prag: A. Bittner, Chr. Doppler, J. John, J. Partl, M. Sluka, W. Matzka, K. Kořistka, K. Jelinek, J. Lieblein; in Wien: J. Hantschl, J. Salomon, A. Burg, Schulz v. Straßnicki, J. Kolbe, F. Hartner, S. Spitzer.

dem Austausch der Lehrkräfte bestand und besteht noch heute zwischen beiderlei Anstalten auf mathematischem Gebiete ein reger Verkehr.

Wenn ich nun zu unseren *Mittelschulen* übergehe, welche die im Mittelpunkte meiner Ausführungen stehende Frage in erster Linie angeht, so mögen vorerst einige Bemerkungen allgemeiner Natur gestattet sein. Unsere Schulorganisation hat in manchen Punkten von Anfang an Wege eingeschlagen, welche die spätere Entwicklung als richtig und zweckmäßig bestätigt hat. Ich zähle dahin die gegenüber Deutschland günstigere Stellung der beschreibenden Naturwissenschaften und der Physik in den Lehrplänen beider Schulkategorien; die zweistufige Gliederung des Unterrichts in diesen Fächern, die sich der mit dem Alter der studierenden Jugend fortschreitenden geistigen Entwicklung vorzüglich anpaßt; die auf eine tüchtige Ausbildung des räumlichen Anschauungsvermögens gerichteten Einrichtungen der Realschule. Wenn also an eine Reform des mathematischen Unterrichtes gedacht wird, so entfallen für uns manche der erschwerenden Umstände, die sich in Deutschland an diesen Gedanken knüpfen, wo insbesondere die biologischen Disziplinen dringend und mit Recht nach einer Besserstellung begehren.

Ich will ferner hervorheben, daß der Grundzug unserer Gesetzgebung auf dem Gebiete des Mittelschulwesens dahin gerichtet war, die beiden Schulgattungen sowohl dem Prinzipe nach wie auch in betreff der Lehrziele der gemeinsamen Unterrichtsfächer einander zu nähern; dem Prinzipe nach insofern, als Gymnasium und Realschule zu Vermittlungsstätten allgemeiner Bildung und zu Vorbereitungsschulen für das Hochschulstudium ausgestaltet wurden, die nur durch die Wahl des Bildungsstoffes voneinander sich unterscheiden. In der Berechtigungsfrage sind wir — und es ist dies wenigstens zum Teil der ungleichen Studiendauer zuzuschreiben — vorläufig erst bei dem Punkte angelangt, daß den Realschülern, die sich dem Universitätsstudium zuzuwenden beabsichtigen, gegen früher gewisse Erleichterungen bezüglich der Ablegung der Gymnasialmatura eingeräumt worden sind, wogegen die Technische Hochschule an die Gymnasiasten bei ihrem Eintritt kaum nennenswerte Nachtragsforderungen stellt.

Noch muß ich einige Unterschiede zwischen unseren und den adäquaten deutschen höheren Schulen hervorheben, die für die Beurteilung der Sachlage nicht ohne Belang sind. In Deutschland sind die drei Gattungen höherer Schulen neunklassig, und es stehen dem Gymnasium und der Oberrealschule in Preußen 259, beziehungsweise 262 Wochenstunden für die Erreichung des Lehrziels zur Verfügung. Unsere Gymnasien und Realschulen zählen 8, beziehungsweise 7 Klassen

und verfügen über 194, resp. 214 Wochenstunden.[1]) Nicht zu übersehen sind die bei uns herrschenden Sprachschwierigkeiten, ferner der Umstand, daß die intellektuelle Qualität des Schülermaterials innerhalb unseres Staatsgebiets einen minderen Grad von Homogenität besitzen dürfte als in Deutschland.

Nach diesen Bemerkungen allgemeiner Natur will ich nunmehr in kurzen Strichen den Entwicklungsgang zeichnen, welchen der Lehrplan bezüglich der Mathematik seit der Reorganisation von 1849 genommen hat.

Im Organisationsentwurfe war der Mathematik im *Untergymnasium* als Ziel vorgeschrieben: Sicherheit im Zahlenrechnen, Durchübung der praktisch wichtigen Rechnungsarten; Kenntnis der geometrischen Gestalten, auf methodisch geleitete Anschauung basiert; in beiden zugleich Vorbereitung auf rein wissenschaftliche Behandlung im *Obergymnasium*, dem als Lehrziel die Kenntnis der elementaren Algebra und Geometrie als streng beweisender Wissenschaft vorgeschrieben war. Angesetzt waren hierfür 12 + 10 Stunden. Befremdlicherweise hatte die Oktava keine Mathematikstunden; dieser Übelstand wurde schon 1855 durch Zuweisung einer Stunde zum Zwecke zusammenfassender Wiederholung gebessert.

Der Grundzug aller späteren Maßnahmen, zu welchen sich die Unterrichtsbehörde auf Basis der gemachten Erfahrungen veranlaßt sah, ging dahin, den Lehrplan von dem praktischen Einschlage zu befreien, die rein wissenschaftliche Seite immer kräftiger in den Vordergrund zu rücken, auf die im Organisationsentwurf als möglich hingestellten Erweiterungen des Lehrstoffs zu verzichten, ja diesen nach Möglichkeit unter strenger Scheidung des Wesentlichen vom Unwesentlichen zu vereinfachen und einzuschränken, von dem — wenn man von der allzu starken Tendenz auf das Abstrakte absieht — unbedingt richtigen Grundsatze ausgehend, daß „nicht die Masse, sondern die

1) Zur Beurteilung des Zeitaufwandes für die Sprachen einerseits und die realen Fächer andererseits diene die folgende Tabelle:

Es entfallen Stunden auf	Preußen				Österreich			
	Gymnasium 259		Oberrealsch. 262		Gymnasium 194		Oberrealsch. 214	
	absol.	in %	absol.	in %	absol.	in %	absol.	in %
Sprachen	150	58	106	40·5	104	53·6	63	29·4
Mathematik und Naturwissenschaften (nebst Zeichnen an der Realschule)	52	20	99	37·8	43	22·2	98	45·8

Klarheit der Begriffe und der bestimmte und strenge Zusammenhang derselben“ die Mathematik zu einer für das Gymnasium wertvollen Disziplin machen. Um nur einzelnes anzuführen, wurden die sphärische Trigonometrie, die Lehre von den Kettenbrüchen, von den unbestimmten Gleichungen 2. Grades, von den komplexen Zahlen fallen gelassen. Gleichzeitig erfuhr die Stundenzahl eine kleine Vermehrung und beträgt jetzt $12 + 12 = 24$ (gegen 34 in Preußen).

Gemäß den fachlichen Nebenzwecken, welche der *Realschule* bei ihrer 1851 erfolgten Gründung gesetzt worden waren, zeigte deren Lehrplan auch in bezug auf Mathematik einen eigenartigen Zuschnitt. Der dreiklassigen Unterrealschule war die besondere Arithmetik mit ihren bürgerlichen und kaufmännischen Anwendungen, der Wechsel- und Zollkunde sowie der Buchhaltung als Lehraufgabe zugewiesen; der ebenfalls dreiklassigen Oberabteilung fiel die wissenschaftliche Behandlung der Algebra und Geometrie zu; die Stundenzahl war mit $11 + 16$ reichlicher bemessen als am Gymnasium. Dazu kam mit Rücksicht auf gewerbliche Bedürfnisse und zwecks Ausbildung der Raumanschauung ein mit Stunden reichlich bedachter Unterricht in der konstruktiven und darstellenden Geometrie und dem zugehörigen Zeichnen, $14 + 10$ Stunden. In dem Maße, als die Realschule zu einer allgemeinen Bildungsstätte mit dem Hauptziele der Vorbildung für das höhere technische Studium ausgestaltet wurde, mußten trotz der Vermehrung der Klassen um eine an dem obigen Plane einschneidende Änderungen, will sagen Reduktionen, vorgenommen werden, und heute besteht zwischen dem mathematischen Lehrziel der Realschule und des Gymnasiums — abgesehen von der stärkeren Betonung des geometrischen Zeichnens und von der darstellenden Geometrie — kein erheblicher Unterschied mehr; lediglich die Grundlehren der Wahrscheinlichkeitsrechnung und die sphärische Trigonometrie bilden das Plus auf Seiten der Realschule. Dem Rechnen und der Mathematik sind hier $12 + 14$, dem geometrischen Zeichnen $8 + 8$, beiden zusammen also 42 Stunden (gegen 47 an der preußischen Oberrealschule) eingeräumt.

Die *Lehrerausbildung* war bis zum Jahre 1884 zwischen Universität und Technischer Hochschule derart geteilt, daß Kandidaten der Mathematik, der darstellenden Geometrie und der Chemie ihre Studien vollständig an der letzteren absolvieren konnten. Es bestanden zwei getrennte Kommissionen für Gymnasien und Realschulen. Die Tendenz, beide Mittelschulen einander zu nähern, führte dazu, auch das Prüfungswesen äußerlich und innerlich zu vereinheitlichen und Universitätsstudien wenigstens zum Teil für alle Fächer obligatorisch zu machen. Die Prüfungsvorschriften von 1884 und 1897 machen denn bezüglich der

Mathematik zwischen Kandidaten für das Gymnasium und die Realschule keinen Unterschied.

Das erste definitive Prüfungsgesetz vom Jahre 1856 stellte bezüglich der Mathematik am ganzen Gymnasium als Forderung auf: „Sichere Kenntnis und Durchübung der gesamten Elementarmathematik nach ihrer arithmetischen und geometrischen Seite, Geübtheit in der analytischen Geometrie und diejenige Kenntnis der Differential- und der Elemente der Integralrechnung, welche die Anwendungen dieser Rechnungen, namentlich für die Physik, zugänglich macht und für die Elementarmathematik ein eindringliches Verständnis eröffnet.“ Die späteren, oben erwähnten Vorschriften modifizieren die Forderung und fassen sie kurz so: „Kenntnis der allgemeinen Arithmetik, der synthetischen und der analytischen Geometrie. Kenntnis der Differential- und Integralrechnung und deren Anwendung auf die Geometrie, ferner der Elemente der Variationsrechnung. Vertrautheit mit den Grundzügen der neueren Funktionentheorie.“ Es ist nicht zu leugnen, daß dieses Programm die eigentliche Aufgabe des künftigen Lehrers etwas in den Hintergrund treten läßt, und noch mehr dürfte dies von seiner Durchführung gelten; auch die Frage, ob für das vorbereitende Studium nach der elementaren Seite entsprechend vorgesorgt sei, wird kaum bejaht werden können; vielmehr sollten die Forderungen, die Herr Kollege P. Stäckel in seinem vorjährigen Heidelberger Vortrage[1]) bezüglich der deutschen Universitäten aufgestellt hat, auch bei uns ererhoben werden.[2])

II. Die Reformbestrebungen.

Wenn ich nun zu den unter dem Schlagworte „Einführung der Infinitesimalrechnung in den Mittelschulunterricht“ vielfach erörterten Bestrebungen nach einer zeitgemäßen Umgestaltung des mathematischen Unterrichts Stellung nehme, möchte es sich vorerst empfehlen zu zeigen, wie sich unsere Mittelschulen zu den Materien bisher verhalten haben, an welche dabei gedacht ist.

Unsere Lehrpläne sprechen ausdrücklich von Elementarmathematik. Daß dies aber nicht in dem Sinne gemeint ist, als dürfte es sich nur um die Eigenschaften und Gesetze starrer Zahlen- und Raumgebilde

1) Verhandl. des „III. intern. Mathem.-Kongr.“ zu Heidelberg 1904. B. G. Teubner, 1905, S. 608—614.

2) An der Wiener Technischen Hochschule hielt vor der Umänderung der Prüfungsvorschriften (1884) J. Kolbe durch eine lange Reihe von Jahren Vorlesungen, die den Bedürfnissen der Lehramtskandidaten angepaßt waren und der methodischen Behandlung verschiedener Zweige der Schulmathematik galten.

handeln, geht aus den zugehörigen „Instruktionen" hervor, die an zwei Stellen, bei der Trigonometrie und bei der analytischen Geometrie, von veränderlichen und voneinander abhängigen Größen sprechen. In der Tat läßt sich ein sachgemäßer Unterricht innerhalb der abgesteckten Grenzen, auch im Gebiete der Arithmetik, nicht wohl denken, ohne daß die Vorstellungen der Veränderlichkeit, der Abhängigkeit und der Begriff des Grenzwertes herangezogen würden; und damit ist der Funktionsbegriff schon gestreift. Ja, der entscheidende Schritt in dieses Gebiet ist eigentlich schon getan, sobald man von *besonderen* Zahlen zu *allgemeinen* übergeht.

Sehen wir nun zu, wie dies im einzelnen durchgeführt ist. Ich greife zwei von den an den Oberklassen unserer Mittelschulen viel verbreiteten Lehrbüchern heraus, das eine für den arithmetischen, das andere für den geometrischen Lehrstoff.

In dem ersteren treten Betrachtungen, die man als in das Gebiet der Funktionentheorie gehörig zu klassifizieren hätte, an folgenden Stellen auf:

§ 99—102. Im Anschlusse an die Lehre von den Brüchen wird über „Unendlich große und unendlich kleine Größen und Grenzwerte der Veränderlichen" gehandelt und bei dieser Gelegenheit der Funktionsbegriff analytisch eingeführt. Es wird auch schon von einer Einteilung der Funktionen gesprochen.

§ 105 ist bei der Erklärung des Verhältnisses zweier inkommensurabler Größen und der daran geknüpften Einführung der irrationalen Zahlen von „gegeneinander konvergierenden Reihen" und von ihrem gemeinsamen Grenzwert die Rede.

§ 153 wird das Verhalten einer Potenz bei unbegrenzt wachsendem Exponenten verfolgt.

§ 155 kehrt die Betrachtung von § 105 wieder bei dem Nachweise der Irrationalität von $\sqrt[n]{a}$, wenn a nicht die $n$te Potenz einer ganzen Zahl ist.

§ 157 wird die Stetigkeit des Systems der reellen Zahlen erwähnt.

§ 197 wird der Sinn von $\log\infty$ und $\log 0$ erklärt.

§ 208 werden einige Eigenschaften des quadratischen Trinoms angeführt, doch typographisch als von untergeordneter Bedeutung für den Unterricht gekennzeichnet.

§ 227 gibt die Erklärung der Konvergenz und Divergenz einer unendlichen Reihe und untersucht die geometrische Reihe daraufhin.

In einem Anhange werden die Begriffe des Maximums und Minimums allgemein erläutert und die Ermittlung solcher Werte für die „Funktion zweiten Grades", worunter hier eine gebrochene Funktion

mit quadratischem Zähler und Nenner verstanden ist, auf *algebraischem* Wege vorgenommen.

Das andere Buch tut des Funktionsbegriffes nur an den beiden durch die „Instruktionen" vorgezeichneten Stellen kurze Erwähnung, einmal (§ 186) bei der Erklärung der Winkelfunktionen und das zweitemal (§ 219) aus Anlaß der Erklärung dessen, was man unter „Gleichung einer Linie" versteht.

Es dürfte keinem Widerspruch begegnen, wenn ich sage, daß auf diesem Wege eine Vertrautheit mit dem Funktionsbegriff nicht erlangt werden kann; ja, mir kommt vor, als ob diese gelegentlichen kurzen Einstreuungen eher als eine Störung denn als eine Förderung des Unterrichtsganges empfunden würden, und ich glaube, daß ihnen in dieser Form von Lehrern, sicher aber von Schülern eher ausgewichen wird.

Bevor aber an die Einführung der Elemente der Infinitesimalrechnung oder in *der* Einschränkung, in welcher ich den Gedanken unter unseren Verhältnissen als allein ausführbar und ersprießlich halte, an die Einbeziehung der beiden grundlegenden Begriffe der Infinitesimalrechnung in den Rahmen des Mittelschulunterrichtes gedacht werden könnte, müßten die Vorbedingungen hierfür geschaffen sein, und diese erblicke ich in einer intensiven, den ganzen Stoff beherrschenden Pflege der Denkweisen der Analysis, aus der sich der Funktionsbegriff in seiner einfachsten Form mit voller Sicherheit und sozusagen von selbst ausbilden würde. Nicht mit abstrakten Definitionen dürfte der Anfang gemacht werden, sondern mit empirischen, an die Vorgänge im bürgerlichen Leben und in der Natur anknüpfenden Betrachtungen.

Einem in solcher Weise neubelebten und durchgeistigten mathematischen Unterricht räume ich willig die verschiedenen Vorzüge ein, die von berufenen Seiten dafür geltend gemacht wurden. Durch seine Anpassung an die moderne naturwissenschaftliche Weltanschauung würde er sich besser in den Rahmen der durch die Mittelschule angestrebten allgemeinen Bildung einfügen. Durch die Heranziehung leitender Gedankenbildungen führte er einen natürlichen Zusammenhang zwischen den verschiedenen Teilen des mathematischen Lehrstoffes herbei und erleichterte so dessen Erfassung und Festhaltung.

So stelle ich mich völlig auf den Boden des Berichtes, den die in Breslau eingesetzte Unterrichtskommission in der Gesamtsitzung beider Hauptgruppen hier erstatten wird und dessen vorherige Kenntnis ich der Freundlichkeit des Herrn Geheimrats Klein verdanke. Aus voller Überzeugung trete ich dafür ein, daß der mathematische Unterricht an unseren Mittelschulen aus den dort entwickelten Gesichts-

punkten, insbesondere aus dem Gesichtspunkte der Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens, am Gymnasium unter verstärkter Pflege des räumlichen Anschauungsvermögens, umgestaltet und so dem unaufhaltsamen Fortschreiten der Kultur besser angepaßt werde. Ich halte dies, wenn dabei hier wie dort mit einer sorgfältigen Sichtung des herkömmlichen Lehrstoffes vorgegangen wird, für durchführbar trotz des beschränkteren Zeitausmaßes, das uns zur Verfügung steht, weil ich in einer so eingeleiteten Reform nicht nur keine Mehrbelastung, sondern eine Erleichterung erblicken würde. Auch bedeutete dies keineswegs einen Bruch mit den bisher seitens der Unterrichtsverwaltung bezüglich unseres Faches befolgten Grundsätzen, sondern eine natur- und zeitgemäße Fortbildung derselben.

Einem so abgeänderten Unterrichtsgange gegenüber, der die Jugend bis an die Schwelle heranführte, welche die niedere von der höheren Mathematik nach üblicher Auffassung trennt und jenseits der die grundlegenden Begriffe der Infinitesimalrechnung liegen, erscheint mir die Frage, ob diese Schwelle auch noch mit einem Schritt übersetzt werden soll, nicht mehr von so wesentlicher Bedeutung. Entschließt man sich dazu — es sprechen mancherlei Gründe dafür und eine erhebliche sachliche Schwierigkeit läge nach solcher Vorbereitung nicht mehr vor —, dann soll der Schritt mit der gebotenen Vorsicht und Sorgfalt geschehen und zunächst wirklich nur ein erster Schritt bleiben. Denn ein weiteres, erfolgreiches Vordringen in dem neuen Gebiet verlangt die Ausbildung eines Formalismus, zu der die Mittelschule die nötige Zeit nicht aufbringt, soll sie *der* Forderung, die nach meiner Anschauung eine Hauptforderung ist, genügen, daß sie das dargebotene Wissen durch fleißiges Üben zu einem gefesteten und dauernden mache.

Mir will nun scheinen, als ob das Verhältnis zwischen den beiden Fragen: „Ist der Lehrstoff mit der Funktionsidee zu durchsetzen?" und „Sind die Elemente der Infinitesimalrechnung einzuführen?" vielfach verschoben worden wäre zugunsten der letzteren Frage; jedenfalls ist nach dieser Richtung von manchen Seiten zu weit gegangen worden.[1]) Dies ist auch mein Urteil über die Aktion, welche im abgelaufenen

1) Ich weise beispielsweise auf den Aufsatz E. Göttings hin (XI. Bd. d. „Jahresber. d. D. Mathem.-Verein.", 1902), worin für die Elemente der Infinitesimalrechnung an den höheren Realanstalten mehr als ein Jahr der Unterrichtszeit der Prima in Vorschlag gebracht wird. — Wenn ein Unterschied gemacht werden sollte zwischen Gymnasium und Realschule — wofür ich jedoch nicht eintrete —, so wäre unter unseren Verhältnissen das Reformbedürfnis bei den Gymnasien ein größeres; denn *die* Studienrichtungen, die sich auf unserer Realschule aufbauen, schließen ja ohnehin sämtlich die Infinitesimalrechnung ein.

Schuljahre in Wien eingeleitet worden ist und über die hier zu berichten ich mich verpflichtet fühle.

Die beiden Wiener Vereine „Mittelschule“ und „Die Realschule“ faßten in einer gemeinsamen Sitzung im Dezember vorigen Jahres auf Grund eines ausführlichen, auf die Einführung der Elemente der Infinitesimalrechnung abzielenden Referates des Schulrates Dr. K. Zahradníček den Beschluß, die Angelegenheit durch eine aus Mitgliedern beider Vereine zusammengesetzte Kommission beraten zu lassen, die auch die Aufgabe hatte, bezüglich der Einschränkungen und Verschiebungen des bisherigen Lehrstoffes und der organischen Einfügung des neuen Vorschläge auszuarbeiten. Um dieser unter den Vorsitz des für die Sache sehr warm eintretenden Realschuldirektors Hans Januschke gestellten Kommission ein Substrat zu bieten, schrieb Zahradníček später einen Aufsatz[1]), in welchem er des näheren zeigte, wie weit zu gehen, in welcher Weise die Sache zu behandeln und wie sie beim physikalischen Unterrichte zu verwenden wäre. Die Kommission trat im Mai mit den Ergebnissen ihrer Beratung vor das Plenum, das aber nach langer und lebhafter Debatte, in welcher die gemachten Vorschläge vielfacher Bekämpfung ausgesetzt waren, die endgültige Entscheidung auf eine spätere Zeit hinausschob.

Ein Grund der ablehnenden Haltung ist in der einseitigen Begründung der Reformvorschläge durch Rücksichten auf den physikalischen Unterricht zu erblicken, aus welcher die Absicht herausgelesen werden konnte, die Grenzen dessen, was an der Mittelschule noch mathematisch behandelt werden soll, weiter hinauszurücken. Gewiß würde die Physik aus der oben gekennzeichneten Umgestaltung des mathematischen Unterrichtes den größten Nutzen ziehen: die Gewöhnung der Schüler an die Verfolgung einfacher Zusammenhänge zwischen veränderlichen Größen und an ihre graphische Darstellung böte ihr außerordentliche Hilfe. Aber eine stärkere Mathematisierung des physikalischen Unterrichtes ist im Gedenken früherer Zustände nicht zu befürworten. Dagegen erscheint mir die Proposition F. Kleins, die mathematische Bearbeitung physikalischer Aufgaben teilweise in die mathematischen Lehrstunden herüberzunehmen, empfehlenswert und durchführbar; empfehlenswert, weil dadurch der Mathematik wertvoller Übungsstoff zugeführt und der Physik Zeit gewonnen würde für sachliche Unterweisung.[2])

---

1) Erschienen im diesjährigen Programme der I. Staats-Realschule im II. Bezirke Wiens.

2) Dem von einer Seite (L. Tesař, „Zeitschr. f. d. Rw.“, Jgg. XXX, S. 276—285) gemachten Vorschlage, den Übergang zu den Begriffen der Infinitesimalrechnung,

Einen *anderen* Grund erblicke ich darin, daß das von dem Proponenten vorgeschlagene Programm zu weit geht. Ich will mich in dieser Beziehung auf einige Schlagworte beschränken, durch welche die äußersten Grenzen des Geplanten genügend gekennzeichnet sein dürften: Berechnung der Zahl e; neben dem Differentialquotienten auch das Differential[1]); Differentiation der logarithmischen Funktion, logarithmische Reihen (mittels der Methode der unbestimmten Koeffizienten); neben den trigonometrischen auch die zyklometrischen Funktionen, trigonometrische Reihen; der zweite Differentialquotient; in den vorgeführten physikalischen Anwendungen kommen bei näherem Zusehen weiter vor: Differentiation zusammengesetzter Funktionen; Integration spezieller Differentialgleichungen bis zur zweiten Ordnung; Einführung einer neuen Variablen in einem Integral; Extremwerte mit Nebenbedingungen.

Ich will es freimütig aussprechen, daß ich die Wiener Vorschläge in ihrer gegenwärtigen Fassung weder der Sache noch der Form nach als unmittelbar geeignet erachten würde, der weiteren Verfolgung der Angelegenheit als Basis zu dienen.

Soll ich aber kurz angeben, wie weit zu gehen mir etwa ratsam erschiene, so würde ich auf Borels zweiten Zyklus der Algebra, bestimmt für die mathematischen Klassen der Kategorien C, D der französischen höheren Schulen, hinweisen, ein Buch, das mir überhaupt in der ganzen Frage großer Beachtung würdig erscheint.[2])

* * *

Am Schlusse meiner Ausführungen angelangt, will ich mir erlauben, meine persönliche Anschauung in folgenden Sätzen zusammenzufassen.

Nicht aus äußeren, sondern aus Gründen innerer Notwendigkeit ist eine Umgestaltung des mathematischen Unterrichts an unseren Mittelschulen, den Gymnasien wie den Realschulen, in dem Sinne zu empfehlen,

---

falls sie eingeführt würden, in der Physik zu vollziehen, könnte ich mich nicht anschließen.

1) Man vergleiche E. Borels *Algèbre, second cycle*, Fußnote Seite 308.

2) Die Schulreform hat in Frankreich trotz der kurzen, seither verstrichenen Frist schon eine reiche literarische Tätigkeit im Gefolge gehabt, an der sich auch hervorragende Vertreter der Wissenschaft beteiligt haben. Es erschienen:

Algèbre, premier cycle et second cycle par Émile Borel. Paris, A. Colin 1903.

Notions de Mathématiques, par Jules Tannery (suivies de Notions historiques par Paul Tannery). Paris, Ch. Delagrave, 1903,

Précis d'Algèbre, par Carlo Bourlet. Paris, Hachette, 1904.

Traité d'Algèbre, par A. Grévy. Paris, Vuibert et Nony, 1905.

daß der bisherige Lehrstoff einer sorgfältigen Sichtung unterzogen und mit den Grundgedanken der elementaren Funktionenlehre bis hin zu den beiden Fundamentalbegriffen der Infinitesimalrechnung organisch durchsetzt werde.

An die Unterrichtsverwaltung wäre die Bitte zu richten, zur Anbahnung dieser Reform eine aus Vertretern der Wissenschaft und der Schule gebildete Kommission einzusetzen, mit der Aufgabe, die Grenzen des neuen Stoffes mit sorgfältiger Bedachtnahme auf die zur Verfügung stehende Zeit und die Fassungskraft der Jugend abzustecken und seine zweckmäßige Gliederung in einem detaillierten Lehrplane festzustellen.

Die Unterrichtsverwaltung wäre ferner zu ersuchen, die Abfassung von Lehrbüchern auf der so geschaffenen Basis mit allen ihr zu Gebote stehenden Mitteln zu fördern und die Einführung solcher Lehrbücher über begründeten Antrag der Lehrkörper zuzulassen.

Die hierbei gemachten Erfahrungen sowie die im Auslande in der gleichen Richtung erzielten Erfolge hätten bei weiteren Maßnahmen als Richtschnur zu dienen.

Die Reformbewegungen im mathematischen Unterrichte in den Vereinigten Staaten Nordamerikas.

Von J. W. A. Young in Chicago, Ill.

Die Reformbestrebungen, die sich zur Zeit in amerikanischen Mathematikerkreisen fühlbar machen, sind natürlich nur im Hinblick auf die Verhältnisse, unter denen sie stattfinden, zu beurteilen. Um also den Lesern des Jahresberichts über den Charakter, Zweck und wahrscheinlichen Erfolg der Bewegung zu berichten, ist es nötig, zuerst kurz die Organisation des amerikanischen Schulsystems darzulegen.

1. *Die allgemeine Organisation des Unterrichtswesens in den Vereinigten Staaten.* Ein Unterrichts-Ministerium oder eine zentrale Verwaltung der Unterrichtsangelegenheiten, in der deutschen Auffassung des Wortes, gibt es in den Vereinigten Staaten nicht. Zwar existiert ein "United States Bureau of Education", mit einem "United States Commissioner of Education" an der Spitze, aber seine Rolle ist ausschließlich ratgebend und seine Tätigkeit besteht hauptsächlich in der Herausgabe eines Jahresberichtes (über 2500 große Seiten stark), der eine umfassende Statistik, sowie besondere Berichte über spezielle Punkte des in- und ausländischen Unterrichtswesens enthält.[1])

---

1) Die im folgenden gemachten statistischen Angaben sind diesem Berichte entnommen.

Die wirkliche Verwaltung des Schulwesens bleibt ausschließlich Sache jedes einzelnen Staates, der es wieder zum Teile oder ganz den verschiedenen Städten und Orten überläßt. Die effektive Verwaltung, — die Feststellung des Lehrplans, die Anstellung der Lehrer, die Verfügung über die Unterrichtsführung im großen und im kleinen, — liegt gewöhnlich in den Händen einer Lokalbehörde (School Board). In vielen Staaten ist es also sehr wohl möglich, daß zwei benachbarte Städte sehr verschiedene Lehrpläne oder Unterrichtsmethoden verfolgen, und jeder einzelnen Stadt steht es frei, ohne Rücksicht auf die andern oder auf die staatlichen Behörden, irgend welche Veränderungsvorschläge ohne weiteres anzunehmen und einzuführen.

Das Gesagte bezieht sich auf die sognannten „öffentlichen Schulen", (public schools), die durch Steuern unterhalten sind, und die, wie schon gesagt, gewöhnlich von Lokalbehörden verwaltet werden.

Neben diesen gibt es eine ansehnliche Anzahl Privatschulen, die durch Schulgeld erhalten werden (bisweilen auch teilweise durch Privatdotationen). Diese Schulen sind ganz unabhängig von irgendwelcher Reglementierung oder Aufsicht seitens des Staates. Um also einen vorgeschlagenen neuen Lehrplan oder neue Lehrmethoden in Kraft zu setzen, ist es nur nötig, die Zustimmung einer einzigen Stadt oder einer einzigen Privatschule zu erwirken. Privatschulen mögen sogar besonders zu dem Zweck gegründet werden, eine neue Idee zu verwirklichen. Man mag mit einem Lehrer in einer kleinen Stube anfangen oder mit einem großen Lehrerkollegium in imposanten Gebäuden, falls die nötigen Gelder aus Privatkassen zu haben sind. Nirgend ist es also leichter als in den Vereinigten Staaten, eine pädagogische Theorie in wenigstens einer Anstalt in Praxis zu setzen. Ausländer, die die Lehranstalten der Vereinigten Staaten besuchen, und die natürlich nach den frappantesten Neuerungen fragen, kommen also ganz leicht zu der Ansicht, daß man in Amerika immer der letzten Neuheit nachlaufe. Vom Lande im ganzen ist jedoch gerade das Umgekehrte zu behaupten. Während es relativ leicht ist, Linien geringsten Widerstandes befolgend, irgendwo eine Schule aufzufinden, in der ein neuer Lehrplan oder eine neue Lehrmethode ausprobiert werden mag, ist es ungemein viel schwieriger, eine weitere Verbreitung zu erwirken. Eine nennenswerte Aufnahme erfordert die Zustimmung von Tausenden von Männern, Hunderten verschiedener Behörden. Folglich bewegt sich das Land im ganzen langsamer, verhält sich in Erziehungssachen mehr konservativ, als die leitenden Völker Europas. Man hat in den Vereinigten Staaten nie durchgreifende Änderungen so rasch in allgemeine Wirksamkeit gesetzt gesehen, als in den preußischen Lehrplänen für

höhere Schulen von 1891 oder 1901, dem französischen Programm für lycées von 1902, oder in der Revolution im geometrischen Unterrichte, der in den letzten fünf oder sechs Jahren in England stattgefunden hat. Das amerikanische Ideal ist die größte mögliche Freiheit für den einzelnen, für die kleine Einheit. In einem so komplexen Organismus wie das Unterrichtssystem einer Bevölkerung von über achtzig Millionen ist gerade diese gänzliche Freiheit von irgendwelchen staatlichen Vorschriften eine Hemmung für die kleine Einheit. Eine alleinstehende Schule darf es kaum unternehmen, Reformen einzuführen, die das Gleichgewicht des *status quo* stören würden. Folglich bleiben Änderungen, die an sich sogar allgemeine Zustimmung finden würden, viel länger ohne allgemeine praktische Aufnahme in den Vereinigten Staaten als unter einem starken zentralen System. Freiwillige Vereinigungen einer gewissen Anzahl von Anstalten mit der Verpflichtung, den Beschlüssen der Mehrheit Folge zu leisten, sind schon vorgeschlagen worden, aber der Vorschlag hat keine günstige Aufnahme gefunden.

Dieser Schwierigkeit der *allgemeinen* Einführung einer vermeintlichen Reform gegenüber steht aber der große Vorzug, daß, da die Einführung nur durch eine weitverbreitete öffentliche Propaganda und Überzeugung des Schulpublikums erwirkt werden kann, die wirkliche Einführung ein wohlunterrichtetes, sympathisches Lehrerpublikum findet, das die neuen Maßregeln als die Inkraftsetzung seiner eigenen Überzeugungen und Wünsche freundlich begrüßt.

2. *Die vier aufeinander folgenden Typen von Anstalten.* Eine vollständige Ausbildung zu einem der gelehrten Stände oder für eine technische Laufbahn, wird zur Zeit in den Vereinigten Staaten normal erworben durch die aufeinander folgende Absolvierung der folgenden Anstalten, deren Namen sich nur teilweise übersetzen lassen:

1. Die "grade schools".
2. Eine "high school".
3. Ein "College".
4. Eine Universität oder technische Schule.

Die Schüler werden im Alter von sechs Jahren ohne vorausgesetzte Vorkenntnisse in die "grade schools" aufgenommen und der Kursus dauert acht Jahre. — Der Unterricht wird fast ohne Ausnahme durch Frauen erteilt, und jeder Lehrerin ist eine Klasse Schüler desselben Jahres zugewiesen, die sie in allen Fächern unterrichtet.

Auf die acht Jahre der "grade schools" folgen vier Jahre der "high schools". Hier sind die verschiedenen Fächer durch besondere Lehrer und Lehrerinnen vertreten, die sich auf ihr Fach mehr oder minder speziell vorbereitet haben. Die zwei Gattungen von Schulen

entsprechen in manchen Hinsichten etwa den deutschen Volksschulen und höheren Schulen, mit dem wichtigen Unterschiede, daß der Schüler nur nach vollendetem "grade school"-Kurse in die "high school" aufgenommen wird. Diese Schulen sind alle „öffentlich" (d. h. unentgeltlich und durch Steuern unterhalten), aber parallel mit ihnen existieren Privatschulen desselben Charakters.[1]) Der Besuch der Privatschulen ist etwa 6 % des Ganzen für die "grade schools", und 22 % für die "high schools".[2])

Auf die vier Jahre der "high school" folgen vier Jahre in einem "College", und darauf drei oder mehrere Jahre in einer Universität oder technischen Schule. Mit jeder Universität des Landes ist ein "College" verbunden. Die große Mehrzahl der "Colleges" und „Universitäten" sind Privatstiftungen, obwohl die verschiedenen Staaten auch Universitäten erhalten. Der gesamte Besuch der "Colleges", Universitäten und technischen Schulen verteilt sich 71 % auf die Privatanstalten und 29 % auf die staatlichen.

3. *Der mathematische Lehrstoff.* In den "grade schools" wird Rechnen behandelt. Damit ist mehr oder weniger konkrete Körperlehre (Messungen) verbunden und bisweilen, besonders in den größeren Städten, die Elemente der Algebra (Buchstabenrechnung) und etwas propädeutische Geometrie. Dies ist in Übereinstimmung mit den Empfehlungen verschiedener Ausschüsse, von denen später die Rede sein wird, ist aber noch als Experiment zu betrachten und hat bei weitem noch nicht allgemeine Aufnahme gefunden.

Die Lehrpläne der "high schools" sind natürlich verschieden, das folgende mag aber als typisch gelten; jedem Lehrgegenstande werden etwa 4 von 20 wöchentlichen Lehrstunden gewidmet:

Erstes Jahr — Algebra.
Zweites Jahr — Planimetrie.
Drittes Jahr — Erstes Semester, Algebra, bis einschließlich quadratische Gleichungen; zweites Semester, Stereometrie.
Viertes Jahr — Keine Mathematik sondern Physik.

1) Die Privatschulen führen gewöhnlich nicht die Namen "grade schools" und "high schools", die jedoch im folgenden, der Kürze und Klarheit halber, zur Bezeichnung von Privat- sowohl als öffentlichen Schulen benutzt werden sollen.

2) Man darf aber nicht annehmen, daß die wohlhabenden Eltern gewöhnlich ihre Kinder in die Privatschulen senden; aus den erwähnten 6 % sind 5,3 % in den römisch-katholischen Privatschulen, und es bleiben also höchstens nur 0,7 % des Ganzen, die aus nicht-religiösen Gründen Privatelementarschulen besuchen. Im allgemeinen erhalten die Kinder, reich und arm, gemeinsam die ersten acht Jahre ihrer Schulbildung in den öffentlichen "grade schools".

In den "Colleges" ist der Gebrauch verschieden. Meistens sind im ersten Jahre 3 bis 5 Stunden Mathematik von einer Gesamtzahl von 15 Stunden obligatorisch, aber in einer ansehnlichen Anzahl von Anstalten, darunter in manchen der größten und besten, ist die Mathematik durchweg fakultativ, sei es, daß entweder alles dem Studenten wahlfrei ist und er nur die vorgeschriebene Anzahl von Stunden nach Belieben zu wählen hat, oder daß seine Wahl allgemeinen Bedingungen unterliegt, denen er ohne Wahl der Mathematik genügen kann. In allen "Colleges" wird die Mathematik wenigstens bis einschließlich Differential- und Integralrechnung getrieben; meistens werden, nach Umständen, nach der Wahl der Studierenden und der Stärke und Verfügbarkeit der Lehrkräfte, noch andere Kurse gegeben, wie z. B. Bestimmte Integrale, Differentialgleichungen, Algebraische Gleichungen, Analytische Geometrie des Raumes, Geometrie der Lage, Quaternionen, usw. In den "Colleges", die Teile von Universitäten sind, stehen auch den gehörig vorbereiteten Studenten des "College" die höhere Vorlesungen zur Wahl offen.

4. *Frühere Reformvorschläge.* In neuerer Zeit haben zwei Ausschüsse der "National Educational Association", einer freiwilligen Vereinigung, Gutachten nationaler Bedeutung veröffentlicht, die unter anderem den Unterricht in der Mathematik behandelten; nämlich, "The Report of the Committee of Ten" 1893, und "The Report of the Committe eon College Entrance Requirements" 1899. In jedem Falle wurden besondere Fachkomitees zur Hilfe gerufen, die Gutachten und Empfehlungen über ihre betreffende Fächer verfaßten, die alsdann als Teil des Berichts des Hauptausschusses veröffentlicht wurden.

Unter den wichtigeren Empfehlungen des mathematischen Ausschusses des "Committee of Ten" waren:

1. Daß der Kursus im Rechnen abgekürzt werde durch Weglassen veralteten, unpraktischen oder zu schwierigen Materials, und daß er durch mehr Übung im wirklichen Rechnen und in Auflösung konkreter Probleme bereichert werde.

2. Daß das Rechnen etwa im Alter von 13 Jahren zum Abschluß gebracht werde.

3. Daß Formenlehre (propädeutische Geometrie) mit dem Rechnen gelehrt werde.

4. Daß systematische Algebra im Alter von 14 Jahren angefangen werde, aber daß die Schüler früher mit algebraischen Ausdrücken und Symbolen und mit den Auflösungsmethoden einfacher Gleichungen bekannt gemacht werden.

5. Daß formelle Geometrie nach einem Jahre der Algebra an-

gefangen werde, daß alsdann Geometrie und Algebra nebeneinander zwei Jahre hindurch getrieben werden, und daß in diesem Zeitraum beides, die Planimetrie und die Stereometrie, absolviert werde.

6. Daß von Anfang des mathematischen Unterrichtes an immer größtes Gewicht auf akkurate Ausdrucksweise und Eleganz der Form sowohl als auf klare und strenge Schlußführung gelegt werde.

7. Daß die Schüler früh und fortwährend angehalten werden Konstruktionen nnd Beweise selbst zu erfinden.

Unter den wichtigeren Empfehlungen des mathematischen Ausschusses des "Committee on College Entrance Requirement" waren:

1. Daß konkrete Geometrie (anschauende, messende Formenlehre), als Teil des Pensums im Rechnen während der ersten sechs Jahre getrieben werde (Alter 6 bis 12).

2. Daß das siebente Jahr (Alter 13) zwischen Rechnen und den Elementen der beweisenden Geometrie geteilt werde.

3. Daß im achten Jahre (Alter 14), die Geometrie fortgesetzt und die Algebra angefangen werde.

4. Daß, wenn es nötig ist, lokaler Umstände halber den Anfang der Geometrie und der Algebra auf die "high school" hinaufzuschieben, hier auch die Geometrie vor der Algebra angefangen werde.

5. Daß einmal angefangene Geometrie und Algebra gleichzeitig gelehrt werden, insofern wenigstens, daß beides, Geometrie und Algebra, in jedem der vier Jahre der "high school" getrieben werde.

6. Der Gesichtspunkt der Einheit des mathematischen Pensums der "high school", anstatt streng getrennter Fächer, wurde angenommen, und es wurde empfohlen, die verschiedenen Teile so eng als möglich zusammenzuziehen und gegenseitig aufeinander anzuwenden.

7. Die Wichtigkeit gründlicher Vorbereitung der Lehrer, beides in mathematischen Kenntnissen und pädagogisch, wurde hervorgehoben.

Das Hauptkomitee empfiehlt auch den Anschluß der letzten zwei Jahre der "grade schools" (Alter 12 und 13) an die "high schools". Hierdurch würde eine sechsjährige "high school" gebildet werden, mit 12 Jahren als Eintrittsalter. Der Vorschlag ist anderweitig gemacht worden, daß die stärkeren "high schools" auch den Unterricht der ersten zwei Jahre des jetzigen "College"-Unterrichts erteilen möchten. Diese Vorschläge finden bedachtsame Unterstützung, und kennzeichnen ohne Zweifel eine der bezeichnenden Strömungen des Tages, aber praktische Schwierigkeiten der Organisation und Ausstattung dürften vielleicht ihre frühe Ausführung verhindern, sogar seitens solcher, die diese Vorschläge als theoretisch wohlbegründet und zeitgemäß betrachten. Die Bildung solcher sechs- bis achtjährigen Anstalten anstelle der jetzigen

vierjährigen, wäre schon an sich eine wichtige mathematische Reform, indem dadurch inter alia ein homogener mathematischer Unterricht ermöglicht würde, der jetzt nicht zu erreichen ist.

5. *Wachstum des Interesses an der Pädagogik der Mathematik.* Schon seit langem existieren Schulen für die Ausbildung von Lehrern in den "grade schools". Diese Schulen, "Normal-Schools" genannt, entsprechen etwa den deutschen „Volksschullehrerseminarien". Interesse an der allgemeinen Pädagogik als Universitäts-Disziplin ist auch schon seit einiger Zeit im Aufschwung, aber erst in den allerneuesten Zeiten haben die Universitäten angefangen, der pädagogischen Ausbildung der Lehrer der Schulmathematik direkte und ausdrückliche Aufmerksamkeit zu schenken. Meines Wissens wurde das erste Universitätskolleg, das sich ausdrücklich mit der pädagogischen Seite der Mathematik beschäftigte, in der Universität Chicago im Jahre 1895 gehalten. Jetzt werden solche Kollegs auch in der Harvard University, The University of Pennsylvania, The University of Michigan, The University of Indiana u. a. abgehalten. Innerhalb des letzten Jahrzehntes wurden auch gegründet das "Teachers' College" von Columbia University, New York, und die "School of Education" der Universität Chicago, die sich mitunter ganz besonders mit der pädagogischen Ausbildung von Lehrern für "high schools" beschäftigen.

6. *Die Abgangsrede des Präsidenten der "American Mathematical Society", 1902.*[1]) Es ist Brauch, daß am Schlusse seines Amtstermins der Präsident der "American Mathematical Society" eine allgemeine Rede vor der "Society" halte. So hielt am 29. Dezember 1902 Professor E. H. Moore von der Universität Chicago eine Rede über "The Foundations of Mathematics", die sich größtenteils der Pädagogik der Mathematik widmete, und die einen wichtigen Markstein im Fortschritte dieses Zweiges der Pädagogik in den Vereinigten Staaten bildet.

Nach einem kurzen Hinweis auf die Bewegungen für die Verbesserung des mathematischen Unterrichts in Deutschland, in Frankreich, und besonders in England unter Perry, die alle auf die engere Verbindung der Mathematik und ihrer Anwendung im Unterrichte hinzielen, und die auch für Amerika viel Lehrreiches enthalten, geht Moore auf sein eigentliches Thema ein, und zwar zuerst auf das fundamentale Problem der Vereinigung der reinen und der angewandten Mathematik. Die Lösung sei zu finden in einer derartigen Zusammenstellung des Lehrplanes, daß im Gebiete der Elementarmathematik die Verzweigung zwischen der reinen und der angewandten Mathematik nicht bemerkbar werde.

1) Vgl. diesen Jahresbericht, Bd. 12, S. 348—49.

„Wäre es nicht möglich“, sagte er, „die Schüler so zum Beobachten und Experimentieren und Nachdenken und Schlußfolgern anzuhalten, daß ihre Mathematik immer in direkter Verbindung mit Sachen durchaus konkreten Charakters stehe?

Wäre es nicht möglich, die Algebra, Geometrie und Physik der “high schools” in einen durchweg einheitlichen vierjährigen Lehrgang zu organisieren?“

Moore verlangt, daß die Physik sowohl als die Mathematik durchaus praktisch gemacht werde, und daß nicht nur der theoretische Aufbau der Mathematik, sondern auch der der Physik auf eine spätere Stufe verschoben werde. In der “high school” würde der Lehrstoff (wenigstens für Knaben) großenteils nach Wunsch der Ingenieure gewählt und behandelt werden.

Moore glaubt, daß die Ausführung dieses Programms die Entwicklung eines “Laboratory systems” des Unterrichts in der Mathematik und Physik erfordere, dessen Hauptziel die Erweckung des wahren Forschungsgeists in jedem Schüler und eine Würdigung, praktisch sowohl als theoretisch, der fundamental-wissenschaftlichen Methoden sein würde. An einem solchen System würden, nach Meinung des Schülers, die mathematischen Prozesse und Theorien nach den Bedürfnissen der physikalischen Versuche entwickelt werden, und er würde sie mit mehr Eifer und Interesse durchmachen, weil er sie in einer andern Arbeit nötig hat. Seitens des Lehrers würden die Versuche so gewählt werden, daß alle nötigen Prozesse und Sätze der Schulmathematik zur Anwendung kämen, und so, daß von einem andern Gesichtspunkt die physikalischen Versuche als einleitende, erläuternde oder beleuchtende Beispiele zur Mathematik betrachtet werden könnten.

„Es ist nicht ratsam, z. B., Experimente durchmachen zu lassen, die den Gebrauch des Tasterzirkels (Calipero), des Nonius oder des Rechenschiebers lehren sollen. Anstatt solcher uninteressanten Experimente von sehr begrenztem Zweck sollten den Schülern höchst interessante Probleme aufgegeben werden, die den Gebrauch dieser Instrumente erfordern; der Schüler würde alsdann von selbst sich des Gebrauches der Instrumente bemächtigen.

Ebenso können die Einzelheiten mathematischer Routine mit physikalischen Problemen verbunden werden, die das Interesse der Schüler erwecken und fesseln. Alles existiert natürlich in seinen Verhältnissen zu andern Sachen, und während der Lehrer das eine lehrt, muß er auch diese Zusammenhänge beleuchten. Jedes wichtigere Ergebnis sollte durch mindestens zwei verschiedene Methoden erreicht werden.“

Moore glaubt, daß die Schüler der "high schools" in ein wesentliches Verhältnis zu den fundamentalen Elementen der Trigonometrie, der analytischen Geometrie und der Differential- und Integralrechnung gebracht werden können, wenn nur die ganze Behandlung in engster Verbindung mit konkreten Erscheinungen gehalten wird. Das zwanzigste Jahrhundert sollte es möglich finden, jungen Leuten während ihrer plastischen Jahre, in gründlich konkreter und anziehender Form, die wunderbaren neuen Ideen des siebzehnten Jahrhunderts zu erschließen. Als Folge, erwartet Moore, würde der Student im "College" effektives Interesse an den abstraktesten Zweigen der Mathematik kundgeben.

Was Axiome und kritische Strenge betrifft, möge der Unterricht wohl auf einem großen Fundament von Annahmen aufgebaut werden, und die philosophische Kritik der Basis selbst sowie die Einschränkung des Fundamentalsystems auf eine spätere Zeit verschoben werden. Es wäre durchaus praktisch und auch durchaus wissenschaftlich, jeden Schüler anzuhalten für sich selbst einen Körper von geometrischen Grundprinzipien zu formulieren, worauf er sein geometrisches Gebäude aufbauen würde. Die Schüler würden manche der Axiome garnicht aussprechen, aber als ganz selbstverständlich fast unbewußt annehmen und anwenden. Andererseits würden natürlich verschiedene Schüler verschiedene Systeme von Axiomen aufstellen, und die Besprechung dieser Systeme würde es allen klarer machen, was eigentlich die Rolle der Axiome in der Theorie der Geometrie ist.

Am Schluß seiner Rede hat Moore die Bildung eines nationalen Vereins zur Beratung über Fragen der Pädagogik der Mathematik empfohlen.

Diesem Vorschlage, obwohl am Ende der Rede in wenigen Worten vorgebracht und seinem Wortlaute nach nur an den angeredeten Verein gerichtet, dürfte jedoch die größte Tragweite beigelegt werden, und er hätte, in seinem wahren Geiste und nicht nur buchstäblich gedeutet, die Annahme anderer wohlgegründeter Vorschläge zur Folge. Denn die Existenz tatkräftiger Vereine, mit regelmäßigen und häufigen Zusammenkünften und mit einem weitverbreiteten Journal als Organ, die die gründliche Erörterung pädagogischer Fragen, die Stärkung des *esprit du corps* unter den Lehrern, und das engere Zusammenwirken der Lehrer der Mathematik und der naheliegenden Naturwissenschaften eifrig beförderten, würde die Einführung und Ausprobierung spezifischer Reformprogramme am allersichersten verbürgen.

Als Hauptvorschläge in Moores Rede mögen schließlich hervorgehoben werden:

1. Daß das Rechnen durchaus konkret gemacht werde.

2. Daß in den "high schools" die verschiedenen Zweige der Mathematik mit der Physik zu einem zusammenhängenden Ganzen verschmolzen werden.

3. Daß die Fähigkeiten der Schüler über die anzustrebende Strenge entscheiden sollten. — Große Systeme von Axiomen dürfen benutzt werden.

4. Daß das Vorhergehende durch ein "laboratory system" des Unterrichts erreicht werde.

5. Daß lokale Vereine, sowie eine nationale Organisation zur Erörterung mathematisch-pädagogischer Fragen gegründet werden.

7. *Mathematisch-Pädagogische Vereine.* Im Jahre 1902 wurde die "Central Association of Science and Mathematics Teachers" gegründet, und seitdem die folgenden Vereinigungen: The New England Association of Teachers of Mathematics, The Association of Teachers of Mathematics in the Middle States and Maryland; State Associations in Ohio, Missouri, Washington; auch verschiedene städtische Vereine, wie z. B. in Chicago, St. Louis, Cleveland. Es existieren auch Abteilungen für Mathematik in Verbindung mit verschiedenen allgemeineren Lehrervereinen.

Am 5. Juli 1905 wurde eine Versammlung von Vertretern beinahe aller dieser Vereine zu Asbury Park, N. J., im Anschluß an die jährliche Versammlung der "National Educational Association" abgehalten, und eine "National Association of Teachers of Mathematics and Science" gebildet. Vermutlich wird dieser Verein jährliche Versammlungen in Verbindung mit denen der "National Educational Association" abhalten. Er wird hoffentlich viel zur Förderung des mathematischen Unterrichts in den Vereinigten Staaten beitragen, obwohl nach wie vor das Hauptgewicht wohl in den geographisch kleineren Vereinen liegen wird. Die großen Entferungen Amerikas gestatten nur einer verhältnismäßig sehr geringen Anzahl von Lehrern, den Versammlungen eines nationalen Vereins beizuwohnen. Man bedenke, daß, wenn die nächste Versammlung des Vereins in San Francisco abgehalten wird, was sehr wohl möglich ist, die Mathematiker New Yorks oder Bostons eine ebenso große Reise zurückzulegen haben, als ob die Versammlung in London oder Paris stattfände.

Von allgemeinem Interesse ist die Frage, ob der nationale Verein nur aus Mathematikern bestehen solle, oder ob auch Naturwissenschaftler zuzulassen seien. Gute Gründe lassen sich für beide Ansichten angeben, und die existierenden Vereine sind auch zum Teil auf der einen Basis, zum Teil auf der andern gebildet. Nach einer längeren Besprechung wurde aber fast einstimmig beschlossen, daß der nationale Verein Naturwissenschaftler sowohl als Mathematiker als Mitglieder

zulassen solle, in der Erwartung natürlich, daß neben den allgemeinen Versammlungen auch besondere Abteilungsversammlungen für Mathematik, für Physik usw. veranstaltet werden sollen.

Diese Vereine bekunden alle eine rege Tätigkeit und ein lebhaftes und wachsendes Interesse an der Pädagogik der Mathematik, und zweifelsohne werden sie eine wichtige Rolle in der weiteren Entwicklung des mathematischen Unterrichts in den Vereinigten Staaten spielen.

Eine monatliche Zeitschrift, "School Science and Mathematics"[1]), dient den meisten von ihnen als offizielles Organ und bringt, nebst besonders für die Zeitschrift verfaßten größeren und kleineren Artikeln, Berichte der Verhandlungen der verschiedenen Vereine, sowie die Tagesneuigkeiten. Mittels dieser Zeitschrift ist es also möglich den weiteren Gang der amerikanischen Bewegung zu verfolgen.

8. *Zusammenfassung.* Die heutigen Bewegungen in den Vereinigten Staaten erzielen hinsichtlich des mathematischen Unterrichts wenigstens drei Hauptzwecke:

1. Den Unterricht in der Mathematik mehr anschaulich zu gestalten; ihn in engere Verbindung mit der Physik und mit allen Anwendungen der Mathematik zu bringen. Dies ist dieselbe Tendenz amerikanischen Verhältnissen angepaßt, die sich in Deutschland, in Frankreich und in England fühlbar macht.

2. Die jetzige Anordnung der mathematischen Fächer zu verbessern. Die Ausführung solcher Vorschläge hängt nicht nur von ihrem eigenen Wert und ihrer Zeitgemäßheit ab, sondern auch von der oben skizzierten allgemeinen Lage des Schul- und Unterrichtswesens in den Vereinigten Staaten.

3. Die Fragen, die den mathematischen Unterricht betreffen, mittels Vereinigungen und Zeitschriften eingehend zu erörtern.

Daß die letzten Jahre eine Neubelebung des Interesses an der Pädagogik der Mathematik gesehen haben, ist unverkennbar. Was daraus werden wird, bleibt Sache der Zukunft — aber die Zeichen der Zeit berechtigen uns zu glauben, daß in den nächsten Jahren wertvolle Fortschritte in allen drei der ebengenannten Hauptrichtungen zu erwarten sind.

Universität Chicago, im August 1905.

1) Verleger: Smith & Turton, 440 Kenwood Terrace, Chicago.

Über konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Bereiche, insbesondere solcher Bereiche, deren Begrenzung von Kreisen gebildet wird.

Von Paul Koebe in Berlin.

Bernhard Riemann hat in seiner Inauguraldissertation den Satz aufgestellt, daß zwei in einer Ebene liegende einfach zusammenhängende, von je einer Randlinie begrenzte Bereiche stets konform, d. h. zusammenhängend und in den kleinsten Teilen gleichstimmig ähnlich auf einander abgebildet werden können in der Weise, daß jedem Punkte des einen Bereiches ein und nur ein Punkt des andern Bereiches entspricht und umgekehrt. Für mehrfach zusammenhängende schlichtblättrige ebene Bereiche ist die analoge Frage von Herrn Schottky in seiner Arbeit „Über die konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Flächen" (Crelles Journal Bd. 83) behandelt worden. Zwei solche Bereiche können im allgemeinen nicht konform auf einander abgebildet werden, sondern nur dann und stets dann, wenn die Klassen der zu diesen Bereichen gehörenden algebraischen Gleichungen (Klasse im Riemannschen Sinne verstanden) übereinstimmen und außerdem eine gewisse topologische Bedingung erfüllt ist, welche aus dem Unterschiede zwischen einem Bereiche und seinem in bezug auf eine gerade Linie genommenen Spiegelbilde entspringt.

Im folgenden beschränke ich mich zunächst auf die Betrachtung solcher Bereiche, welche die Ebene schlicht überdecken und deren Begrenzung aus einer endlichen Anzahl von Kreisen gebildet wird, von welchen keine zwei einander schneiden oder berühren. In diesem Falle läßt die Frage, wann zwei solche Bereiche konform auf einander abgebildet werden können, eine spezielle Behandlung zu. Werden die Punkte der Ebene in der bekannten Weise als die geometrischen Repräsentanten der Werte einer veränderlichen komplexen Größe $z = x + iy$ aufgefaßt, so kann das Resultat folgendermaßen ausgesprochen werden:

Zwei in der z-Ebene liegende schlichtblättrige Bereiche T und T', jeder begrenzt von $\varrho + 1$ Kreisen, von welchen keine zwei einander schneiden oder berühren, lassen sich stets dann und nur dann konform auf einander abbilden, wenn es eine ganze oder gebrochene lineare Transformation

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

gibt, vermittels deren der Bereich T in den Bereich T' übergeht.

Um diesen Satz zu beweisen, zeige ich folgendes:

Eine analytische Funktion $z' = f(z)$, durch deren Vermittelung zwei solche Bereiche konform auf einander abgebildet werden, kann nur eine ganze oder gebrochene lineare Funktion von z sein.

Im Falle $\varrho = 0$ kann der Beweis des zuletzt ausgesprochenen Satzes, wie bekannt, besonders leicht erbracht werden. Dabei kann man sich entweder des Spiegelungsprinzips bedienen oder eines Satzes der Potentialtheorie, nach welchem eine im Innern eines ebenen Bereiches eindeutig und regulär definierte Potentialfunktion, welche längs der ganzen Begrenzung des Bereiches den Wert *null* annimmt, auch für alle inneren Punkte verschwindet. Beide Wege führen auch im Falle $\varrho = 1$ zum Ziele.

Nach der zweiten Methode gestaltet sich der Beweis folgendermaßen.

Von den Bereichen T und T' kann durch zwei lineare Transformationen

$$z_1 = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad z_1' = \frac{\alpha' z' + \beta'}{\gamma' z' + \delta'}$$

zu zwei von konzentrischen Kreisen begrenzten Ringgebieten übergegangen werden, welche beide den Nullpunkt zum Mittelpunkt und den Einheitskreis als äußeren Begrenzungskreis haben. Ferner kann angenommen werden, daß die Funktion $z_1' = \varphi(z_1)$, in welche $z' = f(z)$ durch die angegebene Transformation übergeht, die Peripherie des Einheitskreises in sich überführt. Dann ist die Funktion

$$u = \Re \log \varphi(z_1) = \log |\varphi(z_1)|$$ [1])

eine der partiellen Differentialgleichung

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} = 0$$

genügende Funktion der beiden durch die Gleichung $z_1 = x_1 + iy_1$ erklärten reellen Veränderlichen x_1 und y_1. Diese Funktion ist im Innern von T_1 eindeutig und regulär erklärt, längs des äußeren Begrenzungskreises von T_1 nimmt sie den Wert *null*, längs des inneren Begrenzungskreises einen konstanten negativen Wert an; also ist, wenn a eine passend zu wählende positive Größe bezeichnet,

$$\Re \log \varphi(z_1) = \Re(a \cdot \log z_1),$$

mithin

$$\varphi(z_1) = e^{ib} \cdot e^{a \log z_1},$$

wobei b eine reelle Konstante bedeutet. Die positive Größe a kann

---

1) Der Buchstabe $\Re$ soll bedeuten: *Reeller Teil von.*

nur den Wert 1 haben; denn wenn z_1 den Einheitskreis einmal durchläuft, so durchläuft $\varphi(z_1)$ den gestellten Bedingungen zufolge den Einheitskreis genau einmal und zwar in demselben Sinne wie z_1. Demnach wird

$$\varphi(z_1) = e^{ib} \cdot z_1.$$

Die durch die Funktion $\varphi(z_1)$ vermittelte konforme Abbildung entspricht also einer Drehung der Argumentebene um den Nullpunkt als Mittelpunkt. Folglich müssen die beiden Kreisringe T_1 und T_1' identisch sein.

Weil $\varphi(z_1)$ eine lineare Funktion von z_1 ist, so ist auch $f(z)$ eine lineare Funktion von z, was zu beweisen war.

Zu dem Kreispaare, welches die Begrenzung des Gebietes T bildet, gehört eine bestimmte Schar von Orthogonalkreisen. Wird irgend einer dieser Orthogonalkreise herausgegriffen, so bestimmt derselbe mit den Kreisen des Paares vier Schnittpunkte. Die komplexe Koordinate irgend eines dieser Schnittpunkte werde mit a bezeichnet, mit b die komplexe Koordinate des auf auf demselben Kreise wie a liegenden Schnittpunktes. Die Punkte a und b bilden die Endpunkte eines Stücks des Orthogonalkreises, welches mit dem Gebiete T nur die Punkte a und b gemeinsam hat. Verfolgt man den Orthogonalkreis von a aus in der durch den genannten Kreisbogen bestimmten Richtung über b hinaus, so gelangt man in gewisser Reihenfolge zu den beiden noch übrigen Schnittpunkten des Orthogonalkreises mit dem Kreispaare. Die komplexen Koordinaten dieser Schnittpunkte mögen nach einander mit c und d bezeichnet werden. Das Doppelverhältnis

$$(a, b; c, d) = \frac{c-b}{c-a} : \frac{d-b}{d-a}$$

hat dann einen reellen Wert, welcher weder von der besonderen Wahl des Orthogonalkreises abhängt noch davon, welche der vier Schnittpunktskoordinaten mit a bezeichnet worden ist.

Wird mit $(a', b'; c', d')$ das dem Gebiete T' zugeordnete analog gebildete Doppelverhältnis bezeichnet, so kann das für den Fall $\varrho = 1$ erhaltene Resultat folgendermaßen ausgesprochen werden:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß das Gebiet T konform auf das Gebiet T' abgebildet werden kann, ist:

$$(a, b; c, d) = (a', b'; c', d').$$

Wird speziell jedes der Gebiete T und T' von zwei konzentrischen Kreisen oder jedes der Gebiete T und T' von einer Geraden und einem Kreise begrenzt, so können diese Gebiete stets dann und nur dann konform auf einander abgebildet werden, wenn sie im gewöhnlichen Sinne ähnlich sind.

Ich gehe nun dazu über, den oben ausgesprochenen Satz allgemein darzutun.

Gegeben seien in der z-Ebene zwei $(\varrho + 1)$-fach zusammenhängende schlichtblättrige Bereiche T und T', jeder begrenzt von $\varrho + 1$ Kreisen, von welchen keine zwei einander schneiden oder berühren. Mit $f(z)$ werde wieder eine analytische Funktion bezeichnet, durch deren Vermittelung der Bereich T konform auf den Bereich T' abgebildet wird. Ohne Beschränkung des Grades der Allgemeinheit der zu untersuchenden Frage kann angenommen werden, daß beide Bereiche ganz im Endlichen liegen und daß bei der Abbildung die beiden äußeren Begrenzungskreise K und K' einander entsprechen.

Ich denke mir nun den Bereich T an jedem seiner ϱ inneren Begrenzungskreise gespiegelt. Die so entstandenen ϱ Bildexemplare des Bereiches T, zusammengenommen mit dem Bereiche T, ergänzen sich zu einem Bereiche T_1, welcher nach außen durch den Kreis K, nach innen durch ϱ^2 hinzugekommene Kreise begrenzt wird. In analoger Weise entsteht aus dem Bereiche T' ein Bereich T_1'. Die Funktion $f(z)$, welche der Annahme gemäß eine konforme Abbildung des Bereiches T auf den Bereich T' vermittelt, existiert auf Grund des Spiegelungsprinzips auch im ganzen Innern des Bereiches T_1, welcher vermittelst dieser Funktion konform auf den Bereich T_1' abgebildet wird.

Wird jedes der vorhin erhaltenen ϱ Bildexemplare des Bereiches T an seinen ϱ inneren Begrenzungskreisen gespiegelt, so entstehen ϱ^2 neue Bereiche, die, zum Bereiche T_1 hinzugefügt, einen Bereich T_2 ergeben. Aus dem Bereiche T_2 entsteht in analoger Weise durch Hinzufügung von ϱ^3 Bereichen ein Bereich T_3 u. s. f. in infinitum. Der Bereich T_n wird nach außen durch den Kreis K, nach innen durch ϱ^{n+1} Kreise begrenzt. Mit T_n' möge derjenige Bereich bezeichnet werden, welcher aus T' in derselben Weise entsteht, wie T_n aus T. Es gilt dann für jeden ganzzahligen positiven Wert von n die Bemerkung, daß die ursprünglich nur für den Bereich T definiert gedachte Funktion $f(z)$ für das ganze Innere des Gebietes T_n eindeutig und mit dem Charakter einer ganzen Funktion erklärt werden kann und daß vermittelst dieser Funktion das Gebiet T_n konform auf das Gebiet T_n' abgebildet wird.

Wird mit f_n der gesammte Flächeninhalt desjenigen Gebietes bezeichnet, welches den Bereich T_n zur vollen Fläche des Kreises K ergänzt, so gibt es einen von n unabhängigen positiven echten Bruch q von der Beschaffenheit, daß

$$f_{n+1} < q \cdot f_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

ist.

Zur Begründung der letzteren Behauptung dienen folgende Bemerkungen.

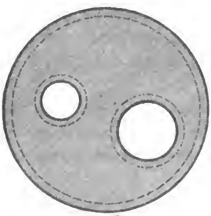
1) Wird ein in der z-Ebene gegebenes ganz im Endlichen liegendes zweifach zusammenhängendes von zwei einander nicht schneidenden und auch nicht berührenden Kreisen begrenztes Gebiet T irgend einer ganzen oder gebrochenen linearen Transformation unterworfen, durch welche das Gebiet T wieder in ein ganz im Endlichen liegendes Gebiet T_* übergeführt wird, so gibt es einen von der besonderen Wahl der Transformation unabhängigen positiven echten Bruch $\mathfrak{q}$ von der Beschaffenheit, daß der Radius des inneren Begrenzungskreises von T_* zum Radius des äußeren Begrenzungskreises von T_* ein Verhältnis hat, welches kleiner als $\mathfrak{q}$ ist. (Beweis mit Hilfe des früher erwähnten invarianten Doppelverhältnisses).

2) In der Ebene sei ein Kreis K mit endlichem Radius R gegeben, außerdem sei ein positiver echter Bruch $\mathfrak{q}$ und eine positive ganze Zahl ϱ gegeben. Im Innern des Kreises K mögen ϱ andere sich gegenseitig ausschließende Kreisflächen betrachtet werden. Die Radien der letzteren ϱ Kreise, $r_1, r_2, \ldots, r_\varrho$, sollen außer der im Vorhergehenden bereits enthaltenen Beschränkung nur noch der Bedingung

$$r_\alpha < \mathfrak{q} \cdot R \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \varrho)$$

unterworfen sein. Dann gibt es einen zweiten positiven echten Bruch q von der Beschaffenheit, daß bei jeder den gestellten Bedingungen genügenden Wahl von ϱ Kreisen der gesammte Flächeninhalt dieser Kreise zu dem Flächeninhalt des gegebenen Kreises ein Verhältnis hat, welches kleiner ist als q. (Die Richtigkeit dieser Behauptung im Falle $\varrho = n$ läßt sich aus der Richtigkeit derselben im Falle $\varrho = 1$ durch das Schlußverfahren der vollständigen Induktion folgern.)

Die Existenz einer positiven Größe $q < 1$ von der Beschaffenheit, daß $f_{n+1} < q \cdot f_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ ist, kann auch unter alleiniger Zuhilfenahme der Bemerkung 1) bewiesen werden, wenn man sich in das Innere des $(\varrho + 1)$-fach zusammenhängenden Bereiches T $\varrho + 1$ den Begrenzungskreisen von T benachbarte Kreise eingezeichnet denkt, wie nebenstehende Figur zeigt, und die bei dem früher beschriebenen Spiegelungsprozesse sich ergebenden Bilder des Bereiches T mit den entsprechenden Kreislinien versehen denkt. Durch die $\varrho + 1$ eingezeichneten Kreise wird das Gebiet T in $\varrho + 1$ zweifach zusammen-


$\varrho = 2$

hängende Ringgebiete und ein $(\varrho + 1)$-fach zusammenhängendes Gebiet zerlegt. Die $\varrho + 1$ eingezeichneten Kreise können so gewählt werden, daß jeder derselben mit dem ihm benachbarten Begrenzungskreise des Gebietes T konzentrisch ist und daß für jedes der $\varrho + 1$ Ringgebiete das Radienverhältnis der Begrenzungskreise einen und denselben Wert $\mathfrak{q} < 1$ besitzt. Die Größe q kann dann gleich $\mathfrak{q}^2$ gewählt werden.

Aus den Ungleichheiten $f_{n+1} < q \cdot f_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$ folgt

$$\lim_{n=\infty} f_n = 0.$$

In derselben Weise ergibt sich für das Gebiet T'_n

$$\lim_{n=\infty} f'_n = 0.$$

Bei dem Prozesse der sukzessiven Spiegelung wird daher nach und nach das ganze Innere des Kreises K bezw. K' ausgefüllt. Ausgeschlossen bleibt nur eine gewisse nicht abzählbare Menge von Punkten, welche keinem der Gebiete T_n bezw. T'_n angehören. Diese Punkte sind in der Betrachtung als singuläre Punkte anzusehen. Jedem innerhalb K liegenden singulären Punkte entspricht eine wohldefinierte unendliche Kette von Spiegelungen des Gebietes T, vermöge deren die sukzessive sich ergebenden Bilder des Gebietes T unter beständiger Verkleinerung ihres äußeren Umfangs sich auf jenen Punkt zusammenziehen. Ordnet man jedem innerhalb K gelegenen singulären Punkte denjenigen singulären Punkt innerhalb K' zu, auf welchen man durch den entsprechenden Spiegelungsprozeß geführt wird, so ist damit auch für die singulären Punkte innerhalb K eine Definition der Funktion $f(z)$ gegeben. Bei dieser Definition sind, wie man leicht erkennt, die Bedingungen der Stetigkeit erfüllt. Die Funktion $f(z)$ vermittelt also eine umkehrbar eindeutige, im allgemeinen konforme, an den singulären Punkten sicher stetige Abbildung der Fläche des Kreises K auf die Fläche des Kreises K'.

Es wird nun darauf ankommen zu zeigen, daß diese Abbildung auch an den singulären Punkten die Eigenschaften einer konformen Abbildung besitzt und daß das Vergrößerungsverhältnis einen von null verschiedenen endlichen Wert hat. Da bereits feststeht, daß vermöge der betrachteten Abbildung jedem inneren Punkte des Kreises K ein und nur ein innerer Punkt des Kreises K' entspricht, so genügt es zu beweisen, daß die Funktion $f(z)$ im ganzen Innern des Kreises K den Charakter einer ganzen Funktion besitzt.

Zur Begründung dieser Tatsache kann der alleinige Hinweis auf die Stetigkeit der Funktion $f(z)$ an den singulären Punkten nicht

dienen, weil im vorliegenden Falle jeder singuläre Punkt zugleich Häufungspunkt singulärer Punkte ist.[1])

Die Funktion $f(z)$ verhält sich jedenfalls im Innern des Gebietes T_n regulär. Es seien $K_1, K_2, \ldots, K_{\varrho^{n+1}}$ die inneren Begrenzungskreise des Gebietes T_n, ferner $K_1', K_2', \ldots, K'_{\varrho^{n+1}}$ die diesen Kreisen vermöge der Abbildung der Reihe nach entsprechenden inneren Begrenzungskreise des Gebietes T_n'. Wird mit z_0 ein beliebiger innerer Punkt des Bereiches T bezeichnet, so ergibt sich bei Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes auf das Gebiet T_n

$$(1) \qquad f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_K \frac{f(z')\,dz'}{z'-z_0} + \frac{1}{2\pi i}\sum_{\mu=1}^{\varrho^{n+1}} \int\limits_{K_\mu} \frac{f(z_\mu)\,dz_\mu}{z_\mu - z_0}.$$

Jedes der $\varrho^{n+1}+1$ Integrale ist über den entsprechenden Begrenzungskreis des Gebietes T_n in demjenigen Sinne zu erstrecken, für welchen während der Integration das Gebiet T_n zur Linken liegt. Die durch die Summe Σ dargestellte Größe ist, wie die Gleichung (1) zeigt, von n unabhängig. Es soll jetzt dargetan werden, daß diese Größe den Wert *null* hat.

Der kürzeste Abstand des Punktes z_0 von der inneren Begrenzung des Gebietes T sei gleich d. Mit a_μ' werde die komplexe Größe bezeichnet, welche dem Mittelpunkte des Kreises K_μ' entspricht, r_μ und r_μ' seien die Radien der Kreise K_μ und K_μ'. Wird dann

$$f(z_\mu) = a_\mu' + \varphi(z_\mu)$$

gesetzt, so is $|\varphi(z_\mu)| = r_\mu'$, falls die Variable z_μ auf die Peripherie des Kreises K_μ beschränkt bleibt, und es ergibt sich

$$\int\limits_{K_\mu} \frac{f(z_\mu)\,dz_\mu}{z_\mu - z_0} = \int\limits_{K_\mu} \frac{(a_\mu' + \varphi(z_\mu))\,dz_\mu}{z_\mu - z_0}.$$

Nun ist

$$\int\limits_{K_\mu} \frac{a_\mu'\,dz_\mu}{z_\mu - z_0} = 0,$$

weil die Funktion $\frac{a_\mu'}{z - z_0}$ eine im ganzen Innern des Kreises K_μ reguläre Funktion von z ist. Also folgt

$$\int\limits_{K_\mu} \frac{f(z_\mu)\,dz_\mu}{z_\mu - z_0} = \int\limits_{K_\mu} \frac{\varphi(z_\mu)\,dz_\mu}{z_\mu - z_0}.$$

1) Eine Ausnahme bildet nur der Fall $\varrho = 1$, in welchem sich nur ein einziger singulärer Punkt innerhalb des Kreises K, desgleichen innerhalb K' ergibt.

Hieraus ergibt sich

$$\left|\int\limits_{K_\mu} \frac{f(z_\mu)\,dz_\mu}{z_\mu - z_0}\right| < \frac{2\pi r_\mu r'_\mu}{d} < \frac{\pi(r_\mu^2 + r'^2_\mu)}{d},$$

mithin

$$\sum_{\mu=1}^{\varrho^{n+1}} \left|\int\limits_{K_\mu} \frac{f(z_\mu)\,dz_\mu}{z_\mu - z_0}\right| < \sum_{\mu=1}^{\varrho^{n+1}} \frac{\pi(r_\mu^2 + r'^2_\mu)}{d},$$

d. h.

$$\left|\sum_{\mu=1}^{\varrho^{n+1}} \int\limits_{K_\mu} \frac{f(z_\mu)\,dz_\mu}{z_\mu - z_0}\right| < \frac{f_n + f'_n}{d}.$$

In dieser Ungleichheit steht auf der linken Seite eine, wie schon bemerkt, von n unabhängige Größe, auf der rechten Seite eine mit unendlich wachsendem n unendlich klein werdende Größe. Aus der genannten Ungleichheit kann daher der Schluß gezogen werden:

(2) $$\sum_{\mu=1}^{\varrho^{n+1}} \int\limits_{K_\mu} \frac{f(z_\mu)\,dz_\mu}{z_\mu - z_0} = 0.$$

Gleichung (1) geht jetzt über in

(3) $$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K} \frac{f(z')\,dz'}{z' - z_0}.$$

Dieser Ausdruck für $f(z_0)$ lehrt, daß die Funktion $f(z)$ im ganzen Innern des Kreises K, auch an den vorhin als singulär bezeichneten Punkten den Charakter einer ganzen Funktion besitzt. Die Funktion $f(z)$ besitzt daher in der Tat alle Eigenschaften einer Funktion, durch welche das ganze Innere des Kreises K *konform* auf das ganze Innere des Kreises K' abgebildet wird. Die Funktion $f(z)$ kann folglich nur eine ganze oder gebrochene lineare Funktion von z sein, was zu beweisen war.

Ein von $\varrho + 1$ Kreisen begrenzter Bereich von der betrachteten Art kann, wenn $\varrho = 0$ oder 1 ist, stets auf unendlich mannigfaltige Weise auf sich selbst konform abgebildet werden. Ist hingegen $\varrho \geqq 2$, so ergibt sich aus dem soeben bewiesenen Satze:

1) *Die identische Abbildung ist die einzige konforme Abbildung eines solchen Bereiches auf sich selbst, welche der Bedingung genügt, jeden Begrenzungskreis einzeln in sich überzuführen.*

2) *Ein solcher Bereich läßt im allgemeinen außer der identischen Abbildung überhaupt keine konforme Abbildung auf sich selbst zu; in jedem Falle läßt er nur eine endliche Anzahl konformer Abbildungen auf sich selbst zu.*

Daraus folgt:

3) *Werden zwei solche Bereiche als nicht wesentlich verschieden betrachtet, wenn sie konform auf einander abgebildet werden können, so hängt der allgemeinste derartige Bereich noch von $3\varrho - 3$ wesentlichen reellen Konstanten ab.*

Nach einem Ergebnisse der oben erwähnten Schottkyschen Arbeit hängt der allgemeinste schlichtblättrige ebene Bereich mit $\varrho + 1$ Begrenzungslinien ($\varrho \geqq 2$) ebenfalls von $3\varrho - 3$ wesentlichen reellen Konstanten ab. Die Aufgabe, einen beliebig gegebenen schlichtblättrigen ebenen Bereich auf einen von $\varrho + 1$ Kreisen begrenzten schlichtblättrigen ebenen Bereich konform abzubilden, wurde von Herrn Schottky (l. c.) als ein Problem der Theorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit algebraischen Koeffizienten formuliert. Aus dem oben bewiesenen Satze geht hervor, daß es in keinem Falle mehr als *einen* den Bedingungen der Aufgabe genügenden kreisförmig begrenzten Bereich geben kann, wenn zwei durch eine ganze oder gebrochene lineare Transformation in einander übergehende Bereiche nicht als verschieden betrachtet werden. Für den Nachweis, daß es in jedem Falle einen den Bedingungen der Aufgabe genügenden kreisförmig begrenzten Bereich gibt, kommen außer der Arbeit des Herrn Schottky namentlich die von Herrn Poincaré in den ersten Bänden der *Acta mathematica* veröffentlichten Arbeiten in Betracht.[1])

Die Beschränkung der Betrachtung auf schlichtblättrige Bereiche stellt für das Abbildungsproblem keine wesentliche Beschränkung dar, sofern nur vorausgesetzt wird, daß die Anzahl der Begrenzungslinien der zu betrachtenden Bereiche endlich und gleich der Ordnungszahl ihres Zusammenhanges ist.

Es gilt folgender Satz:

Wenn F ein endlich-vielblättriges Riemannsches Flächenstück ist, welches in seinem Innern nur eine endliche Anzahl von Windungspunkten enthält und für welches die Ordnungszahl des Zusammenhanges gleich der

---

1) Im Falle $\varrho = 1$ bietet die Abbildungsaufgabe erhebliche Schwierigkeiten nicht dar. Eine Lösung der Aufgabe ist zu finden bei Schottky (l. c.). Man kann auch einen Weg einschlagen, welcher dem von Riemann (Dissertation Art. 21) und Schwarz (Ges. Abh. Bd. II, pag. 164—166) im Falle $\varrho = 0$ eingeschlagenen entspricht.

Anzahl $\varrho + 1$ der Begrenzungslinien ist, so ist es möglich, den Bereich F konform auf einen schlichtblättrigen ebenen Bereich abzubilden.

Für den Beweis dieses Satzes genügt es, Annahmen von sehr allgemeiner Art über die Natur der Begrenzungslinien zu machen; insbesondere ist es nicht erforderlich die Begrenzungslinien als analytisch vorauszusetzen.

Den Bereich F denke man sich zunächst über jede seiner $\varrho + 1$ Begrenzungslinien hinaus ein Stück fortgesetzt, indem an jeder dieser Begrenzungslinien ein zweifach zusammenhängender Flächenstreifen angesetzt wird. Diese Operation bietet auch an den möglicherweise vorhandenen Eckpunkten der Begrenzung keine Schwierigkeit dar, selbst wenn der an einer Ecke gebildete Winkel größer als 2π ist. Im letzteren Falle geht durch die angegebene Operation der Eckpunkt in einen inneren Windungspunkt über. Der Bereich F erscheint jetzt als Teilbereich eines anderen Bereiches F_1, seine Begrenzung hat mit der Begrenzung des Bereiches F_1 keinen Punkt gemeinsam. Die Begrenzung des Bereiches F_1 kann so gewählt werden, daß sie aus einer endlichen Anzahl geradliniger Strecken gebildet wird. Die Anzahl der Begrenzungslinien des Bereiches F_1 stimmt mit der Anzahl der Begrenzungslinien des Bereiches F überein, und es ist, wie beim Bereiche F, die Ordnungszahl des Zusammenhanges des Bereiches F_1 gleich der Anzahl seiner Begrenzungslinien.

Nunmehr denke man sich jeder Begrenzungslinie des Bereiches F_1 einen willkürlichen Punkt des Raumes zugeordnet und von jedem Punkte der Begrenzung von F_1 nach dem zugeordneten Raumpunkte die geradlinige Verbindungsstrecke konstruiert. Auf diese Weise entstehen, den $\varrho + 1$ Begrenzungslinien von F_1 entsprechend, $\varrho + 1$ einfach zusammenhängende Flächenstücke. Diese $\varrho + 1$ einfach zusammenhängenden Flächenstücke denke man sich zum Bereiche F_1 hinzugefügt, wodurch man eine geschlossene Fläche F_2 erhält. Trifft man die Festsetzung, daß die möglicherweise vorhandenen Durchschnittslinien zwischen den $\varrho + 1$ einfach zusammenhängenden Flächenstücken nicht als Übergangslinien zwischen diesen Flächenstücken betrachtet werden sollen, so verhält sich die geschlossene Fläche F_2 hinsichtlich ihres Zusammenhanges wie die schlichte Oberfläche einer Kugel. Die den Begrenzungslinien von F_1 zugeordneten Raumpunkte hätten auch in der Ebene der Fläche F_1 gewählt werden können.

Weil die Begrenzung des Bereiches F_1 aus einer endlichen Anzahl geradliniger Strecken gebildet wird, so kann von der geschlossenen einfach zusammenhängenden Fläche F_2 folgendes behauptet werden: Ist P irgend ein Punkt der Fläche F_2, so gibt es auf der Fläche F_2

eine den Punkt P in seinem Innern enthaltende Umgebung von P, welche konform auf die Fläche eines Kreises abgebildet werden kann. Es sind daher für die Fläche F_2 die Bedingungen erfüllt, unter welchen von Herrn Schwarz die Möglichkeit der konformen Abbildung einer solchen Fläche auf die schlichte Oberfläche einer Kugel bewiesen worden ist. (Gesammelte mathematische Abhandlungen Bd. II, Seite 167—170).

Bei der konformen Abbildung der Fläche F_2 auf eine schlichte Ebene geht der ursprünglich gegebene Bereich F in einen Teilbereich G dieser Ebene über, womit die oben ausgesprochene Behauptung bewiesen ist.

Besteht die Begrenzung des Bereiches F speziell aus einer endlichen Anzahl von Stücken analytischer Linien, die, soweit sie in Betracht kommen, überall den Charakter algebraischer Kurven besitzen, so gilt dasselbe von der Begrenzung des Bereiches G.

Wird die Bedingung fallen gelassen, daß die Anzahl der Begrenzungslinien des Bereiches F gleich der Ordnungszahl seines Zusammenhanges sein soll, so ist es offenbar nicht möglich, einen schlichtblättrigen ebenen Bereich anzugeben, auf welchen der Bereich F zusammenhängend und in den kleinsten Teilen ähnlich abgebildet werden kann. Für ein solches Flächenstück F ist, sofern dasselbe überhaupt Begrenzungslinien besitzt, die Ordnungszahl des Zusammenhanges nach einem Satze der Analysis situs um eine gerade Zahl $2p$ größer als die Anzahl der Begrenzungslinien, und es lassen sich folgende Sätze dartun.

Ist $p = 1$, so gibt es eine geschlossene, zweiblättrige Riemannsche Fläche von der Beschaffenheit, daß F auf einen Teilbereich dieser Fläche konform abgebildet werden kann.

Ist $p \geq 2$, so gibt es eine geschlossene höchstens p-blättrige Riemannsche Fläche von der Beschaffenheit, daß F konform auf einen Teilbereich derselben abgebildet werden kann.

Es gibt stets eine $(p+1)$-blättrige geschlossene Riemannsche Fläche von der Beschaffenheit, daß F konform auf einen ganz im Endlichen liegenden Teilbereich derselben abgebildet werden kann.

Zum Beweise der vorstehenden Sätze hat man zunächst, wie früher, den Übergang von der ungeschlossenen Fläche F zu einer geschlossenen Fläche F_2 zu machen. Dieser Fläche wird unter Zuhilfenahme des *alternierenden Verfahrens* eine algebraische Gleichung $G(z, s) = 0$ vom Range $\varrho = p$ zugeordnet. Damit hängt eine konforme Abbildung der Fläche F_2 auf die zu der Funktion $s(z)$ gehörende Riemannsche Fläche R vom Geschlecht p unmittelbar zusammen.

Bei dieser Abbildung entspricht dem gegebenen Flächenstück F ein Teilbereich F_R von R. Um schließlich eine den Angaben entsprechende Blätterzahl zu erhalten, hat man von der Gleichung $G(z, s) = 0$ durch birationale Transformation zu einer Gleichung $G(z_1, s_1) = 0$ überzugehen, die in bezug auf s_1 einen der gewünschten Blätterzahl entsprechenden Grad besitzt. Dieser Übergang wird am einfachsten bewerkstelligt, indem $s_1 = z$ und z_1 gleich einer rationalen Funktion von z und s gesetzt wird, welche innerhalb R ebensoviel Unendlichkeitsstellen erster Ordnung besitzt, als die gewünschte Blätterzahl Einheiten enthält. Für den Beweis des letzten von den drei angeführten Sätzen müssen die Unendlichkeitsstellen der Funktion z_1 so gewählt werden, daß keine derselben im Innern oder auf der Begrenzung von F_R liegt.

Mitteilungen und Nachrichten.

Geeignete Mitteilungen wird der Herausgeber stets mit größtem Danke entgegennehmen.

1. Akademien. Gesellschaften. Vereinigungen. Versammlungen.

Deutsche Mathematiker-Vereinigung. Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung ist am 29. Dezember 1905 in das Vereinsregister des k. Amtsgerichtes Leipzig eingetragen worden.

Veränderungen im Personalbestande der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Dezember 1905. Januar 1906.

Neu aufgenommen als Mitglieder:

Herr Oberlehrer L. Lewent, Berlin W, Motzstr. 87.
Herr Dr. Kiseljak, Fiume (Ungarn), Corso 2.
Herr Dr. E. Jacobsthal, Berlin, Alte Jacobstr. 138.
Kgl. Rektorat der Kreis-Realschule I, Nürnberg.
Bibliothek der Technischen Hochschule, Aachen.

Berliner Mathematische Gesellschaft. *Sitzung am Mittwoch den 31. Januar 1906:* Koppe, Über die iterierte Sinusfunktion. Skutsch, Vorführung eines Apparats zur Demonstration des astatischen Gleichgewichts ebener Kräftesysteme.

Mathematische Gesellschaft in Göttingen. *VI. Sitzung vom 5. Dez. 1905.* H. Müller referiert über die von H. Poincaré zum Existenzbeweise von Potentialfunktionen mit vorgeschriebenem Randwerte verwandte „Méthode de balayage", F. Graf über die von C. Neumann zu gleichem Zwecke verwandte „Methode des arithmetischen Mittels". F. Klein bemerkt, daß bei letzterer die Verwendung der Doppelbelegungen darauf hinauslaufe, statt der Greenschen Funktion des Gebietes die Greensche Funktion der jeweiligen Tangentialebene zu nehmen, und schlägt zur Erhöhung der Konvergenz die Verwendung der Greenschen Funktion der

jeweiligen, das Gebiet ganz umhüllenden Tangentialkugel vor. — *VII. Sitzung vom 12. Dez. 1905.* E. Zermelo referiert über H. Poincarés Untersuchungen über die Randwertaufgabe der Gleichung $\Delta u + \lambda u = 0$, insbesondere den Existenzbeweis für jene „ausgezeichneten" Parameterwerte λ, bei denen die Aufgabe für die Randwerte 0 durch nicht identisch verschwindendes u zu lösen ist. Er zeigt hierbei, wie nach gleichen Prinzipien die Existenz unendlich vieler „ausgezeichneter" λ-Werte erschlossen werden kann, auf welchen Beweis H. Poincaré selbst nicht eingegangen zu sein scheint. — *VIII. Sitzung vom 19. Dez. 1905.* E. Schmidt referiert über H. Poincarés Untersuchungen über die asymptotische Darstellung der Lösungen linearer Differentialgleichungen beim Einrücken in eine Unbestimmtheits-Stelle und zeigt, welche Vereinfachung nach E. Picard die Benutzung des A. Liapounoffschen Satzes über das Wachstum der Lösungen linearer Differentialgleichungssysteme mit sich bringt. G. Herglotz referiert über den von G. W. Hill zur Lösung linearer Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten gemachten Gebrauch der unendlichen Determinanten und ihrer insbesondere von H. v. Koch hervorgehobenen Anwendung zur Entwicklung der Lösungen linearer Differentialgleichungen mit eindeutigen Koeffizienten in einem Kreisring, durch welche gleichzeitig eine brauchbare Bestimmungsweise der Monodromiegruppe gegeben ist. — *IX. Sitzung vom 9. Januar 1906.* C. Carathéodory referiert über die von J. Fredholm allgemein angegebene Lösung der linearen Integralgleichung

$$\varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt = f(s),$$ wo aus gegebenem $K(s, t)$ und $f(s)$

die Funktion $\varphi(s)$ zu bestimmen ist. Der Vortragende zeigt, wie die Randwertaufgaben der Gleichungen $\Delta u = 0$, und $\Delta u + \lambda u = 0$ unmittelbar auf derartige Integralgleichungen führen (bei $\Delta u = 0$ direkt die Ausgangsgleichung der Methode des arithmetischen Mittels) und setzt schließlich die allgemeinen Resultate auseinander, die D. Hilbert insbesondere für symmetrische Kerne $K : K(s, t) = K(t, s)$ bezüglich der „Eigenwerte" $\lambda = \lambda_\nu$, bei denen die Integralgleichung für $f(s) = 0$ durch $\varphi(s) = \varphi_\nu(s) \neq 0$ lösbar ist und der Entwickelbarkeit beliebiger Funktionen nach diesen $\varphi_\nu(s)$ erlangt hat. — *X. Sitzung vom 9. Jan. 1906.* F. Klein berichtet über die von K. Weierstraß erlangten, und auf der von ihm hierzu eingeführten Theorie der Elementarteiler fußenden Resultate über Transformierbarkeit zweier linearer Scharen bilinearer Formen ineinander, insbesondere die sich hierbei ergebenden Sätze über Elementarteiler. Der Vortragende geht hierbei von dem Gedanken aus, es möchten, gemäß der von Fredholm und D. Hilbert benutzten Auffassung der linearen Integralgleichung als Grenzfall eines Systems linearer Gleichungen und des hieraus für symmetrische Kerne sich ergebenden Zusammenhangs mit der Transformation quadratischer Formen, sich auch hier noch eine Reihe weiterer analoger Theoreme aufstellen lassen. — *XI. Sitzung vom 23. Jan. 1906.* D. Hilbert berichtet über zwei in letzter Zeit von ihm gemachte funktionentheoretische Anwendungen der Integralgleichungen. Die erste betrifft die Herstellung zweier regulärer analytischer Funktionen, einer im Innenraum und einer im Außenraum einer gegebenen geschlossenen Kurve, so daß sich ihre Randwerte auf dieser um einen gegebenen (komplexen) vom Ort auf der Kurve abhängigen

Faktor unterscheiden. Die Verallgemeinerung dieser Aufgabe auf Funktionenpaare, deren Randwerte durch lineare Substitution zusammenhängen, führt zur Herstellung von Funktionsscharen mit gegebener Monodromiegruppe. (Gött. Nachr. 1905). Die zweite Anwendung betrifft die Herstellung jener linearen Differentialgleichung II. Ord. mit vorgeschriebenen reellen singulären Stellen, deren Integralquotient die obere Halbebene auf ein Kreisbogenviereck mit Orthogonalkreis und lauter Winkeln Null abbildet. Es erweist sich hierzu als notwendig und hinreichend, daß das an der ersten singulären Stelle endliche Integral, längs der reellen Achse in bestimmter Weise über die zweite singuläre Stelle fortgesetzt, in der dritten endlich bleibt. Dies bestimmt direkt nach den früher vom Vortragenden angegebenen Methoden der Integralgleichungen, den akzessorischen Parameter der Differentialgleichung als Eigenwert einer zugehörigen Integralgleichung. — *XII. Sitzung vom 30. Jan. 1906.* F. Klein zeigt in Beantwortung der gelegentlich der letzten Sitzung entstandenen Frage, ob stets ein überall endliches Funktionssystem zu finden sei, das entweder die vorgegebene Monodromiegruppe oder die zu ihr konjugiert komplexe besitzt, daß dies im Falle dreier singulärer Punkte sicher nicht stets möglich sei. Ferner gibt F. Klein eine einfache geometrische Herleitung der in der letzten Sitzung von D. Hilbert angegebenen Bedingung für die Existenz eines Orthogonalkreises (siehe das Nähere oben), er setzt ferner auseinander, wie die von D. Hilbert bei jener Aufgabe gefundenen weiteren Eigenwerte des akzessorischen Parameters zu Hauptkreisvierecken mit Seitenüberschlagungen gehören, und bespricht die von ihm seinerzeit ohne Beweis aufgestellten Theoreme über Bestimmbarkeit der akzessorischen Parameter, wenn für das Kreisbogenpolygon die Existenz eines Orthogonalkreises und eine gegebene (topologisch mögliche) Zahl von Seitenüberschlagungen gefordert wird. — *XIII. Sitzung vom 6. Febr. 1906.* M. Abraham referiert über die von H. Poincaré veröffentlichten Vorlesungen über die verschiedenen Teile der mathematischen Physik. Der Vortragende zeigt an Beispielen, wie in ihnen die Aufmerksamkeit insbesondere auf den physikalischen Inhalt der Probleme gerichtet wird, und hebt das Verdienst, das Poincaré um die Einführung der Maxwellschen Theorie in Frankreich hat, hervor. Es referierte ferner U. Broggi über Poincarés „Calcul des probabilités" (1896) und H. Minkowski über Poincarés „Capillarité" (1895).

Mathematische Gesellschaft in Wien. *Generalversammlung am 27. Oktober 1905:* Rechenschaftsbericht über das abgelaufene Vereinsjahr. Wahlen. H. Hahn: Die neueren Untersuchungen über reelle Funktionen. — *Versammlung am 10. November 1905:* Rothe: Minkowskis Untersuchungen über Volumen und Oberfläche konvexer Körper. — *Versammlung am 24. November 1905:* P. Ehrenfest: Referat über W. Gibbs, Statistische Mechanik. — *Versammlung am 15. Dezember 1905:* A. Adler: Zur Konstruktion des regelmäßigen Siebzehnecks. — *Versammlung am 12. Jänner 1906:* H. Tietze: Über die Grundlagen der Logik und der Mathematik. — *Versammlung am 9. Februar 1906:* J. Plemely: Über Hilberts Behandlung eines Riemannschen Problems.

The American Mathematical Society. Die 12. Jahresversammlung der genannten Gesellschaft fand am 28.—29. Dezember 1905 in New York

City statt. Da gleichzeitig Versammlungen der American Physical Society und der Astronomical und Astrophysical Societies of America stattfanden, war das Interesse an der diesjährigen Versammlung ein besonders lebhaftes. Eine gemeinsame Sitzung fand zu Ehren des Professor Bjerknes aus Stockholm statt (vgl. Jahresbericht XV, S. 591). — Aus dem Geschäftsbericht geht hervor, daß die Bibliothek zur Zeit 2000 Bände umfaßt. Die Zahl der Mitglieder ist im abgelaufenen Jahre von 473 auf 512 angewachsen. Für das neue Jahr setzt sich der Vorstand folgendermaßen zusammen: Osgood, Vorsitzender; Charlotte Angas Scott und I. Stringham, stellvertretende Vorsitzende; F. N. Cole, Schriftführer; Dennet, Schatzmeister, D. E. Smith, Bücherwart; dazu kommen noch einige Beisitzer. — Folgende wissenschaftliche Mitteilungen wurden der Versammlung vorgelegt: Richardson, Multiple improper integrals. Frizell, On the continuum problem. Curtiss, The vanishing of the Wronskian and the problem of linear dependence. Hutchinson, Note on the fundamental propositions of algebra. Keyser, Concerning a self-reciprocal plane geometry. Moore, Geometry of circles orthogonal to a given sphere. Kasner, Invariants of differential elements for arbitrary point transformation. Frizell, A method of building up the fundamental operation groups of arithmetic. Bliss, A proof of the fundamental theorem of analysis situs. Akers, On the congruence of axes in a bundle of linear line complexes. Field, Note on certain groups of transformations of the plane into itself. Peirce, A new approximate construction for π. Mason, Curves of minimum moment of inertia. Webster, Application of a definite integral involving Bessel's functions to the self-inductance of solenoids. Wright, Correspondences and the theory of continous groups. Wright, An application of the differential invariants of space. Clara E. Smith, Abel's theorem and its application to the development of an arbitrary function in terms of Bessel's functions. Bjerknes, Experimental demonstration of hydrodynamic action at a distance. P. Stephens, On the pentadeltoid. Pupin, Establishment of the steady state in a sectional wave conductor. Quinn, A linkage for the kinematic description of a cissoid.

Mathematical Section of the California Teachers Association. Die Section hielt am 26. und 28. Dezember 1905 zwei Sitzungen in Berkeley ab. Es wurde beschlossen, die Zeitschrift School Science and Mathematics als offizielles Vereinsorgan zu wählen. Zum Vorsitzenden wurde Prof. G. A. Miller, zu seinem Stellvertreter Prof. W. H. Baker und zum Schriftführer Prof. J. F. Smith gewählt. Wissenschaftliche Vorträge hielten: Stringham, How to cultivate the power to think mathematically? und Clarke, Vital questions for teachers of secondary mathematics.

Indiana Association of mathematics teachers. Es besteht der Plan, eine Vereinigung aller Lehrer der Mathematik des Staates Indiana zu bilden. Mit der Vorbereitung wurde ein Komitee beauftragt, dessen Vorsitz in den Händen von Prof. Rothrock von der Indiana Universität liegt. Die Organisation der Vereinigung soll in einer Versammlung zu Indianopolis am 30. März d. J. stattfinden.

Association of Ohio Teachers of Mathematics and Science. Die dritte Jahresversammlung fand am 28. Dezember 1905 in der Ohio State

University statt. In der mathematischen Sektion wurden folgende Vorträge gehalten: Hornung, Do the mathematical courses in literary colleges properly fit for the mathematics of engineering? Miß Palmié, Recent contributions marking a real advance in the theory of mathematics teaching; Arnold, Sir Isaac Newton, an estimate; Halsted, A contribution from noneuclidian geometry to school spherics; Miß Glazier, Symbolism in mathematics; Heilman, The character of mathematics teaching in the high school; Giles, The influence of college entrance certificates on the teaching of mathematics in the high schools; Halsted, Report of comitee on syllabus.

American Association for the Advancement of Science. Die nächste Versammlung der Association wird in der mit dem 27. Dezember 1906 beginnenden Woche in New York City stattfinden.

Association Française pour l'avancement des sciences. Die diesjährige Versammlung wird vom 2.—7. August unter dem Vorsitz von Prof. Lippmann in Lyon abgehalten werden.

Circolo Matematico di Palermo. Für das Triennium 1906-1907-1908 besteht der Vorstand aus den Herren: Albeggiani, Gebbia, Guccia Ovazza, Torelli (G.), sämtlich in Palermo, sowie den Herren: Bianchi, (Pisa), Capelli (Neapel), Cerruti (Rom), Del Pezzo (Neapel), Del Re (Neapel), Dini (Pisa), d'Ovidio (Turin), Loria (Genua), Mittag-Leffler (Stockholm), Pascal (Mailand), Peano (Turin), Pincherle (Bologna), Poincaré (Paris), Tonelli (Rom), Volterra (Rom).

2. Preisaufgaben und gekrönte Preisschriften.

Preisaufgabe der Philosophischen Fakultät der Universität Halle. Bekanntlich hängt die Bestimmung der Flächen konstanter mittlerer Krümmung von derselben Differentialgleichung ab, wie die Bestimmung der Flächen mit konstantem negativem Krümmungsmaß. Von letzteren Flächen kennt man verschiedene und damit auch eine Anzahl von Lösungen jener partiellen Differentialgleichung. Es sollen die zu diesen Lösungen gehörigen Flächen konstanter mittlerer Krümmung abgeleitet werden.

Der Preis beträgt 150 Mk. Die Bewerbungsschriften sind bis einschließlich den 27. Oktober 1906 bei dem Universitäts-Sekretariat einzureichen. In üblicher Weise ist ein Motto anzugeben und in einem mit gleichem Motto versehenen Briefumschlag ist der Name, die Heimat und das Studium des Verfassers zu bezeichnen. Die Preisverkündigung erfolgt am 27. Januar 1907.

Preisaufgabe der Philosophischen Fakultät (II. Sektion) der Universität Zürich für 1906. Es soll die Bewegung eines schweren Punktes auf einer Kugelfläche (eines sphärischen Pendels) mit Hilfe von mindestens zweien der neueren Methoden der astronomischen Mechanik untersucht und die Resultate dieser Untersuchung sollen analytisch und numerisch mit denjenigen verglichen werden, die sich bei der Behandlung des Problems mit Hilfe elliptischer Funktionen ergeben. — Die Preisaufgaben sind bis zum 31. Dezember 1906 an das Rektorat anonym einzureichen.

Sie sind mit einem Motto zu versehen; gleichzeitig soll ein versiegeltes Kuvert, welches den Namen des Verfassers enthält, eingereicht werden, überschrieben mit dem gleichen Motto.

---

3. Hochschulnachrichten.

Universität Innsbruck. Mit der Vertretung des verstorbenen Prof. O. Stolz ist für das gegenwärtige Semester Herr Dr. H. Hahn von der technischen Hochschule in Wien beauftragt worden.

Verzeichnis der für das Sommersemester 1906 angekündigten Vorlesungen über die mathematischen Wissenschaften.

Darmstadt. Dingeldey, Elemente d. höh. Algebra; Höh. Mathematik I. — Denner, Geodäsie; Ausgleichungs-Rechnung nach d. Meth. d. kleinsten Quadrate; Geodät. Übungen. — Graefe, Repetit. d. Elem.-Math.; Höhere Math.; Höh. Math. II. — Gundelfinger, Höh. Math. I. — Henneberg, Techn. Mech.; Mech. I; Reine Kinematik. — Pfarr, Hydraulik. — Scheffers, Einleit. in d. Funktionentheorie; Darst. Geom. I. — Wiener, Darst. Geom. I; Geometr. Form. u. Form. d. Kunst; Arbeiten im math. Institut. — Gast, Astronom. Orts- u. Zeitbestimm.; Üb. im Zahlenrechnen. — Meisel, Grundzüge d. Karten-Projektionslehre; Populäre Astronomie. — Schlink, Repet. d. Mech.; Ausgew. Kap. d. Statik

Freiburg. Lüroth, Integralrechnung (5); Trigonometrie (2); Seminar. — Stickelberger, Analytische Mechanik (5); Fouriersche Reihen und Integrale (2); Seminar. — Loewy, Theorie und Anwendung der Determinanten (4); Über die Grundlagen der Geometrie (2); Übungen zur Versicherungsmathematik. — Weingarten, Ausgewählte Kapitel aus der Theorie elastischer Körper (2). — Seith, Darstellende Geometrie (2); Übungen dazu. — Königsberger, Theorie der Elektrizität und des Magnetismus mit Übungen (3); Übungen aus der theoretischen Physik (1).

Greifswald. Thomé, Theorie der analytischen, besonders der elliptischen Funktionen I (4); Differentialgeometrie (2); Seminar. — Engel, Analytische Mechanik I (4); Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes (4); Differentialinvarianten (1); Seminar. — Vahlen, Integralrechnung (4); Übungen dazu (1); Determinanten (1). — Starke, Mathematische Ergänzungen und Übungen zur Experimentalphysik (1). — Mie, Elastizitätslehre und Hydrodynamik (4); Seminar. — Mie und Starke, Besprechung neuerer physikalischer Arbeiten. — Holtz, Galvanische, Thermo- und Induktionselektrizität (2); Meteorologie mit Einschluß der optischen Erscheinungen (1); Physik der Erde (1). — Schreiber, Übungen im Demonstrieren physikalischer Apparate. — Berg, Theoretisch-physikalische Übungen; Geschichte der Physik im Zeitalter Newtons.

Halle. Cantor, Zahlentheorie (4); Seminar. — Wangerin, Differentialgeometrie (5); Bestimmte Integrale und Differentialgleichungen (4); Ausgew. Kapitel der Potentialtheorie (1); Seminar. — Gutzmer, Differentialrechnung mit Übungen (5); Funktionentheorie (4); Ausgew. Kapitel der anal. Mechanik (1); Seminar. — Eberhard, Algebra I (4); Analytische Geometrie der Kegelschnitte (2); Übungen dazu (1). — Bernstein, Geschichtliche Übersicht über die Hauptgebiete der reinen Mathematik (2); Versicherungsmathematik (2). — Buchholz, Ausgew. Kapitel der theoretischen Astronomie und Physik (2); Praktische Übungen in geographischer Ortsbestimmung (3). — Walter, Niedere Geodäsie mit Übungen auf dem Gelände (3). — Dorn, Elektromagnetische Lichttheorie (2). — Schmidt, Einleitung in die theoretische Physik (3); Übungen dazu (1). — Berndt, Einführung in die Theorie der Elektrizität und des Magnetismus (2).

Königsberg. Meyer, Analytische Geometrie der Ebene (3); Einleitung in die höhere Geometrie (4); Seminar. — Schoenflies, Funktionentheorie (5); Seminar. — Saalschütz, Determinanten (2); Differentialrechnung (4); Übungen dazu. — Battermann, Astronomisch-geographische Ortsbestimmung (3); Übungen dazu. — Cohn, Bestimmung der Bahnen der Himmelskörper (3); Einführung in die neueren Theorien der Himmelsmechanik (2). — Volkmann, Elastizitätstheorie (4); Seminar.

Leipzig. Neumann, Anwendungen der Differential- und Integralrechnung (4); Seminar. — Mayer, Höhere analytische Dynamik (5); Übungen dazu. — Hölder, Anwendungen der elliptischen Funktionen (3); Ausgew. Kapitel aus der Theorie der elliptischen Modulfunktionen (2); Seminar. — Rohn, Höhere Kurven, insbes. der 3. u. 4. Ordnung (4); Übungen dazu (1); Determinanten (2); Seminar. — Hausdorff, Gewöhnliche Differentialgleichungen (4); Übungen dazu (1). — Liebmann, Analytische Geometrie der Ebene (4); Übungen dazu (1); Einführung in die algebraische Analysis (2). — Bruns, Himmlische Mechanik (2); Seminar für wissenschaftliches Rechnen (2); Praktische Übungen auf der Sternwarte (mit Peter). — Peter, Bahnverbesserung und spezielle Störungen (2); Übungen auf der Sternwarte (mit Bruns). — Wiener, Physikalisches Kolloquium (mit Des Coudres). — Des Coudres, Thermodynamik (5); Kolloquium. — Marx, Radioaktivität (1); Elektrische Wellen (1). — Dahms, Farbenphotographie (1). — Scholl, Polarisiertes Licht. (1); Repetitorium der Physik (1).

Rostock. Staude, Analytische Geometrie des Raumes (4); Analytische Mechanik (4); Seminar (2). — Dieterici, Mechanische Wärmetheorie (3); Seminar (2); Praktikum (8).

Würzburg. Prym, Integralrechnung (6); Proseminar; Seminar. — Selling, Analytische Mechanik (4); Sphärische Astronomie (2). — Rost, Analyt. und synthet. Geometrie der Kegelschnitte (4); Anwendungen der Infinitesimalanalysis auf die Theorie der ebenen Kurven (3); Theorie der Raumkurven und der Flächen (4); Nichteuklidische Geometrie (2); Proseminar; Seminar. — Cantor, Kinetische Theorie und Bewegung der Gase (4). — Seitz, Elektrizitätsleitung in Gasen und verwandte Erscheinungen (2).

Zürich. Burkhardt, Algebraische Analysis (4); Mathematische Theorie dissipativer Erscheinungen (4); Seminar (2). — Weiler, Anal. Geometrie II (4); Darst. Geometrie II (4); Synthet. Geometrie (2). — Gabler, Die Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung (2); Polit. Arithmetik (2); Inhalt und Methode des geometrischen Unterrichts in der Mittelschule (1). — Wolfer, Geograph. Ortsbestimmung (3); Übungen im astron. Beobachten; Einleitung in die Astrophysik (2).

4. Personalnachrichten.

Professor Dr. Boehm von der Universität Heidelberg ist für das gegenwärtige Winterhalbjahr beurlaubt.

Dr. Boulanger wurde zum Professor der Mechanik an der Faculté des sciences der Universität Lille ernannt.

Professor Dr. P. Drude, Direktor des Physikalischen Instituts in Berlin, wurde von der Königl. Preuß. Akademie der Wissenschaften zum ordentlichen Mitgliede ernannt.

Sir David Gill, Direktor der Sternwarte am Kap der Guten Hoffnung, beabsichtigt von seiner Stellung zurückzutreten.

Professor Dr. D. Hilbert in Göttingen ist von der Kaiserl. Leopoldinisch-Carolinischen Akademie in Halle die goldene Cothenius-Medaille verliehen worden.

Dr. R. Morris wurde zum ao. Professor der Graphik und der angewandten Mathematik am Rutgers College ernannt.

Professor Dr. Simon Newcomb erhielt den Orden Pour le Mérite.

Dr. Tamura, ein geborener Japaner, ist zum Mathematiker in der Abteilung für Erdmagnetismus des Carnegie-Instituts ernannt worden.

Gestorben:

Professor Dr. v. Borries von der Technischen Hochschule zu Charlottenburg, Mitglied der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte, Kurator des Vereins Deutscher Ingenieure, ist am 14. Februar d. J. einem Lungenschlage in Meran erlegen.

5. Vermischtes.

Gedächtnistafel für Salmon. Am 5. Januar d. J. ist in der Nationalkirche St. Patrick zu Dublin unter besonderer Feierlichkeit eine Gedächtnistafel für Dr. George Salmon enthüllt worden. Diese besteht aus einem Medaillonbild Salmons mit einer lateinischen Inschrift, in der auf seine Wirksamkeit als Mathematiker und als Theologe hingewiesen wird.

University of Manitoba, Winnipeg. Die Universität von Manitoba hat durch eine Feuersbrunst ihre Bibliothek eingebüßt, und sie wendet sich daher an die weitesten Kreise mit der Bitte, ihr durch Zusendung von Büchern und Werken zur Schaffung einer neuen Bibliothek behilflich zu sein. Besonders stark wird der Verlust der Bibliothek auf dem Gebiet der Mathematik und der exakten Wissenschaften überhaupt empfunden. Alle Zuwendungen sind an Prof. R. R. Cochrane, University of Manitoba, Winnipeg, Man., zu richten.

Literarisches.

1. Notizen und Besprechungen.

G. Lejeune-Dirichlets Vorlesungen über die Lehre von den einfachen und mehrfachen bestimmten Integralen. Herausgegeben von G. Arendt. Braunschweig, Vieweg & Sohn, 1904. XXIII u. 476 S.

Der Herausgeber hat im Sommer 1854 bei Dirichlet eine vierstündige Vorlesung über bestimmte Integrale gehört und gleichzeitig ein einstündiges Publikum, worin noch gewisse Anwendungen der Theorie behandelt wurden. Das vorliegende Buch ist auf Grund eines damals geführten Kollegheftes entstanden. Dirichlet hat auch im Sommer 1858, und zwar in Göttingen, über bestimmte Integrale gelesen, und an diese Vorlesung schließt sich das bekannte Werk von G. F. Meyer an. Es unterscheidet sich von dem Arendtschen Buche dadurch, daß jenes sich nur auf kurze Vorlesungsnotizen, dieses aber auf eine sorgfältige Ausarbeitung stützt. Arendt will uns „den Vortrag Dirichlets in seiner ganzen Ursprünglichkeit ohne Kürzungen oder Veränderungen, aber auch ohne irgend welche eigenen oder fremden Zusätze wiedergeben". Alle kleinen Abweichungen von dem Heft sind in besonderen Anmerkungen gewissenhaft registriert, um so dem Buche „den höchstmöglichen Grad von Authenticität" zu verleihen. Soweit sogar geht nach Arendts Angabe die Genauigkeit seiner Ausarbeitung, daß er in der Lage ist „Dirichlet, wo es irgend angängig, nahezu mit seinen eigenen Worten sprechen

zu lassen und auch die Fremdwörter und gewisse Redewendungen zu gebrauchen, deren er sich mit Vorliebe bediente, die aber immer seinen Gedanken einen prägnanten und bezeichnenden Ausdruck verliehen". An verschiedenen Stellen seines Heftes hat schon Herr Arendt selbst Fehler gefunden, und wenn man das Buch genau liest, stößt man noch auf einige andere offenbare Irrtümer. Manches davon mag tatsächlich, wie der Herausgeber besonders in dem einen Falle versichert, auf Dirichlet zurückgehen, obwohl es doch so leicht und so häufig passiert, daß auch ein hochbefähigter Student den Dozenten mißversteht.

Im ersten Abschnitt wird zunächst das Integral von $f(x)$ in dem endlichen Intervall (a, b) definiert als Grenzwert der Summe

$$S = f(a) \cdot (x_1 - a) + f(x_1) \cdot (x_2 - x_1) + \cdots + f(b) \cdot (b - x_{n-1})$$

bei unendlicher Verkleinerung der Teilintervalle. Die Existenz dieses Grenzwertes für ein stetiges $f(x)$ ergibt sich mit Hilfe des Satzes von der gleichmäßigen Stetigkeit. Dirichlet scheint in seinen früheren Vorlesungen über unsern Gegenstand diesen Satz nicht gebracht zu haben. Referent besitzt z. B. ein Heft, das den Titel trägt: „Theorie der bestimmten Integrale nebst ihrer Anwendung auf die Bestimmung der Attraction eines elliptischen Sphaeroids und die Theorie der unendlichen Reihen. Von Lejeune-Dirichlet. Berlin 1845." Darin kommt die gleichmäßige Stetigkeit nicht vor. Nach Auseinandersetzung einiger Grundeigenschaften wird in Arendts Buch die Differentiation des Integrals behandelt. Dabei kommt auch die „differentiatio de curva in curvam" zur Sprache. Hier verläßt Dirichlet die bei dem Existenzbeweis so sorgfältig gewahrte Strenge. In dem Ausdruck

$$\lim_{h=0} \int_a^b \frac{f(\alpha + h, x) - f(\alpha, x)}{h} dx$$

vertauscht er die Symbole lim und $\int$ ohne Bedenken. Am Schluß des Abschnitts wird die Beziehung zwischen dem bestimmten und dem unbestimmten Integral erörtert.

Der zweite Abschnitt bringt die Begriffserweiterungen des Integrals, die sich ergeben, wenn man die Bedingungen der Endlichkeit des Intervalls und der Stetigkeit fallen läßt. Der Satz auf Seite 39, worin es als eine unerläßliche Vorbedingung für die Existenz von $\int_a^\infty f(x)\,dx$ bezeichnet wird, daß $\lim f(x) = 0$ ist, muß auf einem Mißverständnis beruhen. Dirichlet hat vielleicht gesagt: Wenn $\lim f(x)$, für $x = \infty$, überhaupt existiert, so muß, damit das angegebene Integral einen Sinn habe, $\lim f(x) = 0$ sein. Denn einige Seiten später weist er ja die Existenz von $\int_0^\infty \cos(x^2)\,dx$ nach, wo der Integrand nicht nach Null konvergiert. Sehr sorgfältig ist die Auswertung des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{f(x)} dx$$

durchgeführt, wo $\varphi(x)$ und $f(x)$ ganze rationale Funktionen sind. Das Resultat wird benutzt, um die Integralformel zu beweisen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{m-1}\,dx}{x^n - e^{i\vartheta}} = \frac{\pi i}{n}\, e^{\left(\frac{m}{n}-1\right)i\vartheta} \cdot \frac{(1-e^{m\pi i})^2}{1-e^{\frac{2m\pi i}{n}}}.$$

Dabei sind m und n ($> m$) ganz und positiv, n ist gerade und $0 < \vartheta < 2\pi$. Hieraus fließen weiter drei Formeln (Dirichlet nennt sie die Eulerschen Formeln), die durch die Transformation $y = x^p$ (p ganz und positiv) folgende Gestalt annehmen:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}\,dx}{x^b + 1} = \frac{\pi}{b} \cdot \frac{1}{\sin\frac{a}{b}\pi},$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1} - x^{a'-1}}{x^b - 1}\,dx = \frac{\pi}{b} \cdot \left(\cot\frac{a'}{b}\pi - \cot\frac{a}{b}\pi\right),$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{-a-1}\,dx}{x^b + 2\cos\vartheta + x^{-b}} = \frac{\pi}{b} \cdot \frac{\sin\frac{a}{b}\vartheta}{\sin\frac{a}{b}\pi \cdot \sin\vartheta} \qquad (-\pi < \vartheta <$$

$$\left(a = \frac{m}{p},\ a' = \frac{m'}{p},\ b = \frac{n}{p}\right).$$

In ihnen darf man nun a, a', b durch beliebige reelle Zahlen ersetzen, die den Bedingungen $0 < a$, $a' < b$ genügen. Der Beweis, den Dirichlet dafür gibt, ist nach seiner eigenen Erklärung unzulänglich. Es wird aber wenigstens gesagt, wie man ihn verbessern kann. Man darf übrigens noch, ohne daß die Allgemeinheit darunter leidet, in den Eulerschen Formeln $b = 1$ setzen. Sehr bedenklich ist das Räsonnement, welches bei der Reihenentwickelung der drei Integrale benutzt wird. Hier kommen sogar infolge der gliedweise ausgeführten Integration divergente Reihen vor. Am Schluß heißt es nur, die Methode sei „nicht frei von einigen Ungenauigkeiten". Bemerkenswert ist es, daß nach der ausdrücklichen Angabe des Herausgebers gerade diese Entwickelungen sicher auf Dirichlet selbst zurückgehen sollen, obwohl es überraschen muß, „daß er über den Mangel der Methode und die Fehler im Resultat so leicht hinweggeht". In dem öffentlichen Kolleg hat Dirichlet einige dieser laxen Herleitungen durch exakte ersetzt. Er scheint aber z. B. die Produktformel für den Sinus, die hier als Folgerung auftritt, in keiner der beiden Vorlesungen allgemein und streng bewiesen zu haben. Nach Erörterung des Integralbegriffs bei unstetigen Funktionen wendet sich Dirichlet noch einmal zu den Integralen mit unendlichem Intervall. Er zeigt mit Hilfe der partiellen Integration, daß $\int_0^{\infty} \cos(x^2)\,dx$ existiert. Schließlich betrachtet er die beiden Integrale

$$\int_0^{\infty} \sin(\alpha x)\,\psi(x)\,dx, \quad \int_0^{\infty} \cos(\alpha x)\,\psi(x)\,dx.$$

Hier wird nun wieder etwas Falsches behauptet. Damit die obigen Integrale einen Sinn haben, soll es notwendig und hinreichend sein, daß $\psi(x)$ von einer gewissen Stelle an dasselbe Zeichen beibehält und mit wachsendem x nach Null abnimmt. Die Annahme $\psi(x) = \frac{\sin^3 x}{x^2}$ zeigt, daß die Bedingung nicht notwendig ist.

Im dritten Abschnitt, der die Eulerschen Integrale, insbesondere die Gammafunktion behandelt, wird zunächst das Doppelintegral eingeführt. Bei stetigem $f(x, y)$ ist $u = \int\limits_a^b f(x, y)\, dx$ eine stetige Funktion von y, was aber hier keines Beweises gewürdigt wird. Ein solcher findet sich erst viele Seiten später, und es hätte wenigstens auf ihn verwiesen werden müssen. Integriert man u zwischen den festen Grenzen p und q, so entsteht ein Doppelintegral. Das Fundamentaltheorem

$$\int\limits_p^q dy \left(\int\limits_a^b f(x, y)\, dx \right) = \int\limits_a^b dx \left(\int\limits_p^q f(x, y)\, dy \right)$$

beweist Dirichlet zunächst geometrisch, unternimmt dann aber noch einen rein analytischen Beweis. In der Formel

$$\int\limits_p^q u\, dy = \lim \Sigma \left(\int\limits_a^b f(x, y_\nu) dx \right) (y_{\nu+1} - y_\nu) = \lim \int\limits_a^b [\Sigma f(x, y_\nu)\, (y_{\nu+1} - y_\nu)]\, dx$$

wird

$$\Sigma f(x, y_\nu)\, (y_{\nu+1} - y_\nu) = \int\limits_p^q f(x, y)\, dx + \varepsilon$$

gesetzt, dann schreibt man

$$\int\limits_p^q u\, dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_p^q f(x, y)\, dy \right) dx + \int\limits_a^b \varepsilon\, dx$$

und folgert aus $\lim \varepsilon = 0$ den gewünschten Satz. Wie leicht hätte Dirichlet mit Hilfe der gleichmäßigen Stetigkeit diese unbefriedigenden Schlüsse exakt machen können! Es ist wunderbar, daß er den für eine Veränderliche bewiesenen Satz von der gleichmäßigen Stetigkeit nicht auf zwei Veränderliche zu übertragen versucht hat. Der zweite Beweis des Fundamentaltheorems, den Herr Arendt aus einem andern Dirichletschen Kolleg mitteilt, beruht auf der Differentiation unter dem Integralzeichen. Über „Doppelintegrale von unendlicher Ausdehnung" wird nur Weniges und Unzulängliches gesagt, mit dem Hinweis darauf, „daß auch in den Lehrbüchern dieser delikate Punkt nicht berührt wird". Auf diesem Standpunkt stehen unsere Lehrbücher nicht mehr.

Euler betrachtete es als erlaubt, in einer Integralformel wie

$$\int\limits_0^\infty e^{-kx} x^{a-1}\, dx = \frac{\Gamma(a)}{k^a} \qquad (k > 0)$$

das k durch eine komplexe Zahl zu ersetzen. Dirichlet mißbilligt dieses Verfahren und stellt die Aufgabe „ganz allgemein die Bedingungen ausfindig zu machen, unter denen es gestattet ist in einem fertigen und ausgewerteten bestimmten Integral eine durchaus reelle Konstante mit einer komplexen Größe zu vertauschen". Um diese Aufgabe zu lösen, werden Betrachtungen über Funktionen einer komplexen Veränderlichen angestellt, die in dem öffentlichen Kolleg noch näher ausgeführt sind. An diesen Entwickelungen ist vom modernen Standpunkt manches auszusetzen. Man findet z. B. den Begriff der Funktion einer komplexen Veränderlichen ganz richtig erklärt (S. 464); an andern Stellen aber wird die Existenz der Ableitung, die doch die wesentlichste Bedingung ist, nicht einmal erwähnt (z. B. S. 471). Unbefriedigend ist auch der Nachweis, daß die Funktion $\varphi(k) = \int_a^b f(x, k)\,dx$ bei stetigem $f(x, k)$ stetig ist. Dabei wird sogar nur angenommen, daß f als Funktion von k betrachtet stetig ist, und ganz außer Acht gelassen, daß die Differenz $f(x, k + \Delta k) - f(x, k)$ noch von x abhängt. Der Übergang ins komplexe Gebiet erweist sich als ein mächtiges analytisches Hilfsmittel und ermöglicht es, aus den bisherigen Resultaten eine große Zahl von Integralformeln abzuleiten.

Im fünften Abschnitt werden noch andre Methoden zur Auswertung von Integralen benutzt, die Differentiation und Integration unter dem Integralzeichen und die Transformation. Den Schluß bilden interessante Ausführungen über semikonvergente Reihen.

Der übrige Teil des Buches enthält die Theorie der mehrfachen Integrale. Der Schwerpunkt liegt hier ganz in den Anwendungen. Besonders eingehend wird die Oberflächenberechnung des Ellipsoids behandelt und die Attraktion eines homogenen Ellipsoids. Hier lernt man die „Methode des diskontinuierlichen Faktors" kennen, die auch zur Auswertung des Integrals

$$\int\int\int \ldots x^{a-1}\,dx \cdot x^{b-1}\,dy \cdot z^{c-1}\,dz \ldots .$$
$$(a, b, c, \ldots; x, y, z, \ldots > 0,$$
$$x + y + z + \ldots < 1)$$

benutzt wird. Dieses Integral dient dann noch zur Berechnung von gewissen Rauminhalten und Trägheitsmomenten.

Herr Arendt hat sich durch die sorgfältige Herausgabe der Dirichletschen Vorlesungen sehr verdient gemacht und kann des Dankes der Mathematiker sicher sein.

Bonn, Januar 1906. GERHARD KOWALEWSKI.

W. F. Osgood, ord. Professor an der Harvard-Universität, Cambridge, Mass. (V. St. A.), **Lehrbuch der Funktionentheorie.** In 2 Bänden. I. Band, I. Hälfte. Leipzig 1906, B. G. Teubner.

Das Werk, dessen erste Lieferung ich der Öffentlichkeit hiermit übergebe, hat zum Ziele eine systematische Entwicklung der Funktionentheorie auf Grundlage der Infinitesimalrechnung und in engster Fühlung mit der Geometrie und der mathematischen Physik. Die eigentlichen Entwicklungen beginnen erst mit dem zweiten Abschnitte, Kap. 6, S. 179, und behandeln

in Kap. 6 und 7 vornehmlich Funktionen, welche in einem gegebenen Bereiche der Zahlenebene eindeutig und mit einer Ableitung versehen sind. Dabei werden auch die elementaren Funktionen für komplexe Werte des Arguments, sowie die linearen Transformationen einer komplexen Veränderlichen besprochen. Daß die konforme Abbildung gleich von vornherein in den Vordergrund gerückt wird, braucht wohl kaum erwähnt zu werden, Hierauf wird der Cauchysche Integralsatz eingeführt, woran sich dann jener Zyklus von Lehrsätzen anknüpft, welche das natürliche Fundament für die Funktionentheorie bilden. Der hier behandelte Stoff umfaßt u. a. die Weierstraßschen Reihensätze, während die rationalen Funktionen auf ihre funktionentheoretischen Eigenschaften hin untersucht werden.

Die zweite Lieferung bringt die Riemannschen Flächen in geometrischer Behandlungsweise, also unter ausgiebigem Gebrauche der konformen Abbildung, und erreicht in Kap. 9, welches von der analytischen Fortsetzung handelt, einen bestimmten Abschluß für die Grundlagen der Theorie. Hierauf folgen Anwendungen der Theorie auf periodische Funktionen. Die Lieferung schließt mit einer independenten Behandlung des logarithmischen Potentials, wobei der Gesichtspunkt maßgebend ist, daß die ganze Funktionentheorie auch auf dieser Grundlage, also ohne jeglichen Bezug auf das Vorhergehende, entwickelt werden kann.

Wie man sieht, bildet die Infinitesimalrechnung nebst einem Teile der Mengenlehre das Substrat für die analytischen Entwicklungen. An strengen Behandlungen dieses Teiles der Analysis hat es zwar seit einer Reihe von Jahren nicht gefehlt. Indessen erscheint dabei häufig die reelle Funktionentheorie als Selbstzweck, so daß die Definitionen und Sätze weiter gefaßt werden, als für die komplexe Funktionentheorie erforderlich ist, während die Methoden erst aus ε-Beweisen herausgelesen werden müssen. Nun habe ich vor allen Dingen eine Darlegung der komplexen Funktionentheorie geben wollen, welche sich auch zum ersten Studium derselben eignet und überdies sich unmittelbar an die Infinitesimalrechnung anschließt. Darum hielt ich es für angebracht, in den einleitenden Kapiteln des Werkes die grundlegenden Sätze jenes Teiles der reellen Analysis in möglichst einfacher Formulierung zusammenzustellen, sowie die gebräuchlichen Beweismethoden der modernen Analysis mit aller Klarheit auseinander zu setzen. Im übrigen enthält Kap. 5 spezielle Untersuchungen über Punktmengen, welche für eine einwandfreie Entwicklung der Theorie unentbehrlich sind. — Die 2. Hälfte des I. Bandes wird im Herbst 1906 erscheinen.

Cambridge, Mass. W. A. Osgood.

E. T. Whittaker. A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies; with an introduction to the problems of three bodies. 8°. Cambridge, University press. 1904.

Während eines Zeitraumes von Jahrzehnten war der Studierende, welcher mehr als die ersten Elemente der Mechanik verlangte, auf eine verhältnismäßig kleine Anzahl von Lehrbüchern (Schell, Somoff, Thomson und Tait, Routh) angewiesen, heute sind es bereits so viele, daß dem Anfänger die Auswahl erschwert wird — und doch sind es nicht zu viele. In dem Maße, in welchem das Interesse für Mechanik zunimmt, trennen sich auch die einzelnen Anwendungsgebiete deutlicher, und die Lehrbücher bringen diese Arbeitsteilung mehr oder weniger zum Ausdruck.

In dem vorliegenden Werke sind die Bedürfnisse des Astronomen in weitem Umfange berücksichtigt. Daher eine Einschränkung der rein kinematischen Ausführungen und eine sehr eingehende — wenn auch konzise — Behandlung der kinetischen Integralprinzipien. Den vollständig integrierbaren Problemen des freien und beschränkten materiellen Punktes und des starren Körpers sind besondere Abschnitte gewidmet. Wir finden neben den integrablen Fällen die Punktbewegung auf einer Fläche, wie sie von Liouville, Stäckel und Kobb gefunden wurden, das Theorem von Joukowski (1890) über die Bewegung auf Systemen von Flächenkurven. Die Bewegungsgleichungen des Kugelkreisels sind nach Klein und Sommerfeld vollständig integriert. Besonders hervorzuheben ist die in dem vorliegenden Lehrbuche mit außerordentlichem Geschick und seltener Gründlichkeit durchgeführte Theorie der kleinen Schwingungen, deren Ausbildung wir — in den wesentlichen Punkten — Lagrange und Routh verdanken. Der Mechaniker von Beruf wird natürlich die Grundwerke nicht umgehen können, aber er wird jedenfalls in der Darstellung von Whittaker ein vortreffliches Resümee dieser Theorie erkennen, das auch die späteren Arbeiten genügend berücksichtigt.

Mit derselben Sorgfalt sind die nicht-holonomen und dissipativen Systeme behandelt, indem hier gleichfalls die neuesten Arbeiten methodische Verwertung gefunden haben.

Die weitere Verfolgung der nicht-integrablen Bedingungsgleichungen hat der Verfasser an die Darstellung des Hamiltonschen Prinzips geknüpft. Neuerdings umgeht man die Schwierigkeiten, welche dieser Methode naturgemäß anhaften, indem man nicht ein mit allen Mühsalen der Isoperimeterprobleme belastetes Integralprinzip zum Ausgangspunkt wählt, sondern die Lagrangesche Zentralgleichung der Kinetik, wie es bereits von Hamel und Lorentz (Leyden) geschehen ist. Die weitere Behandlung der aus der Mechanik so eliminierten Schwierigkeiten in der Auffassung der Variationen kann man dann dem Mathematiker überlassen.

Den allgemeinen Zielen des Werkes entsprechend hat der Verfasser eine Darstellung der wichtigsten Eigenschaften der Integral-Invarianten und der Transformationstheorie für die kinetischen Differentialgleichungen gegeben, der weitere allgemeine Eigenschaften der Integralsysteme angeschlossen sind. Diese Kapitel finden dann spezielle Anwendungsgebiete in dem Dreikörperproblem der Astronomie. Die allgemeine Theorie der freien Bahnen und ein Abschnitt über die Integration der kinetischen Differentialgleichungen durch trigonometrische Reihen beschließen das inhaltreiche und anregende Werk, dessen Bedeutung bei intensiver Benutzung am besten gewertet wird.

Karlsruhe i. B. Heun.

Max Simon, Methodik der elementaren Arithmetik in Verbindung mit algebraischer Analysis. Mit 9 Textfiguren. gr. 8. [IV u. 108 S.] Leipzig 1906, B. G. Teubner.

Die vorliegende Schrift ist der Abdruck einer Vorlesung, welche der Verfasser im Sommersemester 1904 an der Kaiser Wilhelms-Universität gehalten hat. Der Zweck derselben war, den Studierenden die Ziele des arithmetisch-algebraischen Unterrichts der neunklassigen höheren Schulen zu zeigen und sie anzuleiten, den zusammenfassenden Überblick auf der obersten Stufe methodisch zu geben. — Die Schrift zerfällt in zwei neben-

einander herlaufende Teile: die Entwicklung des Zahlbegriffs vom Zählen an bis zu den komplexen Zahlen und die Auflösung der algebraisch auflösbaren Gleichungen. Der Begründung des Begriffs und der Rechnungsregeln der Reihenzahlen ist besondere Sorgfalt gewidmet, der Verfasser hat sich dabei wesentlich an die Georg Cantorsche Methode gehalten, weil sie s. E. wesentliche Vorzüge vor der Dedekindschen und Weierstraßschen besitzt. Eine geringfügige Modifikation ist durch die Auffassung des Verfassers vom Grenzbegriff als einer Kategorie d. h. eines irreduzibeln Grundvermögens der Vernunft bedingt. Die ganze Entwicklung wird beherrscht von der Ausbildung des Funktionsbegriffs, dessen zentrale Stellung im Unterricht der Verfasser schon seit mehr als 20 Jahren betont hat.

Straßburg i. E. MAX SIMON.

P. Zechs Aufgabensammlung zur theoretischen Mechanik nebst Auflösungen in dritter Auflage herausgegeben von Dr. C. Cranz, Professor an der Militärtechnischen Akademie Berlin-Charlottenburg, unter Mitwirkung von Ritter von Eberhard, Leutnant. Mit 206 Figuren im Text. 220 S. 8⁰. J. B. Metzlersche Buchhandlung. Stuttgart 1906.

Die vorliegende dritte Auflage der beliebten Zechschen Aufgabensammlung unterscheidet sich von der zweiten Auflage, die der inzwischen verstorbene Verfasser noch selbst besorgt hatte, dadurch vorteilhaft, daß die Figuren neu gezeichnet sind und an Klarheit nichts zu wünschen lassen, wie dadurch, daß eine größere Anzahl von Versehen verbessert ist. Auch finden sich an mehreren Stellen Ergänzungen, jedoch ist die allgemeine Anordnung des Buches die altbekannte geblieben. Gewiß wird sich das Buch in seiner neuen sorgfältigen Ausgabe im Kreise der Studierenden der technischen Hochschulen gut einbürgern, wie es dem Wunsche des Herausgebers entspricht; aber auch in den Händen der Studierenden der Mathematik und Physik an den Universitäten wird die Zech-Cranzsche Sammlung sehr viel Nutzen stiften.

Elemente der Differential- und Integralrechnung. Hilfsbuch für den mathematischen Unterricht zum Gebrauche an höheren Lehranstalten. Von Ludwig Tesař, wirkl. Mittelschullehrer in Olmütz. Mit 83 Figuren im Text. [VIII u. 128 S.] gr. 8. Leipzig 1906, B. G. Teubner.

Vorstehendes Büchlein ist im wesentlichen eine Frucht jener Bewegung, welche in jüngster Zeit mathematische und pädagogische Kreise beschäftigte und noch beschäftigt. Mein Werk ist es, zu zeigen, wie ich mir die Durchführung der Ideen beim heutigen Betriebe des Unterrichts vorstelle. Vorausgeschickt ist eine Behandlung der Elemente der analytischen Geometrie, wie sie auf der Mittelstufe des Unterrichtes platzgreifen sollte. (In den österreichischen Realschulen entspräche dies der 3., 4. sowie eventuell 5. Klasse.) Hierbei findet auch die so wichtige und zumeist so kärglich behandelte Hyperbelgleichung $xy =$ Konst. ihr Recht. Anschließend sind die Elemente der Differential- und Integralrechnung so weit vom mechanischen Standpunkte entwickelt, als sie der Physik-Unterricht in den oberen Klassen benötigt. Den Abschluß bilden Untersuchungen an Kurven. *Im großen ganzen beschränkte ich mich auf die elementarsten Entwicklungen, eingedenk des Grundsatzes, daß Hochschulmathematik nicht im Mittelschulunterrichte betrieben werden soll.* Darum glaube ich mich der Hoffnung hingeben zu können, daß

das Büchlein für den heutigen Unterrichtsbetrieb unmittelbar brauchbar sein dürfte. Ich legte Wert darauf — bei möglichster Betonung der Anschauung — überall die wissenschaftliche Strenge zu wahren. Das Wort „unendlich klein" wurde vermieden, obwohl vom Begriffe Gebrauch gemacht wurde. Es geschah dies deshalb, weil gerade dieses Wort (auch noch bei jüngeren Semestern der Hochschule) erfahrungsgemäß die richtige Vorstellung verwirrt. Ferner schaltete ich die Reihen ganz aus. Denn ebenso groß die Befriedigung ist, die der Mathematiker in der Beschäftigung mit ihnen findet, ebenso groß ist die Langeweile, die sie bei den Schülern erzeugen. Trotzdem wird der Differentialquotient von $l \cdot x$ und e^x abgeleitet. Es gelingt dies durch Fortentwicklung eines von Hrn. Bradshaw und Hrn. J. Tannery eingeschlagenen Verfahrens. Beispiele wurden insoweit beigegeben und größtenteils durchgeführt, als es zur sicheren Kenntnis des Vorgetragenen nötig ist. „Aber der Formalismus darf nicht überwuchern; *die Hauptsache ist eine klare Erfassung der Grundbegriffe und ihrer anschauungsmäßigen Bedeutung*" (Klein).

Olmütz. Ludwig Tesař.

2. Bücherschau.

Abbe, E., Gesammelte Abhandlungen. 2. Bd. Wissenschaftliche Abhandlungen aus verschiedenen Gebieten. Patentschriften, Gedächtnisreden. IV, 346 S. 8°. Jena 1906. ℳ 7.50.

Bruns, H., Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmaßlehre. VIII, 512 S 8°. Leipzig 1906.

Büchel, C., Ganzzahlige Werte bei Diophant. 16 S. 8°. Hamburg 1905. ℳ 1.—.

Carbasso, Vorlesungen über theoretische Spektroskopie. VIII, 236 S. 8°. Leipzig 1906. ℳ 7.—.

Czuber, E., Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. 1. Band. 2. sorgfältig durchgesehene Auflage. Leipzig 1906.

Fischer, V., Grundbegriffe und Grundgleichungen der mathematischen Naturwissenschaft. VIII, 108 S. 8°. Leipzig 1906. ℳ 4 50.

Frischauf, J., Die Gauß-Gibbssche Methode der Bahnbestimmung eines Himmelskörpers aus 3 Beobachtungen. 47 S. 8°. Leipzig 1905. ℳ 1.20.

Hartwig, Th., Leitfaden der konstruierenden Stereometrie. Darstellung der Raumformen im Schrägbilde, nebst einigen Anwendungen von Schrägbildern auf dem Gebiete der theoretischen und rechnenden Stereometrie, darstellenden Geometrie, Mineralogie, mathematischen Geographie und Physik. 39 S. m. 55 Fig. 8°. Wien 1906. ℳ 1.—.

Hegemann, E., Lehrbuch der Landesvermessung. VIII, 261 u. XX S. m. 114 Abbildgn. und 1 Karte. Berlin 1906. ℳ 12 —.

Nielsen, N., Handbuch der Theorie der Gammafunktion. X, 326 S. 8°. Leipzig 1906.

Routh, E. J., Elementary part of a treatise on dynamics of a system of rigid bodies. Part 1 of a treatise on the whole subject. 7th edit. 460 p. 8°. London. s. 14.—.

Schubert, H., Die Ganzzahligkeit in der algebraischen Geometrie. 58 S. 8°. Hamburg 1905. ℳ 2 —.

Senftner, G., Ein mechanisches Problem aus der Variationsrechnung. 32 S. 8°. Rostock 1905.

Smolik, F., Elemente der darstellenden Geometrie. 3. Auflage von J. F. Heller. VI, 306 S. 8°. Mit Fig. Leipzig 1906.

Vivanti, G., Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen. Umarbeitung, deutsch herausgegeben von A. Gutzmer. VI, 512 S. 8°. Leipzig 1906.

Zechs Aufgabensammlung zur theoretischen Mechanik nebst Auflösungen, in 3. Auflage herausgegeben von C. Cranz unter Mithilfe von Leutnant Ritter von Eberhard. IV, 220 S. 8°. Stuttgart 1906. ℳ 4.60.

3. Zeitschriftenschau.

(Von dem Inhalt der Zeitschriften werden nur die Aufsätze erwähnt, welche dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften angehören.)

Mathematische Annalen. 61. Band. 4. Heft.

Gordan, Die partiellen Differentialgleichungen des Valentinerproblems. — Landau, Über einen Satz von Tschebyschef. — Herglotz, Über die analytische Fortsetzung gewisser Dirichletscher Reihen. — Dehn, Die Eulersche Formel im Zusammenhang mit dem Inhalt in der Nichteuklidischen Geometrie. — Simon, Über Dreieckskonstruktionen in der Nichteuklidischen Geometrie.

Archiv der Mathematik und Physik. Dritte Reihe. 10. Band. 1. Heft.

Horn, Zur Theorie der Bewegung eines schweren Punktes auf einer Rotationsfläche. — Budde, Die Tantallampe der Firma Siemens & Halske A.-G. — Epstein, Raumkurven und Liniengeometrie. — Fleck, Zur Darstellung definiter binärer Formen als Summen von Quadraten ganzer rationalzahliger Formen. — Kapteyn, Sur l'équation différentielle de Monge. — Landau, Über einen Satz des Herrn Frobenius in der Theorie der linearen Differentialgleichungen. — Kostka, Zur Bildung der symmetrischen Funktionen. — Saalschütz, Bemerkung zu dem vorstehenden Aufsatz des Herrn C. Kostka. — Cesàro, Fonctions continues sans dérivée. — Rezensionen. — Vermischte Mitteilungen.

Monatshefte der Mathematik und Physik. XVII. Jahrgang. 1. Vierteljahr. 1906.

Lerch, Über einige Punkte der Theorie der Eulerschen Integrale. — Meder, Über die Determinanten von Wronski. — Klug, Konstruktion der Brennpunkte der ebenen Schnitte eines Kegels zweiter Ordnung. — Nielsen, Über bestimmte Integrale mit der Prymschen Q-Funktion. — Carda, Zur Theorie der Jacobischen Differentialgleichung. — Hahn, Über einen Satz von Osgood in der Variationsrechnung. — Carda, Zur Berechnung der Torsion einer Raumkurve in rationaler Form. — Literaturberichte.

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. 36. Jahrgang. 7. und 8. Heft. 1906.

Frischauf, Die Abbildungslehre und deren Anwendung auf Kartographie und Geodäsie. — Hagge, Zum goldenen Schnitt. — Lony, Der Apollonische Kreis als geometrischer Ort. — Aufgaben-Repertorium. — Literarische Berichte. — Pädagogische Zeitung.

Journal der reinen und angewandten Mathematik. Band 130. Heft IV.

Picard, De l'intégration de l'équation $\triangle u = e^u$ sur une surface de Riemann fermée. — Koenigsberger, Über den Eisensteinschen Satz von dem Charakter der Koeffizienten der Reihenentwicklungen algebraischer Funktionen. — Jolles, Zur synthetischen Theorie der Raumkurven III. Grades k^3 und der Kongruenz C_3^3 ihrer Schmiegungsstrahlen. Kubische Raumkurven und biquadratische Regelflächen, die bezüglich k^3 autokonjugiert sind. — Steinitz, Über ein merkwürdiges Polyeder von einseitiger Gesamtfläche.

Bulletin Astronomique. Tome 21. Novembre—Décembre 1904.

R. Radau, Réflexions sur les méthodes de correction des orbites. F. Boquet, Influence de la température sur la valeur de la flexion au grand instrument méridien. G. Bigourdan, Sur quelques améliorations à apporter aux instruments

méridiens, particulièrement à ceux de petites dimensions. F. Biske, Sur un dispositif permettant de rendre horizontal l'axe optique d'une lunette.

— Tome 22. Janvier— Octobre 1905.

A. Féraud, Etude sur quelques-unes des erreurs qui entachent les mesures faites sur les images photographiées des astres. Bouquet de la Grye, Note sur la parallaxe du soleil. H. F. Lau, Observations d'étoiles variables faites à Copenhague. P. Rudzki, Sur la détermination de la figure de la terre d'après les mesures de la gravité. H. Bourget et I. Carrère, Sur un obturateur automatique. G. Bigourdan, Description d'un équatorial horizontal à réflexion, et à latitude variable. — Discours prononcés par Mrs. Puiseux, Laussedat et Baillaud aux obsèques de Paul Henry. Conférence astrophotographique internationale de 1900. Ephémérides de la planète Eros. P. Salet, Contribution à l'étude de quelques étoiles doubles. E. W. Maunder, L'origine solaire des perturbations du magnétisme terrestre. Henri Renan, Etude de l'influence de la déviation instrumentale d'un cercle méridien sur les mesures de latitude. Borrelly, Observations de planètes faites à Marseille. Esmiol, Observations de planètes et de comètes faites à Marseille. Jean Mascart, Observations de petites planètes faites à Paris. Rambaud et Sy, Observations de planètes et de comètes faites à Alger. Salet, Observations de l'éclipse partielle de lune du 19 février 1905. Giacobini, Observations de comètes faites à Nice. Javelle, Observations de comètes faites à Nice. Simonin, Observations de planètes faites à Nice. Jean Mascart, Clavius et l'astrolabe. Henry Bourget, Sur les nombres de Cauchy. Simonin, Perturbations séculaires de la longitude moyenne. Cas particulier d'Hécube. Salet, Sur l'existence d'un champ magnétique dans le voisinage du soleil. Luizet, Sur l'étoile variable R. X. Hercule. H. Lau, Mesures micrométriques d'étoiles doubles. Rambaud et Sy, Nouvelles observations de planètes faites à Alger. F. Boquet, Les chronographes imprimants de l'Observatoire de Paris. F. Boquet et I. Chatelu, Sur la précision des observations au chronographe imprimant. Coggia, Observations de planètes et de comètes faites à Marseille. A. Orlov, Sur la détermination des corrections des éléments d'une orbite. H. Deslandres, Recherches sur l'atmosphère solaire et appareils enrégistreurs des couches de vapeur superposées qui la composent. L. Fabry, Ephémérides de la planète Gyptis. P. Maître, Observations de la planète Vesta faites à Marseille. F. Rossard, Observations de planètes et de comètes faites à Toulouse. L. de Ball, Sur les recherches de Schwarzschild concernant la détermination des grandeurs photographiques des étoiles. H. Andoyer, Sur la théorie de la réfraction. Rambaud et Sy, Observations nouvelles de planètes et de comètes faites à Alger.

L'Enseignement Mathématique. VIII^e Année. No. 1. 1906.

Klein, De l'enseignement des sciences mathématiques et physiques dans les universités et hautes écoles techniques. — Laisant, Sur l'évolution de la matière. — Chomé, Sur le contour apparent de la surface d'un corps. Enquête sur la méthode de travail des mathématiciens. — Chronique. — Notes et documents. — Bibliographie.

Revue de mathématiques spéciales. Tome 7. Années 1902/3 et 1903/4. Juillet —Septembre 1904.

G. Fontené, Sur les tétraèdres inscrits à une quadrique et circonscrits à une autre. Mathieu Weil, Triangle inscrit dans une conique et dont deux côtés touchent deux autres coniques. J. Richard, Sur les courbes unicursales du 4^e degré.

— Tome 8. Années 1904/5 et 1905/6. Octobre 1904—Octobre 1905.

E. Humbert, Note sur les systèmes de formules qui relient les six éléments fondamentaux d'un triangle. J. Richard, Démonstration du théorème de d'Alembert. J. Richard, Sur la lemniscate. R. Vintéjoux, Sur les combinaisons simples

et complètes. E. Humbert, Sur le calcul de la somme d'une série numérique, positive et convergente. Ch. Michel, Sur les méthodes d'approximation. A. Darmon, Remarques sur la lemniscate. J. Richard, Dérivée d'une série. J. Richard, Sur la méthode d'approximation de Newton. E. Humbert, Limite de $\frac{x^p}{a^x}$ pour x infiniment grand et positif ($a > 1$). L. Garnon, Note sur le cercle de Mannheim. R. Bouvaist, Sur les cercles harmoniquement circonscrits à une conique. R. Bouvaist, Sur une application de la transformation par inversion. A. Droz-Farny, Note de Géométrie (théorème énoncé par L. Garnon). I. D. Dufaut, Sur le cercle de Mannheim. Bernheim, Sur la représentation paramétrique des coniques et des surfaces du second ordre. V. Jamet, Sur le développement de Taylor. T. Lemoyne, Sur les coniques. Mathieu Weil, Pentagones et hexagones inscrits à une conique et circonscrits à une autre conique. A. Aubry, Sur la transformation des coordonnées. C Massing, Sur les triangles circonscrits à une parabole. Ch. Michel, Sur les cubiques gauches considérées comme courbes unicursales.

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. XII. Nr. 3. 4.

Cole, The October meeting of the American Mathematical Society. — Miller, The September meeting of the San Francisco Section. — Noble, Note on Loxodromes. — Veblen, Stolz and Gmeiner's function theory. — Moore, Cesàro-Kowalewski's Algebraic Analysis and infinitesimal calculus. — Landau, On a familar theorem of the theory of functions. — White, Rational plane curves related to Riemann transformations. — Wright, On Lamé's six equations connected with triply orthogonal systems of surfaces. — Smith, Certain surfaces admitting of continuous deformation with preservation of conjugate lines. — Hedrick, The new calculus of variations. — Van Vleck, Granville's differential and integral calculus. — Wilson, The foundations of science. — Hadamard, La mécanique statistique. — Notes.

Procedings of the Royal Society of Edinburgh. Session 1904—5. Vol. XXV. No. XII.

Peddie, Magnetic quality in a Boscovichian assemblage of molecular magnets. — Lord Kelvin, Deep sea ship-waves.

Transactions of the American Mathematical Society. Vol. 7. Number 1.

Coble, On the relation between the three-parameter groups of a cubic space curve and a quadric surface. — Hutchinson, On certain hyperabelian functions which are expressible by theta series. — Field, On the form of a plane quintic curve with five cusps. — Smith, The symbolic treatment of differential geometry. — Fite, Groups whose orders are powers of a prime. — Maschke, Differential parameters of the first order. — Maschke, The Kronecker-Gaussian curvature of hyperespace. — Miller, Groups containing only three operators which are squares. — Curtiss, Theorems converse to Riemann's on linear differential equations. — Birkhoff, General mean value and remainder theorems. — Glenn, Determination of the abstract groups of order p^2qr; p, q, r being distinct primes. — Haskins, Note on the differential invariants of a surface and of space. — Pierpont, On improper multiple integrals.

Annali di Matematica pura ed applicata. Serie III^a^. Fasc. 1°.

Almansi, Sopra una delle esperienze del Plateau. Bianchi, Complementi alle ricerche sulle superficie isoterme. Severi, Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche.

—— —— Serie III^a^. Tomo XII°. Fascicolo 2°.

Burgatti, Sugl' integrali primi dell' equazioni del moto d' un corpo pesante intorno a un punto fisso. Nielsen, Sur les séries de fonctions de Stirling. Eisenhart, Surfaces analogous to the surfaces of Bianchi. Maillet, sur les équations indéterminées $x^\lambda + y^\lambda = cz^\lambda$.

Atti della Accademia Gioenia di Scienze Naturali in Catania. Anno LXXXI. 1904. Volume XVII. Catania 1904.

Fubini, Sulla teoria delle forme quadratiche Hermitiane e dei sistemi di tali forme. — Fubini, Applicazioni analitiche dei gruppi di projettività trasformanti in sè una forma Hermitiana. — Marietta, Le trasformazioni (2, 2) quadratiche e cubiche di spazio. — Amato, Sugl'integrali delle equazioni del moto d'un punto materiale. — Giampaglia, Formole d'incidenza per le coppie punto e retta, retta e piano, punto e piano nello spazio ad n dimensioni. — Pennacchietti, Sopra una classe di Problemi di meccanica, riducibili a quadrature.

Annaes Scientificos da Academia Polytechnica do Porto, publicados sob a direcção de F. Gomes Teixeira. Vol. 1. No. 1.

Teixeira, Sobre uma questão entre Menteiro da Rocha e Anastacio da Cunha. Nielsen, Sur les séries neumanniennes de fonctions sphériques. Ferreira da Silva, A obra scientifica e a vida do chimico portuguez Roberto Duarte Silva. Carqueja, O capitalismo e as suas origens em Portugal.

4. Kataloge.

(Vacat.)

5. Bei der Redaktion eingegangene Schriften.

[Titel, Preis usw. der eingesandten Schriften werden hier regelmäßig veröffentlicht. Besprechungen geeigneter Bücher bleiben vorbehalten. Eine Rücksendung der eingegangenen Schriften kann nicht erfolgen.]

L. D. Ames., An arithmetic treatment of some problems in analysis situs. A dissertation submitted to the faculty of arts and sciences of Harvard University in satisfaction on the requirement of a thesis for the degree of doctor of philosophy. Batimore 1905.

F. Amodeo, Gli Istituti Accademici di Napoli. Napoli 1905.

G. von dem Borne, Untersuchungen über die Abhängigkeit der Radioaktivität der Bodenluft von geologischen Faktoren. Habilitationsschrift. Breslau 1905.

Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Band VI 2. Heft 1. (Enthaltend: Anding, Über Koordinaten und Zeit. — Cohn, Reduktion der astronomischen Beobachtungen. Sphärische Astronomie im engeren Sinne. — Wirtz, Geographische Ortsbestimmung, Nautische Astronomie. — Caspari, Theorie der Uhren.) B. G. Teubner, Leipzig 1905.

E. Jacobsthal, Anwendungen einer Formel aus der Theorie der quadratischen Reste. Dissertation. Berlin 1906.

C. A. Laisant, Initiation mathématique. Ouvrage étranger à tout programme dédié aux amis de l'enfance. Avec 97 figures dans le texte. Georg & Cie. Genève 1906.

F. J. Müller, Ein neuer Netzentwurf für topographische Karten. Verlag: Bayrischer Techniker-Verband, München 1906.

W. F. Osgood, ord. Professor an der Harvard-Universität, Cambridge, Mass. (V. St. A.), Lehrbuch der Funktionstheorie. In 2 Bänden. I. Band, I. Hälfte. B. G. Teubner, Leipzig 1906.

Zur Erinnerung an **Josef Petzval.** Wien 1905.

Max Simon, Methodik der elementaren Arithmetik in Verbindung mit algebraischer Analysis. Mit 9 Textfiguren. gr. 8. IV u. 108 S. B. G. Teubner, Leipzig 1906.

F. Gomes Teixeira, Tratado de las curvas especiales notables. Memoria premiada por la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales de Madrid, y publicada por la misma Academia. IX, 632 p. Fol. Madrid 1905.

L. Tesař, Elemente der Differential- und Integralrechnung. Hilfsbuch für den mathematischen Unterricht zum Gebrauche an höheren Lehranstalten Mit 83 Figuren im Text. VIII u. 128 S. gr. 8. B. G. Teubner, Leipzig 1906.

Cesàro, Ernesto, Professor der Mathematik an der Königl. Universität Neapel, elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung. Mit zahlreichen Übungsbeispielen. Nach einem Manuskript d. Verf. deutsch hrsg. von Dr. G. Kowalewski, Professor a. d. Universität Greifswald. Mit 97 Figuren im Text. [VI u. 894 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. geb. n. ℳ 15.—

Czuber, Hofrat **Emanuel,** Professor an der Technischen Hochschule zu Wien, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. 2 Bände. gr. 8.
- I. Band. 2. sorgfältig durchgesehene Auflage. Mit 115 Figuren im Text. [XIV u. 560 S.] 1906. In Leinw. geb. n. ℳ 12.—
- II. — Mit 78 Figuren im Text. [IX u. 428 S.] 1898. In Leinw. geb. n. ℳ 10.—

Festschrift Adolph Wüllner gewidmet zum siebzigsten Geburtstage 13. Juni 1905 von der Königl. Technischen Hochschule zu Aachen, ihren früheren und jetzigen Mitgliedern. Mit dem Bildnis A. Wüllners in Heliogravüre, 8 Tafeln und 91 Figuren im Text. [VIII u. 264 S.] gr. 8. 1905. geh. n. ℳ 8.—, in Leinw. geb. n. ℳ 9.—

Fisher, Dr. phil. **Irving,** Professor der Nationalökonomie an der Yale Universität, kurze Einleitung in die Differential- und Integralrechnung (Infinitesimalrechnung). Aus der durch mehrere Verbesserungen des Verfassers vervollständigten dritten englischen Ausgabe übersetzt von N. Pinkus. Mit 11 Figuren im Text. [VI u. 72 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. geb. n. ℳ 1.80.

Fleming, J. A., Professor der Elektrotechnik am University College zu London, elektrische Wellen-Telegraphie. 4 Vorlesungen. Autorisierte deutsche Ausgabe von Professor Dr. E. Aschkinaß, Privatdozent an der Universität Berlin. Mit 53 Abbild. [IV u. 185 S.] gr. 8. 1906. geh. n. ℳ 4.20, in Leinw. geb. n. ℳ 5.—

Föppl, Dr. **Aug.,** Professor an der Königl. Technischen Hochschule zu München, Vorlesungen über technische Mechanik. In 4 Bänden. gr 8. Preis des ganzen Werkes in 4 Leinwand-Bänden n. ℳ 44.—
- I. Band. Einführg. i. d. Mechanik. 3. Aufl. M. 136 Fig. i. Text. [XVI u. 428 S.] 1905 geb. n. ℳ 10.—
- II. — Graphische Statik. 2. Aufl. Mit 176 Fig. im Text. [XII u. 471 S.] 1903. geb. n. ℳ 10.—
- III. — Festigkeitslehre. 3. Aufl. Mit 83 Fig. im Text. [XVI u. 434 S.] 1905 geb. n. ℳ 10.—
- IV. — Dynamik. 2. Aufl. Mit 69 Fig. im Text. [XV u. 506 S.] 1901 geb. n. ℳ 12.—

Fuhrmann, Geheimer Hofrat, Dr. **A.,** Professor an der Königl. Technischen Hochschule zu Dresden, Aufgaben aus der analytischen Mechanik. Übungsbuch und Literaturnachweis für Studierende der Mathematik, Physik, Technik usw. In zwei Teilen. gr. 8. Erster Teil: Aufgaben aus der analytischen Statik fester Körper. Mit 34 in den Text gedruckten Figuren. 3., vermehrte und verbesserte Auflage. [XII u. 206 S.] 1904. geb. n. ℳ 3.60. Zweiter Teil: Aufgaben aus der analytischen Dynamik fester Körper. 2., verbesserte und vermehrte Auflage. [VI u. 222 S.] 1882. geb. n. ℳ 4.20.

Gans, Dr. **Richard,** Privatdozent an der Universität Tübingen, Einführung in die Vektoranalysis. Mit Anwendungen auf die mathematische Physik. Mit 31 Figuren im Text. [X u. 98 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. ℳ 2.80.

Heffter, Dr. **L.,** Professor an der Universität Kiel, und Dr. **C. Koehler,** Professor an der Universität Heidelberg, Lehrbuch der analytischen Geometrie. I. Band: Geometrie in den Grundgebilden erster Stufe und in der Ebene. Mit 136 Figuren im Text. [XVI u. 528 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. ℳ 14.—

Jahnke, Dr. **E.,** etatsmäßiger Professor an der Königl. Bergakademie zu Berlin, Vorlesungen über die Vektorenrechnung. Mit Anwendungen auf Geometrie, Mechanik und mathematische Physik. Mit 32 Figuren im Text. [XII u. 235 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. ℳ 5.60.

Klein, Geheimer Regierungsrat Dr. **F.,** und Dr. **E. Riecke,** Professoren an der Universität Göttingen, neue Beiträge zur Frage des mathematischen und physikalischen Unterrichts an höheren Schulen. Vorträge, gehalten bei Gelegenheit des Ferienkurses für Oberlehrer der Mathematik und Physik, Göttingen, Ostern 1904. Enthaltend Beiträge der Herren O. Behrendsen, E. Bose, E. Götting, F. Klein, E. Riecke, F. Schilling, J. Stark, K. Schwarzschild. gr. 8. 1904. Teil I. Mit 6 Figuren im Text. [VIII u. 190 S.] geh. n. ℳ 3.60. Teil II. Mit 151 Figuren und 5 Doppeltafeln. [VI u. 198 S.] geh. n. ℳ 4.60, geb. n. ℳ 5.— Beide Teile in einen Band geb. n. ℳ 8.60.

Kohlrausch, Wirkl. Geh. Oberregierungsrat, Prof. Dr. **F.,** in Marburg, Lehrbuch der praktischen Physik. Zehnte, vermehrte Auflage des Leitfadens der praktischen Physik. Mit zahlr. Figuren im Text. [XXVIII u. 656 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. ℳ 9.—

Leibniz, G. W., nachgelassene Schriften physikalischen, mechanischen und technischen Inhalts. Herausgegeben und mit erläut. Anmerk. versehen von Dr. E. GERLAND, Professor an der Kgl. Bergakademie in Klausthal. Mit 200 Figuren im Text. A. u. d. T.: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. XXI. Heft. [VI u. 256 S.] gr. 8. 1906. geh. n. ℳ 10.—

Müller, Dr. Felix, Professor in Friedenau, früher Mitherausgeber des Jahrbuches über die Fortschritte der Mathematik, Mitglied der Kaiserl. Leopold. Akademie, Karl Schellbach. Rückblick auf sein wissenschaftliches Leben. Nebst zwei Schriften aus seinem Nachlaß und Briefen von Jacobi, Joachimsthal und Weierstraß. Mit einem Bildnis Karl Schellbachs. A. u. d. T.: Abhandlungen zur Geschichte der mathem. Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. XX. Heft. [86 S.] gr. 8. 1905. geh. n. ℳ 2.80.

Netto, Dr. Eugen, Professor an der Universität Gießen, elementare Algebra. Akademische Vorlesungen für Studierende der ersten Semester. Mit 19 Figuren im Text. [VIII u. 200 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. geb. n. ℳ 4.40.

Nielsen, Dr. Niels, Dozent der reinen Mathematik an der Universität Kopenhagen, Inspektor des mathematischen Unterrichts an den Gymnasien Dänemarks, Handbuch der Theorie der Gammafunktion. [X u. 326 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. ℳ 12.—

——— Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen. [XIV u. 408 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. geb. n. ℳ 14.—

Osgood, Dr. W. F., Professor an der Harvard-Universität, Cambridge, Mass., V. St. A., Lehrbuch der Funktionentheorie. In 2 Bänden. I. Band. 1. Hälfte. Mit zahlreichen Figuren im Text. [306 S.] gr. 8. 1906. geh. n. ℳ 7.—. [Die 2. Hälfte des I. Bandes wird im Herbst 1906 erscheinen.]

Pockels, Dr. F., Professor an der Universität Heidelberg, Lehrbuch der Kristalloptik. Mit 168 Figuren im Text und 6 Doppeltafeln. [X u. 519 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. ℳ 16.—

Poincaré, Henri, Membre de l'Institut, Wissenschaft und Hypothese. Autorisierte deutsche Ausgabe mit erläuternden Anmerkungen von F. und L. Lindemann. [XVI u. 342 S.] 8. 1904. In Leinw. geb. n. ℳ 4.80. (2. Auflage unter der Presse.)

——— der Wert der Wissenschaft. Autorisierte deutsche Ausgabe von E. Weber. Mit Anmerkungen von H. Weber in Straßburg i. E. [ca. 240 S.] 8. In Leinw. geb. (Erscheint im März 1906.)

Reformvorschläge für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Entworfen von der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte. Nebst einem allgemeinen Bericht über die bisherige Tätigkeit der Kommission von Professor A. GUTZMER in Halle a. S. [IV u. 48 S.] gr. 8. 1905. geh. n. ℳ 1.—

Rogel, Fr., Dozent am Technikum in Limbach i. S., das Rechnen mit Vorteil. Eine gemeinfaßliche durch zahlreiche Beispiele erläuterte Darstellung empfehlenswerter Vorteile und abkürzender Verfahren. [IV u. 38 S.] gr. 8. 1905. geh. n. ℳ —.80.

Schüssler, Dr. Rudolf, Professor an der Technischen Hochschule zu Graz, orthogonale Axonometrie. Ein Lehrbuch zum Selbststudium. Mit 29 Figurentafeln in besonderem Hefte. [VIII u. 170 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. ℳ 7.—

Serret-Harnack, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. 3 Bände. gr. 8. [Von der 3. Aufl. an hat Prof. G. SCHEFFERS in Darmstadt die Neubearbeitung übernommen.]

Einzeln:

I. Band: Differentialrechnung. 3. Aufl. besorgt von Dr. G. SCHEFFERS, Professor an der Technischen Hochschule zu Darmstadt. Mit Figuren im Text. [ca. 600 S.] geh. ca. n. ℳ 10.—, in Leinw. geb. ca. n. ℳ 11.— [Erscheint im Frühjahr 1906.]

II. Band: Integralrechnung. 2. durchgesehene Auflage, mit Unterstützung von H. LIEBMANN und E. ZERMELO, herausgegeben von Dr. G. BOHLMANN, Professor in Berlin. [XII u. 428 S.] 1899. geh. n. ℳ 8.—, in Leinw. geb. n. ℳ 9.—

III. Band: Differentialgleichungen und Variationsrechnung. 2. durchgesehene Auflage von Dr. G. BOHLMANN, Professor in Berlin, und E. ZERMELO, Privatdozent an der Universität Göttingen. Mit 33 Fig. im Text. [XII u. 480 S.] 1904. geh. n. ℳ 9.—, in Leinw. geb. n. ℳ 10.—

Simon, Dr. **Max**, Professor an der Universität Straßburg i. E., über die Entwicklung der Elementar-Geometrie im XIX. Jahrhundert. Bericht erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. A. u. d. T.: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Ergänzungsband I. Mit 28 Figuren im Text. [ca. VIII u. 252 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb.

——— Methodik der elementaren Arithmetik in Verbindung mit algebraischer Analysis. Mit 9 Textfiguren. [VI u. 108 S.] gr. 8. 1906. geb. n. ℳ 3.20.

Starke, Dr. **H.**, Privatdozent in Berlin, experimentelle Elektrizitätslehre. Mit besonderer Berücksichtigung der neueren Anschauungen und Ergebnisse dargestellt. Mit 275 in den Text gedr. Abb. [XIV u. 422 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. geb. n. ℳ 6.—

Staude, Dr. **Otto**, Professor an der Universität Rostock, analytische Geometrie des Punktes, der geraden Linie und der Ebene. Ein Handbuch zu den Vorlesungen und Übungen über analytische Geometrie. Mit 387 Figuren im Text. [VIII u. 447 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. ℳ 14.—

Stolz, Dr. **Otto**, weil. Professor an der Universität Innsbruck, und Dr. **J. Anton Gmeiner**, Professor an der deutschen Universität Prag, Einleitung in die Funktionentheorie. Zweite, umgearbeitete und vermehrte Auflage der von den Verfassern in der „Theoretischen Arithmetik" nicht berücksichtigten Abschnitte der „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik" von O. Stolz. Mit 21 Figuren im Text. [X u. 598 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. ℳ 15.—

Auch in 2 Abteilungen:

I. Abteilung. Mit 10 Figuren im Text. [VI u. 242 S.] 1904. In Leinw. geb. n. ℳ 6.—

II. — Mit 11 Figuren im Text. [VIII u. S. 243—612.] 1905. In Leinw. geb. n. ℳ 9.—

Thomae, **J.**, Geheimer Hofrat und Professor an der Universität Jena, Sammlung von Formeln und Sätzen aus dem Gebiete der elliptischen Funktionen nebst Anwendungen. [IV u. 44 S.] 4. 1905. kart. n. ℳ 2.80.

——— Grundriß einer analytischen Geometrie der Ebene. Mit 8 Figuren im Text. [X u. 183 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. ℳ 3.60.

Thomson, **J. J.**, D. Sc. Lld. Ph. D. Er. S. Fellow etc., Elektrizitäts-Durchgang in Gasen. Deutsche autor. Ausgabe unter Mitwirkung des Autors besorgt und ergänzt von Dr. E. Marx, Privatdozent an der Universität Leipzig. In 3 Lieferungen. gr. 8. I. Lfg. Mit 54 Textfiguren. [S. 1—216.] 1905. geh. n. ℳ 6.— II. Lfg. Mit 63 Textfiguren. [S. 217—435.] 1906. geh.

[Die 3. (Schluß-) Lieferung erscheint im März 1906.]

Vahlen, Dr. **Karl Theodor**, Professor an der Universität Heidelberg, abstrakte Geometrie. Untersuchungen über die Grundlagen der Euklidischen und Nicht-Euklidischen Geometrie. Mit zahlreichen Figuren im Text. [XII u. 302 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. ℳ 12.—

Verhandlungen des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg, vom 8. bis 13. August 1904. Herausgegeben von dem Schriftführer des Kongresses Dr. A. Krazer, Professor an der Technischen Hochschule zu Karlsruhe. Mit einer Ansicht von Heidelberg in Heliogravüre. [X u. 756 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. ℳ 18.—

Vivanti, **G.**, Professor an der Universität Messina, Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen. Umarbeitung unter Mitwirkung des Verfassers deutsch hrsg. von Dr. A. Gutzmer, Professor an der Universität Halle a. S. [VI u. 512 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. ℳ 12.—

Wallentin, Dr. **J.**, Regierungsrat und Landesschulinspektor in Wien, Einleitung in die theoretische Elektrizitätslehre. Mit 81 Figuren im Text. [X u. 444 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. geb. n. ℳ 12.—

Weber, Dr. **H.**, Professor in Straßburg, und Dr. **J. Wellstein**, Professor in Straßburg, Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende. In 3 Bänden. gr. 8. I. Band. Elementare Algebra und Analysis. 2. Auflage. Mit 38 Textfiguren. [XVIII u. 539 S.] 1906. In Leinw. geb. n. ℳ 9.60. II. Band. Elemente der Geometrie. Bearbeitet von H. Weber, J. Wellstein und W. Jacobsthal. Mit 280 Textfiguren. [XII u. 604 S.] 1905. In Leinw. geb. n. ℳ 12.—. (Bd. III. Anwendungen der Elementarmathematik. Unter d. Presse.)

Wien, Dr. **W.**, Professor an der Universität Würzburg, über Elektronen. Vortrag gehalten auf der 77. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte in Meran. [28 S.] gr. 8. 1905. geh. n. ℳ 1.—

Hierzu Beilagen von **B. G. Teubner** in Leipzig, die wir der Beachtung unserer Leser bestens empfehlen.

JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN
MATHEMATIKER-VEREINIGUNG

IN MONATSHEFTEN HERAUSGEGEBEN VON

A. GUTZMER

IN HALLE A. S.

15. BAND. 3. UND 4. (DOPPEL-)HEFT. MÄRZ/APRIL.

AUSGEGEBEN AM 21. APRIL 1906.

LEIPZIG.

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1906.

JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG.

IN MONATSHEFTEN HERAUSGEGEBEN VON A. GUTZMER IN HALLE A. S.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

☞ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Bücher usw.) sind an

Prof. Dr. A. Gutzmer in Halle a. S., Martinsberg 8,

zu richten.

☞ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich: von größeren Aufsätzen 25 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen und Mitteilungen 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☞ Jeder Band des Jahresberichts in Monatsheften umfaßt vom 12. Bande ab 38 Bogen (= 608 Druckseiten) und kostet für Mitglieder der Vereinigung, Porto inbegriffen, Mark 14.70, für Nichtmitglieder Mark 18.—. Mitglieder haben ihr Abonnement bei der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig, Poststraße 3, aufzugeben, Nichtmitglieder dagegen bei einer Sortimentsbuchhandlung.

☞ Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung zählt z. Zt. über 660 Mitglieder. Der jährliche Mitgliedsbeitrag beträgt 2 Mark, kann aber auch durch einmalige Zahlung von 30 Mark abgelöst werden. Beitrittserklärungen nimmt der Schriftführer der Vereinigung, Prof. Dr. A. Krazer, Karlsruhe in Baden, Westendstraße 57, oder die oben genannte Verlagsbuchhandlung entgegen. Die Ablösungssumme bezw. der Jahresbeitrag ist an die Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig einzusenden.

INHALT DES VORLIEGENDEN (DOPPEL-)HEFTES.

Elementare Mengenlehre.

Von H. Weber in Straßburg.

Einleitung.

Ich erinnere mich eines Gespräches, das ich vor Jahren mit meinem Freunde Dedekind bei einem Spaziergang in der Umgebung von Harzburg geführt habe. Es handelte sich um seine Auffassung der Irrationalzahlen und meinen Vorschlag, unter einer irrationalen Zahl nicht *etwas neu Erschaffenes,* sondern geradezu den entsprechenden *Schnitt* in den rationalen Zahlen zu verstehen, während seine Meinung war, daß zur Bildung des Begriffes der Irrationalzahlen außer der Einteilung der rationalen Zahlen durch den Schnitt noch etwas hinzukommen müsse, was die Irrationalzahl als selbständiges Wesen erschafft. „Wir sind göttlichen Geschlechtes“ sagte er, „und darum ist unsere geistige Tätigkeit schöpferisch.“

Diese Worte, haben mir einen nachhaltigen Eindruck gemacht, und ich habe sie seitdem in unzähligen anderen Fällen bewährt gefunden. Diese Schöpfungen unseres Geistes nennen wir *Ideen*; oder mit einem gemeinverständlichen Ausdruck *Gattungsbegriffe.* Der Kenner der alten Philosophie wird darin vielleicht eine Verwandtschaft mit der Lehre Platos finden.[1]) Diese Ideen sind etwas anderes als nur die Gesamtheit ihrer Einzeldinge; unser Geist erschafft sich etwas Neues dazu, ein *Idealbild,* was allen Einzeldingen als Muster dient.

Dieses Idealbild ist durchaus nur in meinem Geiste enthalten und ehe ich es mir zum Bewußtsein gebracht habe, existiert es nicht.

Wir können uns beliebig viele Zahlen, aber keine letzte vorstellen. Immerhin ist die größte Zahl, die ich mir je gedacht habe oder die das Menschengeschlecht in absehbarer Zeit denkt, immer noch endlich. Wir können uns kein Ende des Raumes oder der Zeit vorstellen, wiewohl jeder bestimmte Raum und jede bestimmte Zeit endlich sind. Auf diese Weise entsteht in uns die *Idee des Unendlichen.* In gleicher

---

1) Man sehe z. B. W. Windelband, Plato, Frommanns Klassiker der Philosophie.

Weise bildet sich die *Idee des absoluten Raumes* und der *absoluten Zeit* aus den mannigfaltigen Arten der Raum- und Zeitmessung, die uns die Objekte und die Erfahrungen der Außenwelt bieten. So entstehen die geometrischen Vorstellungen von Punkt, Linie, Flächen usw.[1])

Es ist noch hinzuzufügen, daß wir für den *praktischen Gebrauch* mit der reinen Idee nichts anfangen können, sondern daß man jeweils nach Bedürfnis bald den einen, bald den anderen *„Repräsentanten“* der Idee oder Gattung herausgreift. Wir nehmen für den Punkt etwa eine kleine Kugel, für das Unendliche eine hinlänglich große Zahl an.

Der *Ausbau* der *Idee des Unendlichen* ist Gegenstand der modernen Mengenlehre, die ich die *transzendente Mengenlehre* nennen möchte. Die Kritik der Grundlagen der Geometrie und Mechanik ist gegenwärtig auf allen Seiten damit beschäftigt, die Ideen von Raum und Zeit zu untersuchen. Überall sind noch Schwierigkeiten zu überwinden und Dunkelheiten aufzuklären, und ich zweifle, ob wir hier jemals zu einem befriedigenden Abschluß kommen können.

In diesem Aufsatze, dem ich den Titel *„Elementare Mengenlehre“* gegeben habe, beschäftige ich mich nur mit *endlichen Mengen* und suche aus ihnen den *Begriff der Zahl* abzuleiten.

Ich stütze mich dabei auf die alleralltäglichste Erfahrung, die uns derartige Mengen gibt, z. B. die Finger der Hand, ein Sack Kartoffeln, ein Regiment Soldaten. Auch die Möglichkeit der *Ordnung* ist nur durch die gemeine Erfahrung gegeben, wenn z. B. die Finger nebeneinander liegen, oder die Kartoffeln in langer Reihe ausgebreitet oder gewogen werden, oder die Soldaten in Reih und Glied aufgestellt sind. Auch die Tatsache, daß eine Menge *Teile* haben kann, entnehme ich dieser Erfahrung, und will nun versuchen, aus diesen Erfahrungstatsachen die *Idee der Zahl* herzuleiten. Der Kernpunkt ist dabei der Satz von der *vollständigen Induktion.*

§ 1.

Geordnete Mengen.

1. *Eine Menge heißt geordnet, wenn durch irgend eine Festsetzung bestimmt ist, welches von zwei verschiedenen Elementen dieser Menge das größere und welches das kleinere sein soll, und wenn diese Ordnung für drei Elemente a, a', a'' der Menge die Folge hat, daß, wenn a kleiner als a', a' kleiner als a'' ist, auch a kleiner als a'' ist.*

Eine Menge, die so geordnet werden kann, heißt *ordnungsfähig.*

---

1) Vgl. Weber-Wellstein, Enzyklopädie der Elementarmathematik Bd. II. Nachtrag zu den Grundlagen der Geometrie.

Zur Erläuterung dieser Definition mache ich folgende Bemerkungen:

Die Worte „größer“ und „kleiner“ sind nur der Kürze wegen gewählt; man könnte ebensogut „früher“ und „später“, „höher“ und „tiefer“, „weiter rechts“ und „weiter links“ und irgend ähnliche Ausdrücke brauchen. An ein physisches Größer und Kleiner braucht dabei nicht gedacht zu werden.

Über die Bezeichnung sei noch bemerkt:

Bedeutet A eine Menge und a, a' zwei ihrer Elemente, so bedeuten

(1) $$a < a', \quad a' > a$$

dasselbe, nämlich a ist kleiner als a', a' ist größer als a. Ist a'' ein drittes Element von A, so sollen

$$a < a', \quad a' < a''$$

die Beziehung

$$a < a''$$

zur Folge haben. In diesen Formeln ist das, was man *Größencharakter der Ordnung* nennt, enthalten.

Ist A eine Menge ohne Rücksicht auf eine Ordnung, so wollen wir unter A dieselbe Menge mit einer *bestimmten Ordnung* verstehen.

Daß es Mengen gibt, die geordnet werden können, und auf mehrfache Weise, zeigt die Erfahrung, z. B. die fünf Finger der Hand, Punkte einer geradlinigen Strecke etc. Damit begnügen wir uns. Die Frage, ob es auch Mengen gibt, die nicht geordnet werden können, schieben wir der *transzendenten Mengenlehre* zu, und lassen sie hier unerörtert.

2. *Eine Menge B heißt ein Teil einer Menge A, wenn jedes Element b von B zugleich ein Element von A ist; B heißt ein echter Teil von A, wenn wenigstens ein Element in A existiert, das nicht in B enthalten ist.*

3. *Ist A' ein Teil von A und A'' ein Teil von A', so ist auch A'' ein Teil von A.* Wenn A' ein echter Teil von A, oder A'' ein echter Teil von A' (oder beides) ist, so ist auch A'' ein echter Teil von A.

Ist B ein echter Teil von A, so gehört jedes Element und nur ein solches, das in A, aber nicht in B enthalten ist, einer Menge C an, die wir die *Ergänzung* von B zu A nennen.

Wir setzen, um dies Verhältnis anzudeuten:

$$A = B + C \quad \text{oder} \quad A = C + B.$$

Es ist auch C ein echter Teil von A, und B ist die Ergänzung von C. Eine Menge, die nur aus einem einzigen Element besteht, hat keinen echten Teil. Die Erfahrung gibt uns aber Beispiele von Mengen mit echten Teilen, z. B. eine Menge von zwei Elementen.

Sind B und C zwei Mengen, so können wir eine mit $A = B + C$ zu bezeichnende Menge bilden, in die wir ein Element dann und nur dann aufnehmen, wenn es entweder in B oder in C (oder auch in beiden) vorkommt. Gibt es kein Element, das zugleich in B und in C enthalten ist, so sind B und C echte Teile von A und die Ergänzungen voneinander.

4. *Jeder Teil einer ordnungsfähigen Menge ist ordnungsfähig.*

Ist nämlich A eine geordnete Menge und B ein Teil von A, so ist auch B geordnet, wenn wir festsetzen, daß irgend zwei Elemente b, b' von B dieselbe Größenbeziehung zueinander haben, die ihnen in A zukommt. Wir sagen dann, *B ist nach $\bar{A}$ geordnet.*

5. *Sind $\bar{B}$ und C geordnete Mengen, die keine gemeinschaftlichen Elemente haben, so ist auch $A = B + C$ ordnungsfähig.*

Gehören nämlich zwei verschiedene Elemente a und a' von A zu demselben Teil, z. B. zu B, so sollen sie in A ebenso wie in $\bar{B}$ geordnet sein (α).

Gehört aber a zu B und a' zu C, so soll $a < a'$ sein (β).

Um nachzuweisen, daß bei dieser Anordnung von A der Größencharakter gewahrt bleibt, seien a, a', a'' drei verschiedene Elemente von A, und es sei nach der getroffenen Ordnung in $\bar{A}$

(1) $$a < a', \quad a' < a''.$$

Es ist zu beweisen, daß daraus

(2) $$a < a''$$

folgt. Wir haben hierbei vier Fälle zu unterscheiden:

1. *a gehört zu C;* dann gehören auch a' und a'' zu C (wegen (β)) und daraus folgt (2) nach der in $\bar{C}$ festgesetzten Ordnung.

2. *a gehört zu B, a' zu C;* dann gehört wieder a'' (wegen (1) und (β)) zu C und folglich ist (2) nach (β) befriedigt.

3. *a gehört zu B, a' zu B, a'' zu C;* dann folgt wieder (2) aus (β).

4. *a'' gehört zu B;* dann müsssn a und a' ebenfalls zu B gehören, und (2) folgt aus der Ordnung in $\bar{B}$.

Bei der durch (α) und (β) ausgedrückten Ordnung in A sagen wir A sei nach $(\bar{B}, \bar{C})$ geordnet. Ebenso können wir auch die Ordnung nach $(\bar{C}, \bar{B})$ vornehmen.

§ 2.

Endliche Mengen.

1. Wenn in einer geordneten Menge $\bar{A}$ ein Element a_0 vorkommt, das die Eigenschaft hat, daß für *jedes* von a_0 verschiedene Element a aus A

(1) $$a_0 < a$$

ist, so ist a_0 das *kleinste Element* in $\bar{A}$. *Es kann nicht mehr als ein kleinstes geben*, denn wäre a_0' ein zweites, so wäre nach (1) $a_0 < a_0'$, und es könnte nicht zugleich $a_0' < a_0$ sein.

Ebenso ist ein Element a_1 aus $\bar{A}$ das *größte*, wenn für jedes von a_1 verschiedene Element a

$$a < a_1$$

ist. Es kann auch höchstens *ein größtes geben.*

2. *Eine Menge A heißt endlich, wenn sie ordnungsfähig ist und wenn sie bei jeder möglichen Ordnung ein größtes und ein kleinstes Element hat.*[1])

Unsere Definition 2. verlangt von einer endlichen Menge, daß es immer ein größtes und ein kleinstes Element geben soll, aber *wohlverstanden*, diese Eigenschaft muß nicht bloß einer, sondern *jeder möglichen Ordnung der Elemente von A* zukommen.

Daß der Begriff der endlichen Menge, wie wir ihn hier definiert haben, nichts Widersprechendes hat, lehrt die Erfahrung.

Eine Menge, die aus einem einzigen Element besteht, ist geordnet. Denn da es kein zweites Element gibt, so kann die Frage, welches das größere sei, nicht entstehen. Das eine Element ist dann zugleich das größte und das kleinste.

Eine Menge, die aus zwei Elementen, z. B. den Zeichen + — besteht, kann auf zwei Arten geordnet werden;

$$+ < - \quad \text{oder} \quad - < +,$$

aber nicht noch auf eine dritte. Bei der ersten Ordnung ist + das kleinste, — das größte, bei der zweiten umgekehrt. Die elementarste Erfahrung gibt uns also Beispiele von endlichen Mengen.

Wenn eine endliche geordnete Menge $\bar{A}$ aus mehr als zwei Elementen besteht, so gibt es außer dem größten und dem kleinsten a_0 und a_1 noch wenigtens eines, a, das der Bedingung $a_0 < a < a_1$ genügt. Ein solches heißt ein *inneres Element.*

3. *Jeder Teil einer endlichen Menge ist eine endliche Menge.*

Zum Beweise sei B ein echter Teil von A, und C seine Ergänzung, also $A = B + C$. Nach § 1, 4. können B und C geordnet werden. Es sei $\bar{B}$ irgend ein geordnetes B, und $\bar{C}$ ein geordnetes C. Nun gibt es, weil A endlich ist, in dem nach $(\bar{C}, \bar{B})$ geordneten $\bar{A}$ ein größtes Element a_1 und in dem nach $(\bar{B}, \bar{C})$ geordneten $\bar{A}$ ein kleinstes

---

1) Es wäre vielleicht treffender, eine solche Menge *„geschlossen"* zu nennen. Der Ausdruck *„endliche Menge"* ist aber schon gebräuchlich und soll daher beibehalten werden.

Element a_0. Es ist dann a_1 das größte Element in B; denn erstens gehört es zu B (§ 1, 5. (β)), und daß es in B kein größeres Element als a_1 gibt, folgt aus § 1, 5 (α). Ebenso folgt aus der Ordnung (B, C), daß a_0 das kleinste Element von $\overline{B}$ ist. Folglich hat $\overline{B}$ ein größtes und ein kleinstes Element und B ist endlich.

4. *Sind B und C zwei endliche Mengen ohne gemeinsames Element, so ist auch die aus beiden zusammengesetzte Menge*

$$A = B + C$$

endlich.

Denn erstens ist A nach § 1, 5. ordnungsfähig. Es sei also $\overline{A}$ in beliebiger Weise geordnet und $\overline{B}$ und $\overline{C}$ seien nach $\overline{A}$ geordnet. Da nach Voraussetzung B endlich ist, so gibt es in $\overline{B}$ ein kleinstes und ein größtes Element b_0 und b_1, und ebenso gibt es in $\overline{C}$ ein kleinstes und ein größtes Element c_0 und c_1. Es sei nun nach der in $\overline{A}$ bestehenden Ordnung etwa $b_0 < c_0$, dann ist jedes von b_0 verschiedene Element a in $\overline{A}$ größer als b_0; denn gehört a zu B, so ist $b_0 < a$, weil b_0 das kleinste Element von B ist, und gehört a zu C, so ist $a = c_0 > b_0$ oder $a > c_0 > b_0$; demnach ist b_0 das *kleinste Element* in A. Ebenso ist, wenn $b_0 > c_0$ ist, c_0 das *kleinste Element* in $\overline{A}$. Auf die gleiche Weise kann man zeigen, daß entweder b_1 oder c_1 das *größte Element* in A ist. Es hat also A bei jeder Ordnung $\overline{A}$ ein größtes und ein kleinstes Element und ist folglich *endlich*.

5. *Schnitt.* Ist $\overline{A}$ eine geordnete endliche Menge von mehr als zwei Elementen und a ein inneres Element, so erzeugt a zwei Schnitte in A in folgender Weise: Man nehme in B jedes Element auf, das *kleiner* als a ist und in C jedes Element, das größer als a ist. Das Element a selbst nehme man entweder zu B oder zu C. Jede dieser Einteilungen heißt ein *Schnitt in* A und a das ihn *erzeugende Element*. Man setze:

$$A = B_a + C, \tag{1}$$

wenn a zu B genommen ist, und

$$A = B + C_a, \tag{2}$$

wenn a zu C gehört. Wir setzen noch, um auch das größte und kleinste Element zu berücksichtigen:

$$B_{a_0} = a_0, \quad C_{a_0} = A \tag{3}$$

$$B_{a_1} = A, \quad C_{a_1} = a_1. \tag{4}$$

Diese Zeichen sollen auch in dem Fall, daß A nur aus einem oder aus zwei Elementen besteht, ihre Bedeutung behalten.

Ordnen wir B_a und C und B und C_a nach A und nennen b das größte Element von B, c das kleinste Element von C, so ist

$$(5) \qquad b < a < c$$

und zwischen b und a und ebenso zwischen a und c liegt kein Element aus a, denn jedes etwa vorhandene von a, b, c verschiedene Element von A wäre entweder $< b$ (wenn es zu B gehört) oder $> c$ (wenn es zu C gehört). Damit ist bewiesen:

6. *In jeder geordneten endlichen Menge $\bar{A}$ von mehr als zwei Elementen gibt es zu jedem inneren Element a ein zunächst gelegenes kleineres Element b und ein zunächst gelegenes größeres Element c.*

Die Elemente b und c heißen die *Nachbarelemente* von a.

Zu dem kleinsten Elemente a_0 von A gibt es nur ein größeres und zu a_1 nur ein kleineres Nachbarelement, und dies gilt auch noch für Mengen von zwei Elementen. Sind b und c die Nachbarelemente von a, so ist a das größere Nachbarelement von b und das kleinere Nachbarelement von c.

7. *Der Satz von der vollständigen Induktion:*

Ein allgemeiner, auf jedes Element der geordneten endlichen Menge $\bar{A}$ anwendbarer Satz $\mathfrak{A}$ ist als vollständig bewiesen anzusehen, wenn es gelingt, die beiden folgenden Punkte darzutun:

1. $\mathfrak{A}$ gilt für das kleinste Element a_0 in $\bar{A}$.

2. Wenn $\mathfrak{A}$ für irgend ein Element b in $\bar{A}$ gilt, so gilt $\mathfrak{A}$ auch für das größere Nachbarelement a von b.

Angenommen, es sei $\mathfrak{A}$ nicht für alle Elemente von A richtig, so bilden wir eine Teilmenge C von A, in die wir jedes Element aufnehmen, für das $\mathfrak{A}$ nicht gilt. Die Menge $\bar{C}$ ordnen wir nach $\bar{A}$ und bezeichnen mit c das *kleinste Element* von C. Nach der Voraussetzung 1. ist c von a_0 verschieden und hat folglich ein kleineres Nachbarelement a, für das der Satz $\mathfrak{A}$ gilt, weil a nicht zu C gehört. Dann ist aber nach 2. $\mathfrak{A}$ auch richtig für c, und es kann folglich die Menge C nicht existieren.

§ 3.

Abbildung und Äquivalenz.

1. Wenn ich in der Folge von zwei endlichen Mengen A und B spreche, soll immer darunter verstanden sein, daß sie *keine gemeinschaftlichen Elemente* haben. Es ist dadurch nicht ausgeschlossen, daß in A und B Elemente vorkommen, die objektiv identisch sind; wir wollen nur übereinkommen, sie als verschieden zu bezeichnen, je nachdem sie

zu A oder zu B gehören. Es könnte in diesem Sinne selbst B ein Teil von A oder mit A dem tatsächlichen Inhalt nach identisch sein.

2. *Definition.* Zwei endliche Mengen A und A' heißen *äquivalent*, wenn sie so miteinander in Verbindung gedacht werden können, daß *jedes* Element a von A mit *einem* Element a' von A' ein Paar bildet, und daß jedes Element a' von A' in einem und nur in einem dieser Paare vorkommt (z. B. die Finger der rechten und linken Hand). Die Äquivalenz ist also *gegenseitig*. Wir drücken sie in Zeichen so aus:

$$A \sim A', \quad A' \sim A.$$

Sind die die Äquivalenz begründenden Verbindungen zwischen den Elementen von A und A' hergestellt, so sagen wir, A' sei auf A *abgebildet* und nennen zwei verbundene Elemente auch *entsprechende Elemente*.

3. *Sind zwei Mengen A' und A'' mit einer dritten A äquivalent, so sind sie auch untereinander äquivalent.* Denn ist in der Äquivalenz $A' \sim A$ das Element a' mit a verbunden und in $A'' \sim A$ das Element a mit a'', so ist dadurch auch a' mit diesem bestimmten a'' verbunden, und ebenso umgekehrt irgend ein a'' mit einem bestimmten a'.

Denken wir uns im Sinne von Nr. 1 eine Menge A zweimal gesetzt, so können wir sagen, daß jede Menge sich selbst äquivalent ist.

Ist die Menge $\bar{A}$ geordnet, so kann jede äquivalente Menge $\bar{A}'$ gleichfalls geordnet werden, indem man, wenn $a < b$ Elemente von $\bar{A}$ sind, den entsprechenden Elementen a' und b' in A' dieselbe Größenbeziehung gibt. Dem kleinsten und größten Element a_0 und a_1 von $\bar{A}$ entsprechen dann das kleinste und größte Element a_0' und a_1' von $\bar{A}'$. Daraus folgt:

4. *Ist A eine endliche Menge, so ist jede mit A äquivalente Menge gleichfalls endlich.*

Wenn irgend eine Menge M mit einer Menge A und zugleich mit einem Teil A' von A äquivalent ist, so können wir im Sinne von Nr. 1 sagen, daß A mit einem Teil A' von sich selbst äquivalent ist. Es gilt dann der *Hauptsatz:*

5. *Eine endliche Menge A kann nicht mit einem echten Teil von A äquivalent sein.*

Zum Beweis wenden wir die vollständige Induktion an. Sei also $\bar{A}$ irgendwie geordnet, und wir behalten die Bezeichnung von § 2. 5. bei. Der zu beweisende Satz ist dann richtig für die Menge $B_{a_0} = a_0$, denn diese Menge besteht nur aus einem Element und hat keinen echten Teil, ist also auch nicht einem echten Teil von sich selbst äquivalent.

Sei b irgend ein Element von A und $b < a_1$, und es sei unser Satz als richtig erkannt für die Menge B_b, d. h. es sei B_b nicht einem echten Teil von sich selbst äquivalent. Es sei a das größere Nachbarelement von b. Ist dann B_a einem echten Teil B'_a von sich selbst äquivalent, so sind drei Fälle möglich:

1. B'_a enthält nicht das Element a. Das Element a in B_a wird dann einem anderen Element a' in B'_a entsprechen, das zu B_b gehört. Ist dann $B'_a = B'_b + a'$, so ist B'_b ein *echter Teil* von B_b, und da $B_a = B_b + a$ ist, so ist, wenn wir die verbundenen Elemente a, a' aus B_a und B'_a entfernen, eine Abbildung von B_b auf B'_b hergestellt, die nach Voraussetzung nicht möglich ist.

2. B'_a enthält das Element a, und dieses Element entspricht sich selbst in der Abbildung von B_a auf B'_a. Dann ist $B'_a = B'_b + a$ und B'_b ist wieder ein *echter Teil* von B_b, da B'_a ein echter Teil von B_a sein soll. Durch Entfernung des mit sich selbst verbundenen Elementes a ist also wieder eine Abbildung von B_b auf B'_b hergestellt, die nicht möglich sein soll.

3. B'_a enthält das Element a, aber in der Abbildung von B_a auf B'_a entspricht dem a, als Element von B_a gefaßt, das Element a' von B_b, und als Element von B'_a gefaßt, das Element a'' von B_b (a' und a'' können identisch sein, sind aber von a verschieden und daher in B_b enthalten). Ich lasse nun alle Verbindungen in der Abbildung von B_a auf B'_a bestehen mit Ausnahme der Verbindungen aa' und $a''a$. Diese löse ich und verbinde a mit a und a' mit a''. Dann ist wiederum B_a auf B'_a abgebildet, und ich bin auf den Fall 2. zurückgekommen.

Hiermit ist die Aussage $\mathfrak{A}$ über das Element a, nämlich „B_a ist nicht mit einem echten Teil seiner selbst äquivalent" erwiesen für a_0, ferner für a, unter der Voraussetzung, daß sie für b gilt. Es sind also die Voraussetzungen der vollständigen Induktion erfüllt, und der Satz ist also auch richtig für a_1, d. h. für die Menge A selbst.

6. Es seien nun A und M irgend zwei endliche Mengen. Dann gibt es drei Möglichkeiten:

1) A äquivalent mit M,
2) A äquivalent mit einem echten Teil M' von M,
3) M äquivalent mit einem echten Teil A' von A.

Wir wollen nachweisen, daß von diesen drei Möglichkeiten immer nur eine zutreffen kann, daß aber auch eine immer zutreffen muß. Das erste folgt leicht aus dem Satz 5, denn ist $A \sim M$ und $A' \sim M$, so ist auch $A \sim A'$, was nach 5. unmöglich ist, also ist 3. und ebenso 2. durch 1. ausgeschlossen.

Wenn aber $A \sim M'$ ist, so kann nicht $A \sim M$ sein, weil sonst $M \sim M'$ wäre, also ist 1. durch 2. angeschlossen, und ebenso ist es durch 3. ausgeschlossen.

Daß aber auch 2. und 3. nicht zusammen bestehen können, sieht man so ein: Es sei A auf M' abgebildet; dann ist zugleich A' auf einen Teil M'' von M' abgebildet, also $A' \sim M''$, und M'' ist ein echter Teil von M. Wäre nun zugleich $A' \sim M$, so wäre $M \sim M''$, entgegen dem Satze 5.

7. Um nachzuweisen, daß, wenn A und M endliche Mengen sind, immer eines der drei 1) 2) 3) eintreten muß, nehmen wir an, es treffen 1) und 3) nicht zu, es sei also M weder mit A noch mit einem Teil von A äquivalent, und es ist zu zeigen, daß dann A mit einem Teil von M äquivalent sein muß.

Dazu hilft uns wieder die vollständige Induktion. Es seien A und M irgendwie geordnet, und es werden die Bezeichnungen von § 2. 4. 9. beibehalten.

Es ist dann zunächst klar, daß $B_{a_0} = a_0$ auf einen Teil von M, etwa auf das kleinste Element m_0 von M, abbildbar ist.

Es sei B_b auf einen Teil M' von M abgebildet. Es muß dann M' von M verschieden sein, weil nach Voraussetzung M mit keinem Teil von A äquivalent sein soll. Demnach gibt es ein Element m' von M, das nicht in M' enthalten ist. Wir verbinden a mit m' und haben $B_a = B_b + a$ auf $M' + m'$ abgebildet. $M' + m'$ ist aber wieder ein Teil von M und zwar ein echter (nach der Voraussetzung). Es ist also B_a auf einen echten Teil von M abgebildet und damit sind die Voraussetzungen der vollständigen Induktion erfüllt. Setzen wir also $a = a_1$, so folgt, daß A mit einem Teil von M äquivalent ist.

Wir wählen zur Bezeichnung von 1), 2), 3) die Zeichen

$$1)\ A \sim M, \quad 2)\ A \prec M, \quad 3)\ M \prec A$$

oder

$$1)\ M \sim A, \quad 2)\ M \succ A, \quad 3)\ A \succ M.$$

Es ergibt sich unmittelbar, wenn A, B und M endliche Mengen sind:

Ist $B \prec A$ und $A \prec M$, so ist auch $B \prec M$.
Ist $B \succ A$ „ $A \succ M$, „ „ „ $B \succ M$.

§ 4.

Zahlen.

1. Bei der Schaffung des Zahlbegriffs gehe ich aus von einer beliebigen endlichen Menge A und gebe dieser einen Namen oder ein Attribut α, das ich ihre Zahl nenne, und setze dabei fest, daß jede mir etwa vorkommende, *mit A äquivalente Menge* denselben Namen α haben soll, daß aber dieser Name auch *nur* den mit A äquivalenten Mengen zukommen soll.

Gehe ich statt von A von einer mit A äquivalenten Menge A' aus, und gebe dieser den Namen α, so erhält A denselben Namen. Dieses α heißt dann die *gemeinschaftliche Zahl aller mit A äquivalenten Mengen.* Es ist hiernach die Zahl nicht aufzufassen als die *Gesamtheit* oder die *Menge aller* mit A äquivalenten Mengen; denn diese Menge kenne ich nicht. Es ist α die *Idee* der durch A bestimmten *Klasse*, wenn ich irgend zwei äquivalente Mengen als derselben Klasse angehörig bezeichne. Die Bedürfnisse des Lebens zwingen uns zur Bildung dieser Ideen und die einfachsten von ihnen, „eins“, „zwei“, „drei“ sind jedem Kind geläufig und auch im vorhergehenden benutzt.

2. Sind A und B irgend zwei endliche Mengen, und α, β ihre Zahlen, so setzen wir

1) $\alpha = \beta$, wenn $A \sim B$ (α gleich β)
2) $\alpha < \beta$, „ $A \prec B$ (α kleiner als β)
3) $\alpha > \beta$, „ $A \succ B$ (α größer als β).

Die Zahlen sind hierdurch der Größe nach *geordnet* und zwar mit Größencharakter (§ 1. 2).

3. *Ist α irgend eine Zahl, so bilden die Zahlen, die kleiner als α oder gleich α sind, eine endliche Menge von der Zahl α.*

Dies ergibt sich wieder aus der vollständigen Induktion. Wir nehmen eine geordnete endliche Menge A und benutzen die frühere Bezeichnung. Der Satz ist dann richtig für B_{a_0}, dem die Zahl 1 zukommt.

Es sei a ein beliebiges, von a_0 verschiedenes Element, und b sein kleineres Nachbarelement. Die Zahlen von B_a und B_b seien β und β'. Unser Satz sei richtig für B_b; dann hat die Menge der Zahlen, die kleiner als β' oder gleich β' sind, dieselbe Zahl wie B_b, also β', und wir können diese Zahlen auf die Elemente von B_b beziehen. Beziehen wir noch die *Zahl* β auf das *Element* a, so ergibt sich die Richtigkeit des Satzes für B_a und damit also auch für A selbst.

Geben wir dem Element a selbst den Namen der Menge B_a, also β (mit einem Zusatz: das βte), so erhalten wir die *Ordnungszahlen.*

5. Wenn man zwei endliche Mengen B und C ohne gemeinsames Element mit den Zahlen β und γ zu einer neuen Menge A vereinigt, die dann nach § 2. 4. gleichfalls endlich ist, und die Zahl α haben möge, so ist α durch β und γ vollständig bestimmt und man setzt $\alpha = \beta + \gamma$ oder $= \gamma + \beta$. Zugleich ist α größer als β und größer als γ.

Besteht C nur aus einem Element, so hat es die Zahl $\gamma = 1$ und $\alpha = \beta + 1$ ist die *größere Nachbarzahl* zu β.

Durch die vollständige Induktion läßt sich noch der Satz beweisen, der die Grundlage des *Rechnens* ist:

6. *Ersetzt man jedes Element m einer endlichen Menge M durch eine endliche Menge A_m von der Zahl α_m, so entsteht eine neue endliche Menge S. Die Zahl σ dieser Menge ist durch die Zahlen α_m vollständig bestimmt und heißt die Summe der Zahlen α_m.* Daraus ergibt sich die Addition der Zahlen, zugleich mit dem kommutativen und assoziativen Gesetz.

Es tritt hiernach die *Kardinalzahl*, nicht die *Ordinalzahl* als das ursprüngliche auf.

7. Ist a nicht das größte Element von A, so hat es ein größeres Nachbarelement c und wenn B_c von der Zahl β'' ist, so ist (nach Nr. 2)

$$\beta' < \beta < \beta''$$

und zugleich folgt, daß zwischen β' und β und ebenso zwischen β und β'' *keine Zahl* liegt.

Es hat also jede Zahl, mit Ausnahme von 1, eine *kleinere Nachbarzahl*, und so lange eine endliche Menge als Teil einer umfassenderen Menge betrachtet werden kann, hat auch jede Zahl eine *größere Nachbarzahl.* Man bezeichnet die beiden Nachbarzahlen von β mit $\beta - 1$ und $\beta + 1$.

7. Nach Nr. 2 lassen sich die Zahlen zwar mit Größencharakter ordnen, da von irgend zwei verschiedenen Zahlen stets entschieden ist, welche die größere ist. Sie bilden aber *keine endliche Menge;* denn es ist mir keine endliche Menge bekannt, zu der ich nicht durch Hinzufügung eines weiteren Elementes eine neue Menge bilden könnte, die eine größere Zahl hat. Ja ich kann mir die Möglichkeit einer solchen Menge nicht einmal vorstellen, wenn ich auch weiß, daß sie für mich als Individuum einmal erscheinen wird. Hiernach gibt es *keine größte Zahl.*

Die Entwicklung und der gegenwärtige Stand der differentiellen Liniengeometrie.

(Bericht, der Deutschen Mathematiker-Vereinigung erstattet auf der Jahresversammlung in Meran am 27. September 1905).*)

Von K. Zindler in Innsbruck.

Inhalt:

Lehrbücher und Monographien:

Plücker, Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement, I. Abt. 1868, II. Abt. 1869.
Koenigs, Sur les propriétés infinitésimales de l'espace réglé, Thèse, 1882.
Sturm, Liniengeometrie in synth. Behandlung, 3 Bände 1892, 1893, 1896.
Klein, Einleitung in die höhere Geom. (Vorlesung Göttingen), 1893.
Koenigs, La Géométrie réglée, Paris, 1895.
Fano, Lezioni di Geometria della retta, Roma 1896.
Zindler, Liniengeometrie mit Anwendungen, I. Bd. 1902; II. Bd. 1906.
Jessop, A Treatise on the Line Complex, 1903.

---

*) Der mündlich erstattete Bericht beschränkte sich wegen der Fülle des Stoffes auf die Differentialgeometrie der Strahlenkongruenzen.

1. *Ältere Untersuchungen.* Als älteste allgemeine Untersuchung der differentiellen Liniengeometrie und der Liniengeometrie überhaupt können gewisse Abschnitte der Optik von Malus[1]) betrachtet werden.[2]) Er setzt

$$m(z-z')=o(x-x'), \qquad n(z-z')=o(y-y')$$

als Gleichungen einer Geraden an, wobei m, n, o willkürliche Funktionen von x', y', z' sind, ordnet also jedem Punkt $P\equiv(x', y', z')$ des Raumes eine durch ihn gehende Gerade g zu und definiert so einen Linienkomplex. Er sucht zunächst die Nachbarpunkte von P, deren Geraden g schneiden, und findet einen Richtungskegel zweiter Ordnung. Dann beschränkt er sich auf solche Gerade des Komplexes, die von den Punkten einer Fläche

$$F(x', y', z')=0$$

ausgehn, also auf eine allgemeine Strahlenkongruenz und findet, daß jede solche als Ort der Schnitte zweier Systeme abwickelbarer Flächen aufgefaßt werden kann. Er findet auch die Brennflächen, bestimmt die beiden Brennebenen und ihren Winkel, stellt die Bedingung auf, daß sich die beiden Scharen abwickelbarer Flächen überall senkrecht schneiden, oder wie wir jetzt sagen, daß das Strahlensystem ein Normalensystem ist, und fragt nach den Flächen $F=0$, die man einem gegebenen Komplex assoziieren muß, damit das System ein Normalensystem wird; er bekommt eine nicht lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung.

Als „*Theorem von Malus und Dupin*" bezeichnet man den Satz, daß ein Normalensystem durch beliebig viele Reflexionen und Brechungen an Trennungsflächen homogener Medien stets wieder in ein solches übergeht. Malus selbst beweist diesen Satz nur für eine einmalige Brechung (oder Reflexion) solcher Strahlen, die von einem Punkte ausgehn, spricht sogar ausdrücklich die Meinung aus (a. a. O., S. 103), daß der Satz für mehrmalige Brechung nicht mehr gilt. Der Irrtum wurde von Dupin und Cauchy berichtigt.[3])

Gleichfalls durch optische Interessen wurde Hamilton[4]) zur Unter-

1) Optique, Journ. de l'Éc. polyt. T. VII (cah. 14) 1808; S. 1—44 und 84—129.

2) Allerdings hatte schon früher (1796) Monge im Zusammenhang mit der Flächentheorie das Normalensystem einer Fläche untersucht und namentlich bemerkt, daß es sich auf zweierlei Art in ∞^1 abwickelbare Flächen zerlegen läßt (Journ. de l'Éc. polyt. cah. 2). Aber bei Malus treten zum erstenmal Geraden-Mannigfaltigkeiten selbständig auf. Vgl. über ältere liniengeometrische Untersuchungen auch Lie und Scheffers, Geom. d. Berührungstransf. S. 268 ff.

3) Über die Entdeckung des Theorems von Malus und Dupin vgl. Darboux, Théorie des surf. II, S. 280, Note.

4) Transact. of the R. Irish Ac. Vol. XV, 1828 (Theory of Systems of Rays) und Vol. XVI, 1830 (First supplement to an essay on the Theory of Systems of Rays).

suchung der Strahlensysteme geführt. Er stellt sie analytisch dar, indem er die Richtungskosinus α, β, γ eines Strahles als Funktion des Ortes im Raume gibt. Jedoch müssen die Funktionen α, β, γ von x, y, z so beschaffen sein, daß sie sich nicht ändern, wenn man x durch $x + \varrho\alpha$ usw. ersetzt; sie müssen also die Differentialgleichungen erfüllen, die man erhält[5]), wenn man in

$$\alpha\varphi_x + \beta\varphi_y + \gamma\varphi_z = 0$$

für φ der Reihe nach α, β, γ setzt. Ferner erhält man durch Differentiation von $\Sigma\alpha^2 = 1$ Gleichungen, die in Verbindung mit den früheren ergeben:

$$\beta_z - \gamma_y = k\alpha, \quad \gamma_x - \alpha_z = k\beta, \quad \alpha_y - \beta_x = k\gamma,$$

wobei

$$k = \Sigma\alpha(\beta_z - \gamma_y).$$

Für $k = 0$ ist $\Sigma\alpha \cdot dx$ das vollständige Differential einer Funktion V. Dies ist der Fall der Normalensysteme, und dann ist $V = \text{const.}$ die Gleichung der orthogonalen Flächenschar. Hamilton findet die wichtigsten Ergebnisse von Malus nochmals und fügt namentlich die nach ihm benannte Gleichung hinzu, die wir etwas genauer besprechen wollen:

Betrachtet man einen festen Strahl s einer Kongruenz und einen veränderlichen Nachbarstrahl s', den kürzesten Abstand a zwischen beiden und seinen Fußpunkt N auf s und läßt man s' nach s einrücken, so ist die Grenzlage der Ebene (s, a) durch den Winkel α mit einer festen Ausgangsebene durch s bestimmt und die Grenzlage von N durch den Abstand z von einem festen Punkte auf s. Bei passender Wahl der Ausgangsebene stehn nun z und α für alle Regelflächen der Kongruenz in der Beziehung:

$$z = z_1 \cos^2\alpha + z_2 \sin^2\alpha, \qquad (z_1, z_2 \text{ const.}) \tag{1}$$

und dies ist die „Hamiltonsche Gleichung". Auch vergleicht schon Hamilton[6]) die verschiedenen Querschnitte eines und desselben Bündels, das die Umgebung eines Strahles bildet, kommt also Kummers Dichtigkeitsmaß sehr nahe. Schon in der ersten Abhandlung findet er das *Zylindroid* als Ort der kürzesten Abstände eines Strahles von seinen Nachbarstrahlen.

---

5) Vgl. auch Cayley, Proc. of the Lond. Math. Soc. VIII, 1877 oder Coll. P. IX. Nr. 625 und Mess. of Math. (2) XVII, 1887 oder Coll. P. XII, Nr. 876, ferner Bertrand, Mém. sur la Théorie des surf., J. de Math. IX (1844).

6) A. a. O. (Anm. 4) Vol. XVI, S. 59.

Die Entdeckung des Nullsystems und des Strahlengewindes durch Giorgini (1827) und Möbius (1833), so wichtig sie auch ist, betrifft zunächst nicht die *differentielle* Liniengeometrie, ist daher hier nicht zu besprechen. Dagegen ist der Begriff des Verteilungsparameters P eines Strahles einer Regelfläche für die Differentialgeometrie wichtig: Wenn s' ein Nachbarstrahl ist, a der kürzeste Abstand zwischen beiden und ω ihr Winkel, so ist

$$(2) \qquad P = lim \frac{a}{\omega}.$$

Diesen Begriff verdankt man Chasles, ebenso wie die Entdeckung der Korrelation zwischen den Punkten eines Strahles einer Regelfläche und den zugehörigen Berührungsebenen.[7])

Sturm hat in seiner Abhandlung über die Theorie des Sehens[8]) die „unendlich dünnen Strahlenbündel“ betrachtet, d. h. die Umgebung eines Strahles s einer Normalenkongruenz. Eine solche Umgebung ist vollkommen bestimmt, wenn man die beiden Hauptkrümmungshalbmesser einer Normalfläche des Bündels in ihrem Schnittpunkte mit s und die Orientierung der Ebenen der zugehörigen Hauptschnitte um s (ihr Azimut) kennt. Liegt nun eine brechende Fläche vor, so wird der Strahl s in einen anderen s' gebrochen, dessen Umgebung durch die drei analogen Elemente definiert werden kann, und Sturm löst die Aufgabe, diese Elemente zu bestimmen. Dabei beweist er (was schon Monge erkannt hatte), daß die Normalen einer Fläche in der Umgebung eines Punktes P näherungsweise als Treffstrahlen zweier Geraden, der „Brennlinien“ aufgefaßt werden können und sagt (a. a. O. S. 376), daß die Brennlinien die Normale des Punktes P *senkrecht* schneiden. Dies ist aber nicht die einzig mögliche Auffassung, weshalb in dieser Angelegenheit später mehrfach Mißverständnisse aufgetreten sind (7).

2. *Kummers Theorie der Strahlensysteme.* Die Arbeiten von Malus und Hamilton scheinen ziemlich vergessen gewesen zu sein, als Kummer in seiner Abhandlung „Allgemeine Theorie der geradlinigen Strahlensysteme“[9]) die meisten bis dahin bekannten Sätze über Strahlensysteme auf neuem einfachen Wege bewies und in einigen Punkten ergänzte.[10])

7) Sur les surf. engendrées par une ligne droite etc. Corresp. math. et phys. ed. Quetelet (3) III. (Tome XI), 1839.

8) Comptes R. XX, p. 554, 761 et 1238 (1845), übers. in Pogg. Ann. d. Phys. u. Chemie, Bd. 65 (III. Reihe, 5), S. 116—134 u. 374—395.

9) J. f. Math. Bd. 57, 1860.

10) Eine konzise Darstellung der Kummerschen Theorie findet man bei Bianchi, Vorl. über Differentialgeom. (übers. Lukat), Kap. X.

Sein Ausgangspunkt ist der folgende: Man schneide die Strahlenkongruenz durch eine beliebige Fläche F:

$$x(u, v), \quad y(u, v), \quad z(u, v).$$

Dann ist ein Strahl s der Kongruenz bestimmt, wenn sein Schnittpunkt P_0 mit F und seine Richtungscosinus X, Y, Z als Funktionen von u, v bekannt sind. Bezeichnet man

$$\begin{gathered}\Sigma X_u^2 = E, \quad \Sigma X_u X_v = F, \quad \Sigma X_v^2 = G, \\ \Sigma X_u x_u = e, \quad \Sigma X_u x_v = f, \quad \Sigma X_v x_u = f', \quad \Sigma X_v x_v = g\end{gathered} \tag{3}$$

(diese Größen mögen die „Fundamentalgrößen“ Kummers heißen), so spielen hier die beiden Formen

$$\begin{gathered}\Sigma d X^2 = E du^2 + 2 F du\, dv + G dv^2, \\ \Sigma dx dX = e du^2 + (f + f')\, du\, dv + g dv^2\end{gathered} \tag{4}$$

eine analoge Rolle wie die beiden quadratischen Differentialformen der Flächentheorie; die erste stellt das Linienelement der sphärischen Abbildung der Kongruenz dar. Die Gegenstände, die Kummer so behandelt, sind zunächst: Kürzester Abstand von den Nachbarstrahlen, Grenzpunkte[11]), Hauptebenen, Hamiltonsche Gleichung, Brennpunkte, Brennebenen, Mittelpunkt, Brennflächen, Normalensysteme. Das *Dichtigkeitsmaß* des Strahlensystems in einem Punkte P eines Strahles definiert er so: Man lege durch P eine Ebene senkrecht auf s und ziehe in ihr eine kleine geschlossene Kurve um P mit dem Flächeninhalt f. Ihr entspricht vermöge der sphärischen Abbildung des Systems eine Kurve auf der Einheitskugel mit der Fläche φ. Das Dichtigkeitsmaaß ist nun:

$$\lim \frac{\varphi}{f}.$$

Kummer eigentümlich ist der Begriff des Drehungswinkels benachbarter Strahlen s und s_1: Fällt man von zwei Punkten A, B von s_1 auf s die Senkrechten, so heißt ihr Winkel der Drehungswinkel der Strecke AB bezüglich s. Die Untersuchung der Drehungswinkel gipfelt in dem eleganten Satz: Wenn man in zwei Nachbarpunkten einer Fläche die Normalen zieht und ihnen die Länge gibt, in der ihr Drehungswinkel ein rechter ist, so sind sie gleich dem Krümmungshalbmesser desjenigen Normalschnittes der Fläche, der durch die beiden Nachbarpunkte bestimmt ist.

11) Die Definition dieses und einiger folgenden Begriffe in 5.

Die Kummersche Theorie wurde von Gorton[12]) mit Hilfe der Quaternionenlehre dargestellt und von Hensel[13]) vervollkommnet, der die beiden Differentialformen gleichzeitig vom gemischten Gliede befreit. In dieser Theorie wird eine willkürliche Fläche F eingeführt, von der die Eigenschaften der Kongruenz gar nicht abhängen. Man kann dies vermeiden, wenn man die rechtwinkligen homogenen Linienkoordinaten der Strahlen des Systems als Funktionen zweier unabhängiger Parameter gibt

$$q_i = q_i(u, v). \qquad (i = 1, \ldots 6) \tag{5}$$

Diesen Weg hat Zindler[14]) eingeschlagen.

Seit Plückers „Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement" (1868—69) häufen sich die liniengeometrischen Arbeiten so sehr, daß die Einhaltung der zeitlichen Reihenfolge bei der weiteren Besprechung unzweckmäßig wäre.

3. *Die Richtungen im Linienraum.* Wenn man die Gerade durch irgend welche vier von einander unabhängige Koordinaten $u_1, \ldots u_4$ bestimmt, so ist durch die Inkremente $du_1, \ldots du_4$, auf deren Verhältnisse es allein ankommt, eine von dieser Geraden ausgehende Richtung bestimmt. Natürlich läßt sich der Richtungsbegriff auf den Fall überzähliger Koordinaten, wie sie in der Liniengeometrie gewöhnlich verwendet werden, übertragen und tritt so bei Klein[15]) auf, der auch den Winkel zweier Richtungen nach Analogie der Kosinusformel des Punktraums definiert.[16]) Ein Strahl bestimmt mit einem Nachbarstrahl eine Korrelation von Chasles (**1**). Die Theorie der Richtungen steht also in enger Beziehung mit der Theorie der Korrelationen einer Geraden und wird als solche von Koenigs behandelt.[17]) Wenn zwei Korrelationen involutorisch sind, so sagt man, die entsprechenden Richtungen des Linienraumes seien zu einander senkrecht. In der Tat besteht z. B. folgende Analogie: Alle Richtungen, die von einer Geraden eines Komplexes ausgehn und im Komplex enthalten sind, stehn mit einer im Komplex selbst nicht enthaltenen Richtung in Involution[18]) (Analogon der Flächennormale des Punktraumes). Das Analogon zu den dreifach orthogonalen Flächensystemen des Punktraumes existiert auch im Linienraume und heißt Involutionssystem von Komplexen.[19]) Auch Koenigs hat eine „vierfach ortho-

12) Am. J. of Math. X. 13) J. f. Math. Bd. 102, 1888.
14) Liniengeom. Bd II, Abschn. II (1906).
15) Über Liniengeom. u. metr. Geom., § 3 (Math. Ann. V).
16) a. a. O. S. 271, Note. 17) Thèse, I. Partie (1882).
18) Klein, a. a. O. S. 272. 19) ebenda.

gonale Zerlegung" des Linienraumes angegeben[20]), allerdings nicht in reeller Weise.

Zwei Regelflächen bestimmen in einem gemeinsamen Strahl dieselbe Korrelation, wenn sie daselbst den Verteilungsparameter, den Zentralpunkt und die Zentralebene gemein haben. Dann berühren sie sich auch längs der ganzen Erzeugenden, und dies ist der geometrische Inhalt des Richtungsbegriffs. Deshalb können die in **1** eingeführten Größen

$$z, \alpha, P$$

als geometrisch anschaulichste *Richtungskoordinaten* in der Umgebung eines bestimmten Strahles gelten und sind als solche zur Untersuchung der Beschränkungen nützlich, welchen die in einem Komplex oder einer Kongruenz enthaltenen Richtungen unterliegen. Analog nämlich, wie im Raum von einem Punkt ∞^2 Richtungen ausgehn, in einer Fläche jedoch nurmehr ∞^1, so gehn im unbeschränkten Linienraum von einer Geraden ∞^3 Richtungen aus, in einem Komplex nurmehr ∞^2 und in einer Kongruenz ∞^1. Daher müssen für die in einer Kongruenz enthaltenen Richtungen zwischen den drei Richtungkoordinaten z, α, P zwei Relationen bestehn (**5**), für die Richtungen eines Komplexes jedoch nur eine (**14**).

Unter den Richtungen sind die *„schneidenden"* ausgezeichnet, deren repräsentierende Nachbarstrahlen den Ausgangsstrahl s schneiden oder genauer gesprochen, deren Regelflächen in s eine Kuspidalerzeugende haben oder deren Korrelationen singulär sind oder deren Verteilungsparameter P verschwindet. Das analytische Kennzeichen hierfür ist das Verschwinden einer quadratischen Differentialform der du_ν.[21]) Deutet man also die du_ν als homogene Koordinaten eines dreidimensionalen Punktraumes, so ist in der Umgebung eines bestimmten Strahles jede Richtung des Linienraums durch einen Punkt abgebildet, die schneidenden Richtungen durch eine Fläche F zweiter Ordnung. Dabei spielen die durch eine gerade Punktreihe abgebildeten „linearen Richtungsbüschel" eine besondere Rolle[22]) und zwei orthogonale Richtungen werden durch Punkte abgebildet, die bezüglich F konjugiert sind.[23])

4. *Regelflächen.* Die Differentialgeometrie der Regelflächen ist meist nach den Methoden der Flächentheorie entwickelt worden; dies gehört nicht in den Rahmen dieses Berichtes, und es sei nur bemerkt, daß

20) Thèse, S. 74. 21) Koenigs, Thèse, S. 18.

22) ib. S. 23, f. Es macht keinen wesentlichen Unterschied, daß Koenigs die Abbildung einer Richtung dual durch eine Ebene vornimmt.

23) ebenda.

eine reichhaltige Monographie über Regelflächen von Antomari[24]) geschrieben wurde.

Wir haben nur die nach liniengeometrischen Methoden gewonnenen Ergebnisse aufzuzählen: Durch n benachbarte Erzeugende ($n = 2, \ldots 5$) einer Regelfläche ist ein $5-n$-dimensionales lineares Gebiet linearer Komplexe, die sie enthalten, bestimmt. Macht man den Grenzübergang, indem man die Erzeugenden in eine e zusammenrücken läßt, so erhält man sämtliche linearen Komplexe, die in e die Regelfläche von der $n-1$-ten Ordnung berühren. Ihre analytische Darstellung findet sich bei Koenigs.[25]) Die gemeinsamen Strahlen aller dieser Komplexe bilden für $n = 3$ die *Schmiegungsregelschar.* Die Grenzlagen der Transversalen von vier Nachbarerzeugenden heißen *Schmiegungsstrahlen.*[26])

Die Bedingung der *Abwickelbarkeit* einer Regelfläche, die durch drei Gleichungen in Linienkoordinaten gegeben ist, findet sich bei Koenigs[27]), der dort auch untersucht, von welcher Ordnung das Moment zweier Geraden verschwindet, von denen die eine g einer Regelfläche angehört, die andere zu g in einem linearen Komplex konjugiert ist, der die Regelfläche in einer Nachbarerzeugenden von g in bestimmter Ordnung berührt. Das Moment zweier Nachbarerzeugenden einer Regelfläche hat Koenigs als Potenzreihe des Parameters entwickelt.[28]) Aus der nähern Diskussion des Baues dieser Formel kann man folgern[29]), daß der Abstand zweier Nachbarerzeugenden, wenn man das Bogenelement der sphärischen Abbildung als Unabhängige nimmt, stets von ungerader Ordnung verschwindet. Die Bedingung der Abwickelbarkeit einer Regelfläche, deren Linienkoordinaten als Funktionen eines Parameters gegeben sind, hat Klein[30]) mitgeteilt.

Die windschiefen Flächen zweiter bis vierter Ordnung hat Voss[31]) nach liniengeometrischen Methoden auch hinsichtlich ihrer Differentialgeometrie untersucht, ebenso die Haupttangentenkurven der Regelflächen.[32])

5. *Die Umgebung eines Kongruenzstrahles.* Analog wie alle Kurven, die auf einer Fläche des Punktraumes von einem Punkte ausgehn,

---

24) Thèse, Paris, 1894, bei Nony. 25) Géom. reglée, chap. IV.

26) Voss, Math. Ann. VIII und Koenigs, Thèse, S. 97, f.

27) Thèse, S. 30.

28) Géom. reglée, S. 63 (1895). Dieses Buch ist ein Wiederabdruck von Abhandlungen, die in den Ann. de la Fac. Toulouse III, VI, VII (1889—93) veröffentlicht wurden.

29) Zindler, Liniengeom. Bd. II, § 3, 4. Daß der Abstand, wenn er von höherer als erster Ordnung verschwindet, mindestens von der dritten Ordnung verschwindet, ist ein lange bekannter Satz, der von Koenigs (Géom. reglée, S. 63) Bouquet zugeschrieben wird.

30) Math. Ann. V. S. 293. 31) a. a. O. (s. 26). 32) Math. Ann. Bd. 12.

dort nur ∞^1 Richtungen haben, so haben alle Regelflächen, die in einer Kongruenz von einem Strahle ausgehn, nur ∞^1 Richtungen. Es müssen also, wie schon in 3 erwähnt, zwischen den drei Richtungskoordinaten z, α, P zwei Beziehungen bestehn. Die eine davon ist die Hamiltonsche Gleichung (1), die z als Funktion von α gibt; die andere, die P als Funktion von α gibt, tritt zuerst bei Mannheim[33]) auf, obgleich Cesàro[34]) beide Gleichungen (6) als Formeln von Hamilton bezeichnet.[35]) Die erwähnten Beziehungen lassen sich bei passender Wahl der Ausgangselemente der Richtungskoordinaten so schreiben[36]):

$$z = c \sin 2\alpha, \qquad P = P_0 + c \cos 2\alpha,$$

wobei P_0 und c Konstante sind, oder auch (nach Drehung der Ausgangsebene um 45^0):

$$\text{6)} \qquad \begin{aligned} z &= \tfrac{1}{2}(A - B) \sin 2\alpha, \\ P &= A \sin^2\alpha + B \cos^2\alpha, \end{aligned}$$

wobei A und B konstant sind. Eliminiert man α, so erhält man[37])

$$(7) \qquad (P - A)\,(P - B) + z^2 = 0.$$

Aus den Gleichungen (6) folgt: Die Zentralpunkte aller Regelflächen, die von einem regulären Strahl s einer Kongruenz ausgehn, füllen auf s eine endliche Strecke der Länge A—B, wobei A und B die extremen Werte sind, die der Verteilungsparameter annehmen kann. Die Endpunkte dieser „*Grenzstrecke*“ heißen *Grenzpunkte*. Zu $P = O$ gehören zwei Werte α und zwei Werte z; sie bestimmen die Kuspidalebenen und die Kuspidalpunkte derjenigen Regelflächen der Kongruenz, die in s eine Kuspidalerzeugende haben. Die Kuspidalpunkte heißen *Brennpunkte* des Strahles s und die Kuspidalebenen *Brennebenen*. Der Mittelpunkt der Strecke zwischen den Brennpunkten, der *Brennstrecke*, halbiert auch die Grenzstrecke und heißt *Mittelpunkt* des Strahles. Die extremen Lagen des Zentralpunktes gehören zu zwei auf einander senkrechten

33) Liouv. J. (2) 17 (1872), S. 126 oder Géom. Ciném. S. 284 (1894).

34) Natürl. Geom. (übers. Kowalewski), § 211.

35) Allerdings findet sich bei Kummer, J. f. Math. Bd. 57, S. 200 eine Formel für P $\left(\text{dort } \frac{dp}{d\varepsilon}\right)$ als Funktion eines unabhängigen Parameters t; aber t hat nicht unmittelbar die Bedeutung eines Azimuts um den betrachteten Strahl, deshalb gestattet die Formel keine einfache geometrische Deutung und wird auch gar nicht weiter diskutiert.

36) Cesàro, a. a. O. § 212.

37) Cesàro, Natürl. Geom. §. 211. In geometrischer Form findet sich diese Gleichung auch bei Mannheim, Géom. ciném. S. 281, Theorem 8'.

Ebenen als Zentralebenen $\left(\alpha = \pm \frac{\pi}{4}\right)$, die *Hauptebenen* heißen. Alle diese Begriffe sind von den in **1** und **2** genannten Autoren aufgestellt. Die Ebenen $\alpha = 0, \frac{\pi}{2}$ mögen *Krümmungsebenen* heißen; für sie als Zentralebenen erreicht nämlich P, also auch das Krümmungsmaß im Zentralpunkte der zugehörigen Regelflächen ein Extrem.[38]) In der Tat ist die Bestimmung der Invarianten A und B bei der Darstellung (5) und bei allgemeiner Lage des Strahles gegen das Koordinatensystem ganz analog der Berechnung der Hauptkrümmungshalbmesser in einem Flächenpunkte.[39]) Die Krümmungsebenen sind die Halbierungsebenen sowohl des Keiles der Brennebenen als auch des Keiles der Hauptebenen. Die im Mittelpunkte auf s senkrechte Ebene heißt *Mittelebene*, die in den Grenzpunkten auf s senkrechten Ebenen heißen *Grenzebenen*. Wenn φ der Winkel zwischen den Brennebenen ist, so hat die Brennstrecke die Länge $(A - B) \sin \varphi$.

Sucht man aus der Umgebung eines Strahles s alle Strahlen heraus, die mit s gleiche Winkel bilden, so erhält man eine „Regelfläche *konstanter Neigung*", sucht man alle heraus, die von s gleichen Abstand haben, so erhält man eine „Regelfläche *konstanten Abstands*"; erstere ist von der vierten Ordnung[40]), letztere von der achten.[41])

Für $A = B$ wird P konstant und die Grenzpunkte fallen zusammen: ein solcher Strahl heißt „*isotrop*". Für $A = -B$ fallen die Grenzpunkte mit den Brennpunkten zusammen, die Brennebenen mit den Hauptebenen und stehn zueinander senkrecht; ein solcher Strahl heißt ein „*Normalstrahl*". Der Mittelpunkt, die Grenzpunkte, die Hauptebenen, die Krümmungsebenen sind immer reell. Je nachdem die Brennpunkte und Brennebenen reell sind, nicht reell sind oder zusammenfallen, heißt der Strahl *hyperbolisch*, *elliptisch* oder *parabolisch*. Der erste Fall tritt ein, wenn A und B ungleich bezeichnet sind, der zweite, wenn sie gleiches Zeichen haben, der dritte, wenn A oder B Null ist. Die elliptischen Strahlen teilen sich je nach dem Vorzeichen von A und B in zwei Gruppen, die mit „rechtsgewundener" und „linksgewundener" Umgebung.

Es gibt *singuläre* Strahlen, für welche die vorstehenden Sätze nicht gelten. Sie sind noch wenig untersucht, einiges über „p-fache" Strahlen, von denen $2p$ schneidende Richtungen ausgehn, findet man bei Koenigs[42])

38) Der Wert dieser Krümmung ist nämlich $-\frac{1}{P^2}$; vgl. z. B. Zindler, Liniengeom. Bd. II, § 3.

39) Ebenda, § 22.

40) Hensel, J. f. Math. Bd. 102.

41) Zindler, Liniengeom. Bd. II, § 23.

42) Thèse, S. 50 f.

und bei Weiler.[43]) Ein einfacher Fall besonderer Strahlen sind die *zylindrischen*[44]), bei denen die Grenzpunkte ins Unendliche rücken.

6. *Die mit einer Kongruenz verbundenen Flächen.* Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Strahlen einer Kongruenz heißt *Mittelfläche* der Kongruenz, der Ort der Brennpunkte *Brennfläche*, der Ort der Grenzpunkte *Grenzfläche*; die Einhüllende der Mittelebenen heißt *Mitteleinhüllende*, die der Grenzebenen *Grenzeinhüllende.* Die Brennfläche besteht aus zwei Mänteln, die analytisch dieselbe Fläche bilden können, ebenso die Grenzfläche und die Grenzeinhüllende. Die Mittelfläche, Grenzfläche und Brennfläche wurden von Kummer definiert[45]), die Mitteleinhüllende von Ribaucour.[46])

a) *Die Grenzflächen.* Die erste Grenzfläche eines Strahlensystems, die wirklich gefunden und untersucht wurde, ist diejenige der Achsenkongruenz dritter Ordnung und zweiter Klasse einer linearen zweidimensionalen Mannigfaltigkeit linearer Komplexe. Dies ist zugleich die Kongruenz der kürzesten Abstände irgend zweier Strahlen einer Regelschar zweiter Ordnung. Waelsch hat gefunden[47]), daß die Brennfläche dieser Kongruenz, obgleich sie keine Normalenkongruenz ist, mit der Grenzfläche identisch ist, indem ein Grenzpunkt irgend eines Strahles zugleich Brennpunkt eines andern Strahles ist. Die Fläche ist von der sechsten Ordnung und vierten Klasse und wurde auch von Joly[48]) und namentlich von Study[49]) (von letzterem mit Hilfe der elliptischen Funktionen) weiter untersucht.

Die Grenzflächen der Strahlennetze (Definition dieses Wortes in 7) sind von der zehnten Ordnung[50]) und reduzieren sich in drei besonderen Fällen auf die sechste Ordnung, nämlich für den Fall des Rotationsnetzes, des rechtwinkligen und des parabolischen Netzes. Für den letzteren Fall ist ein Modell im Verlag von Schilling erschienen.

b) *Die Brennflächen.* Einer oder beide Mäntel der Brennfläche können sich auf Kurven reduzieren. Dieser Fall wurde von R. Sturm

---

43) Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. 31.

44) Zindler, Liniengeom. Bd. II., § 34.

45) J. f. Math. Bd. 57, S. 203.

46) Étude des Élassoïdes ou surf. à courbure moyenne nulle, § 2; Mém. cour. et des sav. étr. Acad. Belg. T. 44 (1882). Der Verfasser benützt die Methode der „Perimorphie", die mit Darboux' Methode des beweglichen Trieders verwandt ist, ebenso mit den Methoden der „Natürlichen Geometrie", die von späteren Autoren, namentlich Cesàro, verwendet werden.

47) Wiener S. B. Bd. 95, 1887 oder Nova acta der Leop. Acad. Halle, Bd. 52, 1888.

48) Transact. of the Irish Acad. XXX, 1895.

49) Geom. d. Dynamen, S. 479, ff.

50) Zindler, Liniengeom. Bd. II, § 26.

untersucht und der allgemeinen Theorie eingeordnet.[51]) Hiervon abgesehn gilt folgendes: In denjenigen Gebieten einer Kongruenz, in denen die Brennpunkte reell sind, lassen sich ihre Strahlen auf zweierlei Art in eine Schar von ∞^1 abwickelbaren Flächen anordnen. Die Gratlinien jeder Schar erfüllen je einen Mantel der Brennfläche, deren beide Mäntel von jedem Kongruenzstrahl in den beiden Brennpunkten berührt werden. Jede Brennebene berührt den einen Mantel in einem Brennpunkte und ist im anderen Brennpunkte Schmiegungsebene der auf dem anderen Mantel gelegenen Gratlinie. Die Brennfläche ist also auch Einhüllende der Brennebenen. Auf jedem Mantel sind die Gratlinien der einen Schar abwickelbarer Flächen konjugiert zu denjenigen Kurven, in denen die abwickelbaren der anderen Schar denselben Mantel berühren.[52]) Für eine Kongruenz, die als Schnitt zweier Komplexe gegeben ist, hat Voß[53]) die Brennfläche in symbolischer Form dargestellt. Über die Singularitäten auf den Brennflächen hat derselbe weitgehende Untersuchungen, jedoch mehr in algebraisch-abzählender Richtung angestellt.[54])

Die Inflexionstangenten der Brennfläche hat Waelsch bestimmt.[55]) Wenn Q_1, Q_2 die Brennpunkte eines Strahles s sind, E_1, E_2 die zugehörigen Brennebenen u. zw. so, daß E_1 die Schmiegungsebene derjenigen Gratlinie ist, die s in Q_1 berührt, so berührt E_1 die Brennfläche in Q_2 und E_2 in Q_1. Nun bezeichnet Waelsch a. a. O. die Geraden

51) Mitteil. der Hamburger math. Ges., II (1890) oder Liniengeom. Bd. II, S. 12 ff, vgl. auch Weiler unter 43.)

52) Das meiste hiervon bei Kummer, J. f. Math. Bd. 57, S. 205 f.

53) Gött. Nachricht. 1873.

54) Math. Ann. Bd. 9.

55) Zur Infinitesimalgeom. der Strahlenkongruenzen, Wiener S. B., Bd. 100, II, 1891. In dieser Abhandlung wird folgende Darstellung der Kongruenzen zugrunde gelegt: Es sei

$$\Sigma a_k x_k = (ax) = 0$$

die Gleichung einer Geraden, wobei die x als Kleinsche Koordinaten der Beziehung $(xx) = 0$ genügen, analog die a. Hängen die a von zwei Parametern u, v ab, so ist eine Strahenkongruenz definiert und wenn man

$$\Sigma a_k x_k = a(u, v, x)$$

bezeichnet, so hat man für die Umgebung eines Strahles a die Gleichung:

$$0 = a + b\,du + c\,dv + \tfrac{1}{2}(e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2) + \cdots$$

Hier sind $b, \cdots g$ Ableitungen von a nach u, v, also linear in den x. Daher sind $b = 0, \cdots g = 0, \cdots$ Gleichungen linearer Komplexe. Durch diese werden die differentialgeometrischen Eigenschaften der Umgebung von a und besonders die projektiven invarianten Eigenschaften systematisch ausgedrückt.

der Büschel (Q_1, E_1) und (Q_2, E_2) als *Zentralstrahlen* von s und zeigt, daß wenn man Q_1 auf der Brennfläche bewegt, die Zentralstrahlen aller Nachbarpunkte in einem linearen Komplex, dem „*Begleitkomplex*" des Punktes Q_1 liegen. Auch der andere Brennpunkt Q_2 hat einen Begleitkomplex. Diese beiden Komplexe bestimmen (wie überhaupt zwei lineare Komplexe mit den beiden singulären des Büschels) ein Doppelverhältnis δ, das auch „Doppelverhältnis des Strahles s" heißt. Für die Normalenkongruenzen Weingartenscher Flächen ist $\delta = 1$, für die der Flächen zweiter Ordnung ist $\delta = 9$. Wenn d die Grenzstrecke ist und r_1, r_2, r_1', r_2' die Hauptkrümmungshalbmesser der beiden Mäntel der Brennfläche, so ist[56])

$$\delta = \frac{r_1\, r_2\, r_1'\, r_2'}{d^4}.$$

Demoulin hat eine Beziehung zwischen δ, dem Winkel der Brennebenen und den Torsionen der beiden Gratlinien gefunden.[57])

c) Die übrigen Flächen sind bei allgemeinen Kongruenzen noch wenig untersucht (vgl. auch **10**, a). Die Mittelfläche der unter a) erwähnten Achsenkongruenz ist nach Waelsch[58]) und Study[59]) eine Steinersche Fläche (vierter Ordnung) und zugleich die Fußpunktfläche bezüglich des Mittelpunktes der ganzen Figur. Die Mitteleinhüllenden der hyperbolischen und elliptischen Strahlennetze sind gleichseitige hyperbolische Paraboloide.[60])

7. *Die berührenden Strahlennetze.* Der Schnitt zweier linearen Komplexe ist ein Strahlensystem erster Ordnung und Klasse und heißt (nach Sturm) kürzer *Strahlennetz.* Die regulären Strahlennetze bestehen auch aus der Gesamtheit der Treffgeraden zweier Strahlen, der „*Brennlinien*" und heißen hyperbolisch, elliptisch oder parabolisch, je nachdem die Brennlinien reell getrennt (windschief) sind oder konjugiert komplex (zweiter Art) oder zusammenfallen. Unter den hyperbolischen Netzen sind die „rechtwinkligen" mit rechtwinklig kreuzenden Brennlinien, unter den elliptischen die Umdrehungsnetze ausgezeichnet, deren Brennlinien den unendlich fernen Kugelkreis treffen. Die elliptischen Netze haben zwei reelle isotrope Strahlen (Analogie mit den Brennpunkten einer Ellipse).[61]) Die singulären Strahlennetze sind die Strahlen eines Bündels oder Feldes.

Die Strahlennetze (oder „Netze") sind die einfachsten Strahlenkongruenzen, und man kann trachten, die Umgebung eines Strahles

56) a. a. O. S. 203. 57) Comptes R. Bd. 130, S. 1701 (1900).

58) Wiener S. B. Bd. 95, II, 1887. 59) Geom. d. Dynamen, S. 475.

60) Sturm, Liniengeom. I, S. 167.

61) Zindler, Liniengeom. Bd. II, § 24.

einer beliebigen Kongruenz dadurch annähernd darzustellen, daß man sie durch ein passend gewähltes Strahlennetz ersetzt[62]) (Analogon der Berührungsebene in der Flächentheorie). Zu diesem Zweck definieren wir: Zwei Strahlenkongruenzen *berühren* einander in einem gemeinsamen Strahle s, wenn sie alle in ihnen enthaltenen von s ausgehenden Richtungen des Linienraumes gemein haben. Es handelt sich darum, für einen Strahl s einer Kongruenz die berührenden Netze anzugeben. Gewöhnlich hat man diese Frage minder genau so formuliert: Zwei Gerade anzugeben, die von allen Kongruenzstrahlen der Umgebung von s geschnitten werden. Solche Gerade heißen „*Brennlinien*"[63]) der Umgebung von s oder kürzer des Strahles s selbst. Schon Monge und Sturm fanden (1) für Normalensysteme ein paar Brennlinien, die sie senkrecht zu s annahmen. Für allgemeine Strahlensysteme untersucht Kummer[64]) die Querschnitte des umgebenden unendlich dünnen Strahlenbündels und findet, daß sie sich in den Brennpunkten auf gerade Linien reduzieren. Da er nur senkrechte Querschnitte des Bündels betrachtet, so erhält auch er nur Brennlinien b_1, b_2, die auf s senkrecht stehn, und es hat sich bei einigen folgenden Autoren die Meinung gebildet, als ob dies eine wesentliche Eigenschaft brauchbarer Brennlinien wäre. Tatsächlich kann man aber jede Gerade der Büschel (s, b_1) und (s, b_2) mit gleichem Recht als Brennlinie betrachten, wie Klein[65]), Weingarten[66]) und Matthiessen[67]) klargestellt haben. Man kann die Sache präzise so ausdrücken: Man darf (Bezeichnungen wie in 6, b) in den Büscheln (Q_1, E_2) und (Q_2, E_1) je einen Strahl außer s beliebig wählen. Diese beiden Strahlen bestimmen als Brennlinien ein Strahlennetz, das die Kongruenz berührt und man erhält so, alle berührenden Netze, deren es also ∞^2 gibt.[68]) Diese beiden Büschel heißen deshalb *Brennbüschel*[69]); ihre Strahlen sind lauter Brennlinien. Dasjenige berührende Netz, dessen Brennlinien auf s senkrecht stehn, möge *Hauptnetz* des Strahles s heißen. Es ist für die Untersuchung der Umgebung von s am bequemsten, obgleich es sonst unter den berührenden Netzen, solange es sich um „Eigenschaften erster Ordnung[70])" handelt, nicht ausgezeichnet ist. Das Hauptnetz eines isotropen Strahles

62) Klein, Math. Ann. V, S. 289.

63) Auch für die Gratlinien der Abwickelbaren wurde der Name „Brennlinien" schon verwendet (Bianchi, Ann. di Mat. (2) XV). 64) a. a. O. S. 222.

65) Math. Ann. V, S. 289. 66) J. f. Math. Bd. 98.

67) Schlömilchs Zeitschr. f. Math. Bd. 29, Suppl. und Acta math. IV.

68) Klein, a. a. O. 69) Waelsch, Wiener S. B. Bd. 100, II.

70) „Eigenschaften n-ter Ordnung" mögen mit Koenigs diejenigen heißen, die von den Ableitungen bis einschließlich zur n-ten Ordnung der Koordinaten nach den unabhängigen Veränderlichen abhängen.

s ist ein Umdrehungsnetz. Also lassen sich die Strahlen der Umgebung von s annähernd nach koaxialen Umdrehungshyperboloiden anordnen.

Für das Hauptnetz ist der betrachtete Strahl s zugleich der Hauptstrahl (der die Brennlinien senkrecht schneidet). Da die unendlich ferne Gerade der auf s senkrechten Stellung dem Hauptnetz angehört, schneiden irgend zwei Ebenen dieser Stellung das Netz in affinen Feldern. Von hier aus hat Möbius[71]) die wesentlichsten Resultate Kummers geometrisch abgeleitet. Ihm folgten Frischauf[72]) und Zech[73]), der auch die konstruktive Seite der Theorie weiterführt, später Bobek.[74]) Da zwei affine Felder durch drei Paare entsprechender Punkte bestimmt sind, so genügen zur Bestimmung eines „unendlich dünnen Strahlenbündels" (Zech, a. a. O.) außer dem Ausgangsstrahl noch zwei Nachbarstrahlen, m. a. W. durch zwei Richtungen ist die ganze Richtungsmannigfaltigkeit einer Kongruenz bestimmt, was durch den analytischen Richtungsbegriff allerdings selbstverständlich wird. Auch Mannheim hat eine konstruktive Theorie der unendlich dünnen Strahlenbündel gegeben.[75])

Geht man zu Eigenschaften höherer Ordnung über, so kann man unter den berührenden Netzen oder, was dasselbe sagen will, unter den Brennlinien ausgezeichnete finden: Solche sind die zu s konjugierten Tangenten der Brennflächen. Legt man durch sie schneidende Ebenen, so verschwindet der Querschnitt des Bündels von der dritten Ordnung.[76]) Die beiden Begleitkomplexe (6, b) haben ein Strahlennetz gemein, dessen Brennlinien ausgezeichnete „Hauptbrennlinien" sind.[77]) Wir erwähnen noch einige Ergebnisse von Koenigs[78]): Betrachtet man in einer Kongruenz alle Regelflächen bestimmter Richtung durch einen Strahl s, so erfüllen ihre Schmiegungsregelscharen für s ein Strahlennetz, das *Schmiegungsnetz* der betreffenden Richtung. Die Schmiegungsnetze aller Richtungen von s bilden einen quadratischen Komplex. Jeder lineare Komplex, der ein berührendes Strahlennetz einer Kongruenz enthält, heißt ein *berührender linearer Komplex.* Wählt man eine Kongruenzgerade g, eine Nachbargerade s, einen in s berührenden linearen Komplex C, so verschwindet das Moment von g bezüglich ihrer in C conjugierten i. a. von der vierten Ordnung.

71) Geom. Entwicklung der Eigenschaften unendlich dünner Strahlenbündel, Ber. d. sächs. Ges. Bd. 14, 1862 oder Ges. W. IV.

72) Schlömilchs Zeitschr. f. Math. Bd. 16. 73) Ebenda, Bd. 17.

74) Wiener, S. B. B. 83, II (1881). 75) Géom. ciném. S. 279, ff.

76) Ahrendt, Schlömilchs Zeitschr. Bd. 36.

77) Waelsch, Wiener S. B. Bd. 100, II, S. 164 und 169.

78) Thèse, S. 100 ff.

8. *Anwendungen auf die geometrische Optik.* Schon einige unter 7 erwähnte Untersuchungen (Matthiessen, Ahrendt) wurden in optischem Interesse unternommen. Wenn eine brechende Fläche und ein unendlich dünnes Strahlenbündel gegeben sind, so ergibt sich die für die Optik wichtige Aufgabe, das gebrochene Bündel zu finden. Diese Aufgabe könnte man der Kürze halber das „Problem von Sturm" nennen, obgleich Sturm (1) nur die Normalenbündel betrachtet hat. Es wurde von C. Neumann in der Form gelöst[79]), daß das einfallende Bündel durch den Hauptstrahl und die beiden zu ihm normalen Brennlinien gegeben ist und die analogen Elemente des gebrochenen Bündels gesucht werden. Eine geometrische Lösung stammt von Mannheim.[80]) Der Fall der Kugelfläche als brechender Fläche wurde eingehend von Reusch[81]), Lippich[82]), Neumann[83]) untersucht.

Das Theorem von Malus und Dupin haben wir schon unter 1 erwähnt. In neuerer Zeit haben Ribaucour[84]), Jamet[85]), Gorton[86]) und Bianchi[87]) Beweise dafür gegeben; Demoulin hat es auf den Fall unendlich vieler brechender Flächen ausgedehnt[88]), d. h. auf stetig gekrümmte Lichtwege. Levi-Civita hat gezeigt[89]): Die Eigenschaft, ein Normalensystem zu sein ist die einzige für die Brechung invariante Eigenschaft. Zwei Kongruenzen, die beide Normalenkongruenzen sind oder beide nicht, sind immer durch eine endliche Anzahl von Brechungen auseinander ableitbar. Für Normalenkongruenzen genügt eine Brechung, für die anderen i. a. zwei; im letzteren Fall können zwei Regelflächen der Kongruenzen beliebig strahlweise einander zugeordnet werden.

9. *Die Regelflächen einer Kongruenz.* Die Berührungsebenen von vier Regelflächen einer Kongruenz durch denselben Strahl haben für alle Punkte des Strahls dasselbe Doppelverhältnis.[90])

a) Verfolgt man stets diejenigen Richtungen in einer Kongruenz, in denen $P = 0$ ist, so erhält man die *Abwickelbaren* der Kongruenz (vgl. 6, b). Ihre Differentialgleichung für den Fall, daß die Kongruenz als Schnitt zweier Komplexe gegeben ist, hat Klein[91]) aufgestellt.

79) Ber. d. sächs. Ges. Bd. 32, 1880.

80) Atti della Acc. dei Lincei, 1885—86 oder Géom. ciném. S. 550, ff.

81) Pogg. Ann. d. Phys. u. Chemie, Bd. 130, 1867.

82) Wiener Denkschr. Bd. 38, 1877.

83) Vgl. Anm. 79. 84) J. de Math. (4), 7, S. 103.

85) Ann. d. la. fac. de sc. Marseille, 1900. 86) Am. J. of. Math. XIII.

87) Vorl. üb. Differentialgeom. § 143. Vgl. auch Bruns, Das Eikonal, Abh. d. sächs. Ges. XXI (1895).

88) Comptes R. Bd. 129. 89) Atti della Acc. dei Lincei (5) 9, 1900.

90) Der analoge Satz für allgemeine Kurvenkongruenzen bei Darboux, Th. des surf. II, S. 3. 91) Math. Ann. V, S. 292.

b) Verfolgt man stets diejenigen Richtungen in einer Kongruenz, in denen z ein Extrem ist, so erhält man die *Hauptflächen.*[92]) Dies sind also diejenigen Flächen, deren Zentralpunkt stets ein Grenzpunkt ist, m. a. W. deren Striktionslinie in der Grenzfläche liegt.[93])

c) Verfolgt man stets diejenigen Richtungen, in denen P ein Extrem ist, so erhält man Regelflächen, die *Krümmungsflächen* heißen mögen, weil sie den Krümmungslinien der Flächentheorie analog sind. Sie sind zugleich diejenigen, deren Striktionslinie in der Mittelfläche liegt und wurden als solche („rigate medie") zuerst und fast gleichzeitig von Burgatti[94]) und Cifarelli[95]) eingeführt.

Für die Parameterdarstellung (5) der Kongruenzen findet man die Differentialgleichungen aller drei Flächenarten bei Zindler.[96])

d) Das berührende Hauptnetz hängt (abgesehen von seiner Lage im Raume) von zwei Konstanten ab, von denen die eine bloß die Form des Netzes bestimmt (bei hyperbolischen Netzen der Winkel der Brennlinien), die andere die Größe (bei hyperbolischen Netzen der Abstand der Brennlinien). Man kann also in einer Kongruenz Regelflächen *konstanter Umgebungsgröße* und *konstanter Umgebungsform* unterscheiden.[97]) Die ersteren sind zugleich diejenigen, für die in allen ihren Zentralpunkten die Kongruenz gleiches Dichtigkeitsmaß[98]) hat.

e) Unter dem Moment zweier Geraden versteht man das Produkt ihres kürzesten Abstands und des sinus ihres Winkels. Wenn die Linienkoordinaten einer Geraden als Funktionen eines Parameters t, etwa der Bogenlänge der sphärischen Abbildung gegeben sind, so kann man das Moment M zweier Nachbargeraden der Regelfläche als Funktion von t und $\triangle t$ ausdrücken. Es verschwindet von der zweiten Ordnung; bildet man also

$$J = \int \sqrt{M} \cdot dt$$

zwischen zwei Strahlen der Regelfläche, so erhält man i. a. einen endlichen Wert. Sind zwei Strahlen einer Kongruenz gegeben, so kann man sich die Aufgabe stellen, sie durch diejenige Regelfläche der

92) Abweichend vom sonstigen Gebrauch versteht Ribaucour unter surfaces principales die Abwickelbaren (in der unter 46) genannten Schrift).

93) z. B. Bianchi, Vorl. über Differentialgeom., § 139.

94) Atti della Acc. dei Lincei, (5), 8, 1899.

95) Ann. di Mat. (3), 2, 1899. 96) Liniengeom. Bd. II, § 27, 28.

97) Zindler, a. a. O. § 31.

98) Die von Kummer eingeführten Flächen gleichen Dichtigkeitsmaßes (a. a. O. S. 214) fassen alle Punkte des Raumes zusammen, in denen das Strahlensystem gleiche Dichtigkeit hat. Also liegt die Striktionslinie jeder Regelfläche konstanter Umgebungsgröße auf einer Fläche gleichen Dichtigkeitsmaßes.

Kongruenz zu verbinden, für die J ein Minimum wird. Analog wie in der Flächentheorie nennt man nun überhaupt jede Regelfläche der Kongruenz, für welche die erste Variation von J verschwindet, nach Koenigs[99]) eine *geodätische Regelfläche*.

Dieser Begriff läßt sich analog auf Komplexe und den ganzen Linienraum ausdehnen; z. B. sind die gewöhnlichen Schraubenflächen geodätische Regelflächen des Linienraumes.[100])

f) Die Regelflächen einer linearen Kongruenz und ihre Haupttangentenkurven wurden von Pittarelli untersucht.[101])

10. *Besondere Kongruenzen.* a) Isotrope Kongruenzen. Eine Kongruenz, die aus lauter isotropen Strahlen (5) besteht, heißt *isotrop*. Für eine solche fallen beide Mäntel der Grenzfläche in die Mittelfläche, in der auch die Striktionslinien aller ihrer Regelflächen liegen.[102]) Die Hauptflächen und die Krümmungsflächen werden unbestimmt. Die Brennflächen gehn durch den unendlich fernen Kugelkreis. Die Mitteleinhüllende einer isotropen Kongruenz ist eine Minimalfläche.[103]) Umgekehrt gehören so zu einer Minimalfläche ∞^3 isotrope Kongruenzen.[104]) Kennt man auf einer Kugel ein orthogonales isometrisches Kurvennetz, so kann man durch eine einfache Konstruktion daraus eine isotrope Kongruenz ableiten.[105]) Eine solche ist durch eine ihrer Regelflächen schon bestimmt.[106]) Es gibt auch isotrope Umdrehungs- und Schraubungskongruenzen.[107])

b) Normalenkongruenzen. Eine Kongruenz, die aus lauter Normalstrahlen (5) besteht, heißt eine *Normalenkongruenz*, weil sie das Normalensystem von ∞^1 (parallelen) Flächen F ist. Ihre Brennfläche (mit der die Grenzfläche zusammenfällt) ist die Zentrafläche oder Evolutenfläche (Ort der beiden Hauptkrümmungsmittelpunkte) jeder Fläche F.[108]) Die Gratlinien der Abwickelbaren sind geodätische Linien auf der Brennfläche, weil aus **6**, *b* unmittelbar folgt, daß ihre Schmiegungsebene auf der Brennfläche senkrecht steht.[109]) Die Aufgabe, aus einem

99) Thèse, S. 86 ff. 100) Ebenda, S. 89.

101) Rend. dell' Acc. dei Lincei (5) III, 1894.

102) Ribaucour in der unter 46) genannten Schrift.

103) a. a. O., § 26 (auch Cosserat, Mém. de l'Ac. Toulouse, (9) 4, 1892).

104) Ribaucour, a. a. O. § 34. 105) a. a. O. § 27.

106) a. a. O. § 35. In dieser Schrift finden sich noch zahlreiche Sätze über den Zusammenhang der isotropen Kongruenzen mit den Minimalflächen; vgl. auch seine Abhandlung im J. de Math. (4) VII, 1891.

107) Zindler, Liniengeom. Bd. II, § 29. 108) Kummer, a. a. O. § 9.

109) Schon Monge kannte nach Kummer (a. a. O. S. 229) diesen Satz. Die Umkehrung rührt von Beltrami her (Ricerche di Anal. applic., Giorn. di Mat. Bd. 2 und 3).

gegebenen Mantel der Brennfläche einer Normalenkongruenz den anderen zu finden, hat schon Monge behandelt[110]) und besonders den Fall betrachtet, daß der gegebene Mantel eine abwickelbare Fläche ist. Die Normalenkongruenzen abwickelbarer Flächen untersuchen Saussure[111]) und Study.[112]) Die Mitteleinhüllende einer Normalenkongruenz heißt auch *Evolutenmittelfläche* jeder zur Kongruenz gehörigen Orthogonalfläche F.

Die Normalenkongruenzen und auch allgemeinere Kongruenzen wurden vielfach im Zusammenhang und nach den Methoden der Flächentheorie untersucht, namentlich in Verbindung mit dem Problem der Biegung der Flächen. Dies überschreitet den Rahmen dieses Berichtes; es sei daher nur bemerkt, daß sich eine gedrängte Übersicht alles Wesentlichen der erwähnten Theorien in Bianchis Vorlesungen über Differentialgeometrie findet.[113])

c) Parabolische Kongruenzen. Es gibt Kongruenzen, deren sämtliche Strahlen parabolisch (5) sind, bei denen also beide Mäntel der Brennfläche zusammenfallen.[114]) Sie heißen speziell oder *parabolisch* und bestehn aus dem einen System von Haupttangenten der Brennfläche.[115]) Die Grenzstrecke ist $\frac{1}{\sqrt{-K}}$, wenn K das Krümmungsmaß der Brennfläche ist.[116]) Die parabolischen Kongruenzen dritter Ordnung hat Fano untersucht.[117])

d) Die Kongruenzen, für die sowohl die Grenzstrecke als die Brennstrecke konstant ist (erstere $= a$), untersucht Bianchi[118]) und findet, daß die Brennflächen konstantes Krümmungsmaß $-\frac{1}{a^2}$ haben. Er nennt sie deshalb *pseudosphärische* Kongruenzen und bestimmt diejenigen, die in einem linearen Komplex enthalten sind.

e) Ein zyklisches System nennt Ribaucour[119]) ein dreifach orthogonales Flächensystem, bei dem die Trajektorien der einen Flächenschar Kreise sind. Eine Kongruenz, die von den Achsen solcher Kreise

110) In der Fassung, daß der eine Mantel der Zentrafläche einer Fläche gegeben ist (Journ. de Éc. polyt. Bd. 6, cah. 13, 1806); er kommt auf eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung.

111) Am. J. of Math. Bd. 18. 112) Geom. d. Dynamen, S. 306.

113) Kap. IX—XIII.

114) Kummer, a. a. O. § 8, Schluß.

115) Klein, Math. Ann. V, S. 290. Eine Ausartung dieser Kongruenzen bei Zindler, a. a. O. Aufg. 36.

116) Bianchi, Vorl. über Differentialgeom. S. 267.

117) Atti della Acc. Torino, 37.

118) Ann. di Mat (2) XV, 1887.

119) J. de Math. (4) 7, S. 229.

gebildet wird, heißt *zyklisch.* Diese Kongruenzen sind von Bianchi[120]), Cosserat[121]) und Tzitzeica[122]) studiert worden.

f) Guichard befaßt sich mit den Kongruenzen, deren Mittelfläche eine Ebene ist[123]) und mit denjenigen, bei denen die Abwickelbaren sowohl auf der Mittelfläche als auch auf der Mitteleinhüllenden konjugierte Kurven herausschneiden. Wenn diese beiden Flächen in *eine* zusammenfallen, so ist diese eine Minimalfläche und die Kongruenz besteht aus ihren Normalen.[124]) Er untersucht auch die Kongruenzen, deren Abwickelbare auf den Brennflächen Krümmungslinien bestimmen.[125]) Thybaut[126]) und Bianchi[127]) untersuchen Kongruenzen, deren Brennflächen Minimalflächen sind.

11. *Kongruenzen, die mit einer oder mehreren Flächen verbunden sind.* a) Optische Achse eines Flächenpunktes heißt die Achse eines Umdrehungszylinders, der durch die Indikatrix des Punktes geht. Die optischen Achsen aller Punkte einer Fläche bilden eine Kongruenz, die von Cosserat[128]) aufgestellt wurde. Wenn sie eine Normalenkongruenz ist, so hat die gegebene Fläche konstantes Krümmungsmaß.

b) Es seien die Strahlen einer Kongruenz eindeutig den Punkten einer Fläche zugeordnet, und jeder Strahl habe gegen die Berührungsebene des ihm zugeordneten Punktes eine feste Lage. Dann wird einer Biegung der Fläche eine solche der Kongruenz entsprechen, und man kann fragen, wann eine Normalenkongruenz dabei wieder in eine solche übergeht.[129]) Dies geschieht vor allem, wenn jeder Strahl durch den ihm entsprechenden Punkt geht[130]) (Theorem von Beltrami) oder in der Berührungsebene liegt (Theorem von Ribaucour). Außerdem ist es nur möglich, wenn die Fläche sich auf eine Rotationsfläche abwickeln läßt, deren Linienelement auf eine bestimmte Form gebracht werden kann. Wenn in der Berührungsebene jedes Flächenpunktes eine Gerade fest angenommen wird, hat Bianchi die Frage beantwortet[131]), wann die Kongruenz bei den Biegungen der Fläche eine

120) Ann. di Mat. (2) 18, 19, auch Vorl. üb. Differentialgeom. Kap. XIII.

121) Ann. de la fac. de sc. Toulouse, VII.

122) Ann. de. l'Éc. norm. 3) 16, 1899. 123) Comptes R. Bd. 114, S. 729.

124) Ebenda, Bd. 112, S. 1424, 1891; vgl. auch Petot, ebenda, Bd. 113, S. 841.

125) Ann. de l'Éc. norm. (3), 6.

126) Ann. de l'Éc. Norm. (3), 14, auch Thèse, 1897.

127) Ann. di Mat. (3) X, 1904.

128) Ann. de la fac. de sc. Toulouse, VIII, 1894.

129) Dall' Aqua, Atti del Ist. Ven. Bd. 60, 1901.

130) S. auch Cifarelli, Giorn. di Mat. 36.

131) Rend. dell' Acc. dei Lincei (5) 9; vgl. auch Pseborski, Samml. der Mitt. der math. Ges. in Charkow (2) 7, 1902.

Normalenkongruenz einer Minimalfläche oder einer Fläche konstanter Krümmung bleibt.

c) Mit jeder Fläche sind ∞^2 Strahlenkongruenzen dadurch gegeben, daß durch jeden Flächenpunkt ein Strahl gehn soll, der mit den Achsen des ausgezeichneten Trieders überall gleiche Winkel bildet.[132]) Faßt man einen bestimmten Flächenpunkt ins Auge, so bestimmt also jede Gerade durch ihn eine solche Strahlenkongruenz. Die Grenzpunkte dieser verschiedenen Kongruenzen auf den Strahlen des Bündels bilden eine Fläche vierter Ordnung, die Brennpunkte eine solche dritter Ordnung.

d) Wenn man jeden Punkt einer Fläche mit dem Pol seiner Berührungsebene in bezug auf eine Fläche zweiter Ordnung verbindet, so erhält man das Strahlensystem der *„projektiven Normalen“*[133]); seine Brennfläche heißt „projektive Zentrafläche“.

e) Eine Kongruenz kann als Tangentenkongruenz einer Fläche gegeben sein; diesen Ausgangspunkt haben Zeemann[134]) und Waelsch genommen, der namentlich die zweiten Brennpunkte der Strahlen bestimmt und Liouvillesche Flächen als Ausgangsflächen betrachtet.[135])

f) Wenn zwei Flächen (ein- oder mehrdeutig) aufeinander bezogen sind, so ist durch die Verbindungslinien entsprechender Punkte eine Kongruenz definiert, deren Brennfläche Voss[136]) untersucht.

g) Wilczynski betrachtet die Kongruenz aller Schmiegungsregelscharen einer Regelfläche.[137])

12. *Die Gleichungen von Cesàro und anderes.* Zwischen den sechs Fundamentalgrößen erster und zweiter Ordnung der Flächentheorie bestehn bekanntlich drei Beziehungen, die gewöhnlich als die Gleichungen von Codazzi bezeichnet werden. Zwischen den Fundamentalgrößen Kummers, die in den Differentialformen (4) in 2 auftreten, oder den äquivalenten Gebilden anderer Darstellungen bestehn analog vier Beziehungen, die zuerst von Cesàro[138]), später von Fibbi[139]), Cifarelli[140])

---

132) Lilienthal, Math. Ann. Bd. 31, wo besonders die von den Tangenten der Krümmungslinien gebildeten Kongruenzen untersucht werden; Zeemann behandelt die Frage, wann eine so definierte Kongruenz eine Normalenkongruenz ist (Nieuw Arch. voor wiskunde (2), 4).

133) Voss, Abh. d. Münchner Akad. Bd. 16, 1887.

134) Nieuw Archief vor wiskunde (2) 4, 1900.

135) Wiener S. B. Bd. 102, II, 1893; vgl. auch Pell, Am. J. of Math. Bd. 20, 1898.

136) Math. Ann. Bd. 30; vgl. auch Panelli, Mem. della Acc. dei Lincei (4) VI, 1890.

137) Transact. of the. Am. Math. Soc. 4.

138) Rendic. dell' Acc. Napoli (2), VIII (1894) oder Geom. intrinseca (§ 215 der deutschen Übersetzung); übrigens dürften sie in den allgemeineren Gleichungen implizite enthalten sein, die fast gleichzeitig von Lilienthal für die Kurven-

und Burgatti[141]) abgeleitet wurden. Letzterer zeigt, daß zu gegebenen Fundamentalgrößen, wenn diese Beziehungen erfüllt sind, eine einzige Kongruenz gehört (abgesehen von ihrer Lage im Raume); die Richtungskosinus ihrer Strahlen werden durch Riccatische Gleichungen gefunden.

Man kann sich die Aufgabe stellen, eine Kongruenz aus den gegebenen sphärischen Bildern α) der abwickelbaren Flächen, β) der Hauptflächen, γ) der Krümmungsflächen zu finden. Das erste Problem ist von Guichard[142]) und Cosserat[143]) behandelt worden, das zweite von Bianchi[144]), das dritte von Burgatti[145]), alle drei von Eisenhart.[146]) Die Aufgabe, alle Flächen zu finden, auf denen die Abwickelbaren einer gegebenen Kongruenz ein konjugiertes System herausschneiden, ist von Darboux[147]) gelöst worden, ebenso das inverse und einige verwandte.

Die Theorie der Strahlenkongruenzen ist allgemeiner als die ganze Flächentheorie (weil mit jeder Fläche ein *spezielles* Strahlensystem, das Normalensystem verbunden ist), aber anderseits in der allgemeineren Theorie der Kurvenkongruenzen enthalten, die von Darboux[148]), Lilienthal[149]), Levi-Civita[150]), Dall'Aqua[151]), Eisenhart[152]) (freilich nicht so ins einzelne wie die Theorie der Strahlenkongruenzen) entwickelt wurde.

13. *Arten von Komplexstrahlen, Singularitätenfläche.* Bei der differentialgeometrischen Untersuchung der Linienkomplexe hat man folgende Darstellungen benützt: Eine Gleichung zwischen homogenen (tetraedrischen oder rechtwinkligen) Plückerschen Linienkoordinaten:

(8) $$F(p_1, \ldots p_6) = 0$$

mit der Bedingung

(8a) $$\sum_1^3 p_i p_{i+3} = 0$$

---

kongruenzen (Grundl. einer Krümmungslehre der Kurvenscharen, Leipzig 1896) gefunden wurden.

139) u. zw. allgemeiner für Kongruenzen in einem Raum konstanter Krümmung, Ann. della Sc. norm. di Pisa, VII. 140) Ann. di Mat. (3) 2.

141) Atti della Acc. dei Lincei (5) 8.

142) Ann. de l'Éc. norm. (3) 6. 143) Ann. de la fac. de sc. Toulouse, VII.

144) Vorl. über Differentialgeom. § 146. 145) Vgl. 133.

146) Transact. of the Am. Math. Soc. 3.

147) Théorie des surf. II, Kap. X.; s. auch Cosserat, a. a. O.

148) Théorie des surf. II.

149) Grundlagen einer Krümmungslehre der Kurvenscharen, Leipzig, 1896.

150) Atti della Acc. dei Lincei (5) VIII. 151) Ann. di Mat. (3) 6.

152) Transact. of the Am. Math. Soc. 4.

oder zwischen Kleinschen Koordinaten

$$F(x_1, \ldots, x_6) = 0 \tag{9}$$

mit der Bedingung

$$\sum_1^6 x_i^2 = 0 \tag{9a}$$

oder zwischen irgend vier von einander unabhängigen Koordinaten:

$$f(u_1, \ldots u_4) = 0: \tag{10}$$

oder die „Parameterdarstellung“:

$$p_\lambda = p_\lambda(u, v, w), \qquad (\lambda = 1, \ldots 6), \tag{11}$$

wobei u, v, w unabhängige Veränderliche sind und die Funktionen p_λ identisch der Beziehung (8a) genügen sollen. Bei (8) und (9) werden die Funktionen F als homogen (und irreduzibel) vorausgesetzt (der Grad sei n), bei (11) können die p für projektive Eigenschaften tetraedrische Koordinaten sein, für metrische Eigenschaften ist es zweckmäßig, sie als rechtwinklige homogene Plückersche Koordinaten vorauszusetzen. Die Darstellungen (10) und (11) sind insofern allgemeiner, als sie unmittelbar auch transzendente Linienkomplexe umfassen.

Wenn für die Koordinaten p_i eines Komplexstrahles p bei (8) die Beziehung

$$\sum_1^3 F_\nu F_{\nu+3} = 0, \tag{12}$$

bei (9) die Beziehung

$$\sum_1^6 F_\nu^2 = 0 \tag{13}$$

erfüllt ist, so heißt der Strahl p *singulär*, sonst *regulär*. Der Komplexkegel eines Punktes P auf einen Komplexstrahl p hat längs p eine Berührungsebene β; bewegt man P auf p, so dreht sich bei einem regulären Strahl β um p und das Ebenenbüschel β ist für einen solchen zur Punktreihe P projektiv, bildet also mit ihr eine Korrelation um p.[153])

Ist $s \equiv (s_i)$ ein singulärer Strahl, so setze man[154])

$$F_i = q_{i+3},$$

153) Für quadratische Komplexe bei Plücker, Neue Geom., Art. 228 (1868), allgemeiner bei Pasch (Habilitationsschrift, Gießen, 1870), für die Darstellung (10) bei Koenigs, Thèse, Art. 29.

154) Pasch, J. f. Math. Bd. 76.

dann lassen sich die q_ν vermöge (12) auch als Koordinaten eines Strahles q auffassen. Jenachdem q mit s identisch ist oder nicht, heißt s ein *„höherer“* oder ein *„gewöhnlicher* singulärer Strahl“. Unter den ersteren sind die *„Doppelstrahlen“* die einfachsten, in letzterem Fall schneiden sich s und q in einem Punkte S, bestimmen also auch eine Ebene σ, die zu s gehörige *„singuläre Ebene“*, während S der zu s gehörige *„singuläre Punkt“* heißt. Ein höherer singulärer Strahl ist für die Komplexkegel aller seiner Punkte Doppelstrahl (Rückkehrstrahl, mehrfacher Strahl), ein gewöhnlicher singulärer Strahl nur für den Komplexkegel von S; dual ist ein gewöhnlicher singulärer Strahl nur für die Komplexkurve von σ eine Doppeltangente. Allen Ebenen des Büschels β (mit Ausnahme von σ) ist S als Berührungspunkt ihrer Komplexkurven mit s zugeordnet (analog dual).

Die singulären Strahlen eines Komplexes bilden, wenn nicht alle Strahlen singulär sind[155]), eine Kongruenz (Schnitt von (8) und (12)), die *„Singularitätenkongruenz“*. Die von den singulären Ebenen umhüllte Fläche ist mit dem Ort der singulären Punkte identisch[156]) und heißt *„Singularitätenfläche“*. Sie wurde nach symbolischen Methoden von Clebsch[157]) dargestellt und ist der eine Mantel der Brennfläche der Singularitätenkongruenz; der andere Mantel heißt *„akzessorische* Fläche“ Die beiden Punkte, in denen ein gewöhnlicher singulärer Strahl s die Brennfläche berührt, sind harmonisch getrennt von den beiden Punkten, in denen die Komplexkurve der zugehörigen Ebene σ von s als Doppeltangente berührt wird.[158]) Die Singularitätenfläche der quadratischen Komplexe ist i. a. eine Kummersche Fläche (vierten Grades) mit 16 Knotenpunkten und wurde von Plücker[159]), Klein[160]), Rohn[161]), Reye[162]) untersucht. Ihre mannigfachen Ausartungen für die 48 Arten quadratischer Komplexe hat Weiler[163]) angegeben.

155) Dieser Fall tritt nur ein, wenn der Komplex aus den Tangenten einer Fläche oder den Sekanten einer Kurve besteht; die analytischen Kennzeichen hierfür haben Cayley (Coll. P. Vol. IV., Nr. 284 u. 294 oder Quart. J. t. III) und Klein (Math. Ann. V) angegeben. Mit der Fundamentalform (Ausdruck des Momentes zweier Nachbarstrahlen) singulärer Komplexe befaßt sich Koenigs, Comptes R. Bd. 100, S. 847.

156) Für quadratische Komplexe bei Plücker, N. Geom. Art. 320, allgemeiner bei Pasch, Habil.-Schrift und genauer J. f. Math. Bd. 76.

157) Gött. Nachr. 1872 und Math. Ann. V.

158) Pasch, J. f. Math. Bd. 76, S. 164.

159) N. Geom. S. 307 ff.

160) Math. Ann. II, S. 213 ff.; V, S. 293 ff.; Gött. Nachr. 1871.

161) Math. Ann. Bd. 15 und 18.

162) J. f. Math. Bd. 97.

163) Math. Ann. Bd. 7; vgl. auch Segre, Math. Ann. Bd. 23.

14. *Die Umgebung eines Komplexstrahles, berührende lineare Komplexe.* Da in einem Komplex von einem Strahl nur ∞^2 Richtungen ausgehn (**3**), muß zwischen den drei Richtungskoordinaten z, α, P eine Beziehung bestehn; sie wurde zuerst von Koenigs gefunden[164]) und läßt sich bei passender Wahl des Koordinatensystems so schreiben:

$$P = z \operatorname{tg} \alpha - m. \qquad (m \text{ const.}) \tag{14}$$

Aus dieser Gleichung kann man eine anschauliche Vorstellung von der Verteilung der Komplexstrahlen in der Umgebung eines regulären oder gewöhnlichen singulären ($m = 0$) Strahles gewinnen.[165]) Die Umgebungen aller Komplexstrahlen, für welche m dasselbe Vorzeichen hat, sind einander im selben Sinne ähnlich, wie man bei der konformen Abbildung von Ähnlichkeit in den kleinsten Teilen spricht. Die Berechnung der „Umgebungsgröße" m findet sich bei Zindler.[166])

Jeder Komplex, der von p ausgehend dieselben Fortschreitungsrichtungen enthält wie der gegebene, heißt *berührend.* Ein Strahl hat ∞^1 berührende lineare Komplexe, die ein Komplexbüschel $\mathfrak{B}$ bilden[167]); das zugehörige Strahlennetz ist für einen regulären Strahl parabolisch (hat zusammenfallende Brennlinien), für einen gewöhnlichen singulären Strahl werden alle berührenden linearen Komplexe singulär und ihre Achsen bilden das Strahlenbüschel (S, σ).[168])

Die Umgebung eines regulären Strahles für die Darstellungsform (11) untersucht Zindler[169]) mit Hilfe eines abbildenden Kegelschnittbüschels, das sich aus der Darstellung des Verteilungsparameters P als Quotienten zweier ternärer quadratischer Differentialformen ergibt. Jeder Komplex des Büschels $\mathfrak{B}$ ist für ∞^1 Richtungen des Komplexes oskulierend, d. h. er enthält die Schmiegungshyperboloide aller Regelflächen des Komplexes, die in einer solchen Richtung von p ausgehn.[170])

15. *Ausgezeichnete Richtungen in einem Komplex.* Unter den Richtungen, die in einem Komplex von einem Strahl ausgehn, gibt es ausgezeichnete, zunächst die drei zu einander senkrechten *Hauptrichtungen,* für welche das Büschel $\mathfrak{B}'$ berührender Komplexe, das einer Nachbargeraden einer solchen Richtung entspricht, mit $\mathfrak{B}$ einen

164) Thèse, Art. 47.

165) Zindler, Verh. des III. intern. Mathematiker-Kongr., 1904 oder Liniengeom. Bd. II, § 41.

166) Liniengeom. Bd. II, § 42. 167) Plücker, N. Geom. Art. 300.

168) Plücker, a. a. O.; Klein, Math. Ann. V, S. 285 ff.

169) Liniengeom. Bd. II. § 48; daselbst, § 57, eine Methode zur Untersuchung der Umgebung eines Doppelstrahls.

170) Koenigs, Thèse, Art. 91.

Komplex, einen „*Hauptkomplex*“, gemein hat.[171]) Verfolgt man stets eine Hauptrichtung, so gelangt man zu einer *Hauptfläche* des Komplexes. Es gibt auf einem Komplexstrahl p vier Punkte, für deren Komplexkegel p ein Wendestrahl ist.[172]) Durch Verfolgung der entsprechenden „*Wenderichtungen*“ gelangt man zu ausgezeichneten abwickelbaren Flächen des Komplexes[173]), den „*Wendeflächen*“. Andere ausgezeichnete Richtungen und lineare Richtungsbüschel (3) hat Zindler[174]) angegeben, darunter das isotrope Richtungsbüschel, dessen Richtungen so liegen, wie in der Umgebung eines isotropen Kongruenzstrahles.

16. *Differentialgleichungen eines Komplexes; ausgezeichnete Zerlegungen.* Eine in x', y', z' homogene Differentialgleichung

$$\Omega(x, y, z;\ x', y', z') = 0, \tag{15}$$

wobei x, y, z als Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen t gedacht sind und die Striche Ableitungen nach t bedeuten, heißt nach Lie[175]) eine Mongesche Gleichung. Wenn insbesondere F in x', y', z' linear ist, erhalten wir (nach Multiplikation mit dt) eine totale Differentialgleichung, die auch Pfaffsche Gleichung heißt. Wenn ein Funktionentripel x, y, z der Gleichung (15) genügt, so heißt die entsprechende Kurve eine Integralkurve der Mongeschen Gleichung. Diese selbst bestimmt für jeden Punkt des Raumes einen Elementarkegel, d. h. einen Kegel von Fortschreitungsrichtungen, die für die Integralkurven durch diesen Punkt daselbst vorgeschrieben sind. Zu jedem Linienkomplex gehört eine Mongesche Gleichung: Es sei

$$F(p_1, \cdots p_6) = 0$$

die Gleichung eines algebraischen Komplexes in rechtwinkligen homogenen Plückerschen Koordinaten, nämlich

$$p_1 = x_2 - x_1, \qquad p_2 = y_2 - y_1, \qquad p_3 = z_2 - z_1,$$
$$p_4 = y_1 z_2 - y_2 z_1, \qquad \cdots\cdots$$

Dann lautet die zugehörige Mongesche Gleichung:

$$F(x', y', z';\ yz' - zy', \cdots) = 0. \tag{16}$$

Aber umgekehrt gehört zu einer Mongeschen Gleichung nur dann ein Komplex, wenn unter ihren Integralkurven ∞^3 Gerade vorkommen. Die Bedingung dafür ist eben die, daß sich die Mongesche Gleichung

171) Klein, Math. Ann. V, S. 271; Koenigs, Thèse, Art. 92 f.

172) Voss, Math. Ann. IX. 173) Koenigs, Thèse, Art. 96.

174) Liniengeom. Bd. II, § 48.

175) Geom. d. Berührungstransf. S. 178.

auf die Form (16) bringen läßt, wobei F eine homogene Funktion sein muß.[176]) Die Theorie der Linienkomplexe steht auch mit der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung in Zusammenhang; hierüber vergleiche man Lie[177]) oder Jessop.[178])

Mit der Aufsuchung der parabolischen Kongruenzen eines Komplexes befaßt sich Klein.[179]) Die Frage nach den Normalenkongruenzen eines Komplexes wurde schon von Malus (in etwas anderer Form) aufgeworfen[180]) und von Transon[181]) wieder aufgenommen. Die Frage nach den isotropen Kongruenzen eines Komplexes behandelt Cosserat[182]) und führt sie auf die Frage zurück, ob zwei gewisse partielle Differentialgleichungen eine gemeinsame Lösung haben. Dasselbe Problem führt bei der Darstellung (11) auf eine totale Differentialgleichung[183]), deren Integrierbarkeit zugleich über die Möglichkeit entscheidet, den Komplex in ∞^1 isotrope Kongruenzen zu zerlegen. Das Strahlengewinde enthält keine isotrope Kongruenz; seine Normalenkongruenzen findet Picard.[184])

17. *Regelflächen und Kurven eines Komplexes.* Eine Kurve, deren sämtliche Tangenten einem Komplex angehören, heißt eine Kurve des Komplexes. Die Tangenten selbst bilden eine abwickelbare Fläche des Komplexes. Alle Komplexkurven mit einem gemeinsamen Linienelement haben daselbst die Berührungsebene des Komplexkegels dieses Elementes als gemeinsame Schmiegungsebene[185]), alle Kurven eines Nullsystems (Strahlengewindes), die durch denselben Punkt gehn, haben dort gleiche Torsion.[186]) Bei Komplexen höheren Grades hat Demoulin Komplexkurven mit einem gemeinsamen Linienelement betrachtet[187]) und gefunden, daß zwischen ihrer Krümmung und Torsion im Punkte dieses Elementes eine lineare Beziehung besteht.

176) Lie, a. a. O. S. 252 f.

177) a. a. O. Abschn. II, Kap. 7 u. Abschn. III.

178) A treatise on the Line Complex, Cambridge, 1903, Chap. 18.

179) Math. Ann. Bd. V, S. 290; daselbst in der Anm. der Anteil Lies an diesem Problem. Über die parabolischen Kongruenzen des Strahlengewindes vgl. Lie, Christ. Vidensk. Forh. 1882; Peter, Dissert. Leipzig 1895 (oder Archiv for Math. og Naturv. 17) und Lagally, Diss. München 1903.

180) vgl. 1. 181) J. de l'Éc. polyt. cah. 38, t. 22 (1861).

182) Toulouse, Mém. (9) IV (1892). 183) Zindler, Liniengeom. Bd. II, § 49.

184) Thèse, Art. 21 (1877).

185) Lie, Christ. Vidensk. Vorh. 1871 oder Geom. d. Berührungstransf. S. 303.

186) Lie, Christ. Vidensk. Vorh. 1883 oder Geom. d. Berührungstransf. S. 231; diesen Satz benützt Mehmke zur Untersuchung der Torsion der Raumkurven dritter Ordnung (Mitt. d. math.-naturw. Vereins in Württemberg, IV, 1891).

187) Comptes R. Bd. 124 (Mai 1897), S. 1077; der entsprechende Satz in der Geom. d. Berührungstransf. S. 308 ist unrichtig.

Man kann von einer Integralkurve einer Mongeschen Gleichung (16) verlangen, daß sie in jedem ihrer Punkte eine geringere Krümmung haben soll als alle anderen sie daselbst berührenden Integralkurven. Eine solche Kurve heißt eine „*geradeste* Linie“ der Mongeschen Gleichung.[188]) Die Aufgabe, zwischen zwei Punkten des Raumes die kürzeste Integralkurve einer gegebenen Mongeschen Gleichung zu finden, führt nicht immer auf eine geradeste Linie; denn es gibt ∞^4 kürzeste, aber nur ∞^3 geradeste Linien. Recht deutlich wird der Unterschied im Falle der Linienkomplexe, wo die Geraden zugleich die Geradesten sind. Die kürzesten Linien des Strahlengewindes hat Liebmann[189]) untersucht. Dieses Beispiel hat für die Variationsrechnung Interesse, indem es den einfachsten anschaulichen Fall darstellt, wo eine Nebenbedingung in Form einer nicht integrierbaren totalen Differentialgleichung auftritt.

Die Regelflächen (samt ihren Haupttangentenlinien) und Kurven eines Strahlengewindes untersucht Picard[190]): er findet u. a., daß die Undulationspunkte einer solchen Kurve zugleich Wendepunkte sind[191]) und bestimmt alle im Gewinde enthaltenen Regelflächen mit algebraischen Haupttangentenkurven.[192]) Die algebraischen Kurven eines Nullsystems behandelt auch Steinmetz.[193]) Die Kurven des tetraedralen Komplexes bestimmt Lie.[194])

18. *Die Transformation von Lie.*[195]) Seien die Gleichungen einer Geraden

$$rz = x - \varrho, \quad sz = y - \sigma$$

und die einer Kugel

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = R^2,$$

so kann man r, s, ϱ, σ als Koordinaten der Geraden und x', y', z', R als Koordinaten der Kugel betrachten. Indem man die Größen des einen Quadrupels irgend welchen Funktionen des anderen gleichsetzt, erhält

188) Für Pfaffsche Gleichungen („Punkt-Ebenensysteme“) hat Voss (Math. Ann. Bd. 23) die Differentialgeometrie entwickelt.

189) Math. Ann. Bd. 52 (1899).

190) Thèse, 1877; vgl. auch Voss, Math. Ann. Bd. 12 u. Lie, ib. Bd. 5, S. 179.

191) a. a. O. S. 7

192) a. a. O. S. 30.

193) Am. J. of Math. Bd. 14, 1892.

194) Geom. d. Berührungstransf. S. 326.

195) Vgl. auch Klein, Vorl. über höhere Geom.; Lie und Scheffers, Geom. d. Berührungstransf. Kap. 10; Jessop, Line Complex, Chap. XII.

man eine Abbildung der Kugelmannigfaltigkeit auf den Linienraum. Um eine ausgezeichnete Abbildung zu erhalten, setzt Lie[196])

$$x' = \varrho + s, \quad iy' = \varrho - s, \quad z' = \sigma - r, \quad \pm R = \sigma + r;$$

also:

$$\varrho = \tfrac{1}{2}(x' + iy'), \quad s = \tfrac{1}{2}(x' - iy'), \quad \sigma = \tfrac{1}{2}(z' \pm R), \quad r = -\tfrac{1}{2}(z' \mp R).$$

Jeder Geraden entspricht eine Kugel, einer Kugel entsprechen zwei Gerade. Den Geraden eines Strahlenbüschels entsprechen Kugeln, die sich in einem Punkte berühren[197]), einem Flächenelement also wieder ein solches. Einer Fläche f entspricht eine andere F, u. zw. entsprechen den Haupttangenten von f diejenigen im entsprechenden Flächenelement berührenden Kugeln, welche die Hauptkrümmungshalbmesser als Radien haben (die „Hauptkugeln").[198]) Einer Regelfläche entspricht eine Kugel-Enveloppe (Röhrenfläche), insbesondere einer Haupttangentenkurve von f und der zugehörigen abwickelbaren Fläche eine solche Röhrenfläche, welche F längs einer Krümmungslinie berührt. Man kann also sagen, daß die Haupttangentenkurven in die Krümmungslinien abgebildet werden.

Diese Transformation wurde zur Untersuchung der Haupttangentenkurven der Kummerschen Fläche angewendet[199]) und zur Untersuchung der Flächen mit sphärischen Krümmungslinien[200]); sie wurde von Duporcq[201]) und Bricard[202]) verallgemeinert; es können nämlich den Geraden diejenigen Flächen zweiter Ordnung zugeordnet werden, die einer festen solchen Fläche (anstatt dem unendlich fernen Kugelkreis) umschrieben sind. Die Liesche Transformation ist eine Berührungstransformation; eine andere solche, bei der Normalenkongruenzen ineinander übergehn, findet Goursat.[203])

196) Math. Ann. V, S. 171.
197) a. a. O. S. 172.
198) a. a. O. S. 177.
199) Lie, a. a. O. S. 178; Klein, Gött. N. 1871.
200) Lagally, Diss. München, 1903.
201) Bull. de la Soc. math. de France, Bd. 27.
202) Nouv. Ann. (4) V, 1905.
203) Comptes R. Bd 129.

Über Stetigkeit und Meßbarkeit.

Von K. Th. Vahlen in Greifswald.

Aus Hilberts „Grundlagen der Geometrie“ geht hervor, daß man bei der Begründung der projektiven Geometrie die Annahme der Dedekindschen Stetigkeit durch das nach Veronese in ihr enthaltene, weniger fordernde archimedische Axiom der Meßbarkeit ersetzen kann. In meiner „Abstrakten Geometrie“ habe ich gezeigt, daß auch das Axiom der Meßbarkeit noch mehr enthält, als für den angegebenen Zweck erforderlich ist, und habe den für diesen Zweck notwendigen und hinreichenden „Grundsatz der relativen Dichte“ eingeführt. Obgleich damit die Stetigkeit für die Hauptzwecke meines Buches in den Hintergrund tritt, schien es mir doch von Interesse dieselbe in ihre Bestandteile zu zerlegen, von denen der eine: die Meßbarkeit bereits bekannt ist; den andern will ich vorläufig „reine Stetigkeit“ nennen. Es hätte sich nun auch die „reine Stetigkeit“ zur Begründung der projektiven Geometrie geeignet zeigen können. Nachdem ich mich von dem Gegenteil überzeugt hatte, habe ich mich in Hinblick auf die *geometrischen* Ziele meines Buches bei den *arithmetischen* Beziehungen der reinen Stetigkeit zur Dedekindschen, zur Veroneseschen und zu den Axiomen der Arithmetik nicht weiter aufgehalten. Auch leidet meine Definition der reinen Stetigkeit an einem formalen Mangel.[1]) Derselbe ist zwar leicht zu beseitigen, hat aber zu Mißverständnissen geführt, die ich hier in Kürze aufklären will.

Meine Definition der Stetigkeit hat zu lauten:

(1) Eine linear geordnete Menge M heißt stetig, wenn jedes durch Ordnungsbeziehungen (teils von der Form $x \geqq a$, teils von der Form $x \leqq b$[2])) in bezug auf Dinge $a, b, \ldots$ von M definierbare Ding x ein Ding von M ist.

---

1) In den geometrischen Teilen meines Buches wird nicht *reine*, sondern Dedekindsche Stetigkeit verwendet. Im arithmetischen Teile sind die wenigen Sätze, welche sich auf *reine* Stetigkeit beziehen, trotz der mangelhaften Definition nicht mißzuverstehen; auch kommen diese Sätze in den geometrischen Teilen nicht zur Anwendung. Mein Buch leidet daher keineswegs, wie Herr Schönflies (p. 31) meint, an einem „prinzipiellen Mangel, der im arithmetischen, wie im geometrischen Teil die Folgerichtigkeit der Entwicklungen vielfach stört.“ Man kann alles auf reine Stetigkeit Bezügliche weglassen, und es bleiben für die projektive Geometrie drei, für die hyperbolische Geometrie zwei, für die übrigen Geometrien je eine strenge Begründung übrig.

2) Durch den eingeklammerten Zusatz wird der formale Mangel beseitigt. — Wenn ich (l. c. p. 9 Anmk.) sagte, meine Stetigkeit stimme mit der von Veronese

Diese Definition ist in folgenden Formen auf Gruppen und Zahlensysteme zu übertragen:

(2) Eine linear geordnete Gruppe G heißt stetig, wenn jedes durch Ordnungsbeziehungen (usw.) in Beziehung auf Elemente $a, b, \ldots$ von G definierbare *Element* ein Element von G ist.

(3) Ein linear geordnetes Zahlensystem S heißt stetig, wenn jede durch Ordnungsbeziehungen (usw.) in Beziehung auf Zahlen $a, b, \ldots$ von S definierbare *Zahl* eine Zahl von S ist.

Demnach stimmt meine Definition (1) mit der von Zahlensystemen auf Mengen sinngemäß übertragenen Dedekindschen inhaltlich überein. Aber die Definitionen (2) und (3) sind von ihr verschieden, da dieselben Lücken zulassen und z. B. bei den Veroneseschen nicht-meßbaren Zahlen $ax^\alpha + bx^\beta + \cdots$ ($\alpha < \beta < \cdots$, $a, b, \ldots$ alle reellen Zahlen) zutreffen.

Übrigens genügt die bloße Abwesenheit von Lücken nicht, um ein nach (2) oder (3) stetiges System zu einem meßbaren zu machen; vielmehr sind hierzu außer einigen Verknüpfungsaxiomen noch weitere arithmetische Axiome notwendig. Ich komme hierauf bei anderer Gelegenheit ausführlich zurück.

Greifswald, Februar 1906.

Paradoxien der Mengenlehre.

Von A. Korselt in Plauen i. V.

Der Aufsatz „über die logischen Paradoxien der Mengenlehre" von Herrn Schönflies im vorigen Hefte gibt mir zu folgenden Bemerkungen Anlaß.

Begriffe (oder Vorstellungen überhaupt), *für die der Satz des Widerspruches versagt, sind sowohl Gegenstand als Hilfsmittel der Betrachtung.*

Denn eben um diese ihre Beschaffenheit festzustellen, muß man die Vorstellungen *haben*, sie also betrachten. Will man etwa beweisen,

---

überein, so konnte damit nur die Übertragung meiner Definition auf *Gruppen* (s. oben (2)) gemeint sein, da die Veronesesche Stetigkeit sich ebenfalls nur auf Systeme mit Addition und Subtraktion bezieht. Dies ging auch daraus hervor, daß später von mir als stetig bezeichnete Systeme nur Veronesesche Stetigkeit besitzen. Wenn ich ferner sagte, „diese Stetigkeit ist verschieden von derjenigen Dedekinds, welche die Meßbarkeit mit umfaßt", so hatte ich dabei natürlich, da bei *Mengen* von Meßbarkeit keine Rede ist, nur den üblichen Ausspruch der Dedekindschen Stetigkeit für *Zahlensysteme* im Auge, die also nur mit der Übertragung meiner Definition auf Zahlensysteme (s. oben (3)) verglichen werden kann.

daß es kein reguläres euklidisches Siebenflach gibt oder daß die Gleichung $x^n + y^n + z^n = 0$ für $n > 2$ keine ganzzahlige Lösung hat, so *muß* man die imaginären (widerspruchsvollen, sich widerstreitenden) Vorstellungen: reguläres euklidisches Siebenflach, ganzzahlige Lösung der Gleichung $x^n + y^n + z^n = 0$ betrachten. Solche Beweise kommen auf jeder höheren Stufe der Mathematik vor.

Richtig ist nur: wenn man einmal die Leerheit einer Vorstellung a erkannt hat, wird man keinen Satz „es sei ein x ein Gegenstand von a“ mehr als Prämisse benutzen, denn daraus ließen sich nicht nur die gerade gewünschten, sondern jeder beliebige Satz ableiten. So ist z. B. der Satz:

wenn $2 \cdot 2 = 5$ ist, so gibt es Hexen,

eine Wahrheit, ja überhaupt jeder Satz:

aus a folgt b,

falls a ein gegenstandsloser oder falscher Satz ist. Man muß sich nur hüten, aus dem letzteren Satze zu folgern:

also ist b wahr.

Gewisse Sätze und Vorstellungen wird man unmittelbar als gegenständlich anerkennen müssen (z. B. die Schlußregel Barbara), denn mit irgend etwas Gegebenem muß jeder Beweis beginnen. Welcher Mathematiker wird seinen Beweisen immer die Voraussetzung hinzufügen: „falls es Wahrheit und Beweise von Wahrheiten überhaupt gibt“?

Das Russellsche Parodoxon scheint jetzt manche Mathematiker so eingeschüchtert zu haben, wie früher die Frage: was ist Wahrheit? manche Philosophen. Was beweist es denn eigentlich? Nichts weiter, als daß mit einer Vorstellung a nicht immer auch die Vorstellung „Allheit, Inbegriff, Gesamtheit der a“ gegenständlich oder gar widerspruchsfrei (Bolzano sagt dafür real) zu sein braucht. Das ist aber nicht mit allen Vorstellungen der Fall, kann uns also nicht an der Verwendung der Begriffe „etwas“, „das All“ hindern, wie Hilbert glaubt. Wenn der Begriff „etwas überhaupt“ nicht mehr als gegenständlich gelten sollte, so wäre es mit jedem Denkzusammenhang vorbei. In unzähligen Fällen läßt er sich gar nicht umgehen. Dasselbe gilt von der Vorstellung „Allheit von —“.

Es gibt Mehrheiten, die sich selbst als Glied enthalten.

Eine solche Menge ist z. B. gleich „das All“. Aber auch die von „All“ verschiedene Menge M mit folgenden Beschaffenheiten:

α) M umfaßt gewisse zwei Gegenstände, z. B. diesen meinen Federhalter und diese Lampe;

β) werden mehrere Gegenstände von M umfaßt, so gilt dasselbe von dem Inbegriff dieser Gegenstände;

γ) M wird von allen Mengen umfaßt, die die Beschaffenheiten α) β) haben,

gehört hierher. In der Vorstellung dieser Menge M finde ich keinen Widerspruch. Daß sie bisher nicht vorgekommen ist und vielleicht auch nicht viel Folgerungen gestattet, ist kein Grund, ihre Vorstellung zu verbieten. Ihre Auffassung, wie auch die Betrachtung einer noch so seltsamen Vorstellung, dient jedenfalls dazu, unsere Einsicht in den Zusammenhang der Wahrheiten zu vermehren.

Man wird künftig gewöhnliche, sich selbst nicht umfassende und ungewöhnliche, sich selbst umfassende Mehrheiten unterscheiden.

Daß „die zu einer Menge zusammengefaßten Elemente begrifflich invariant bleiben" ist ein dunkler Ausdruck, der vielleicht so zu deuten ist: bildet man eine Menge durch *Aufzählung* ihrer Glieder (extensiv), so hat man von jedem derselben eine Einzelvorstellung, in deren Inhalt die Vorstellung dieser Einzelvorstellung nicht auftritt. Man hat von jedem Elemente eine Vorstellung mit einer *endlichen* bestimmten Anzahl von Bestandteilen. Anders ist es, wenn eine Menge begrifflich (intensiv) bestimmt wird. Wer von „der Anzahl der Menschen im Jahre 1905" spricht, bildet sich nicht 1500 Millionen Einzelvorstellungen. Nur bei dieser Art der Bestimmung können Widersprüche entstehen.

Keine Definition wird mit der Klausel versehen: „falls die eingeführte Vorstellung widerspruchsfrei ist", vielmehr werden einige Begriffe sofort an sich selbst als gegenständlich eingesehen, von anderen wird dies mit Hilfe der ersteren bewiesen. Nur soll man nicht glauben, daß die Definition einer Vorstellung schon deren Gegenständlichkeit verbürge. Der Mathematiker kommt so zu der der Kantschen entgegengesetzten Überzeugung, daß „Gegenständlichkeit" ebensogut eine Beschaffenheit einer Vorstellung ist wie andere auch.

Deshalb ist es ganz willkürlich und aussichtslos, die Begriffe „alles" und „nichts" von der Betrachtung ausschließen zu wollen, weil sie „nicht Gegenstand logischer Operationen sein können". Das wird schon durch den Umstand widerlegt, daß sie überhaupt gedacht werden und daß sie in den Werken der exakten Logik von Peano und Schroeder unbezweifelbare und unersetzliche Dienste leisten Warum sollte es auch nicht niedrigste und höchste Vorstellungen geben? Oder man lege uns erst einen klaren Begriff von „logischen Operationen" vor.

Hilberts Versuch (Verh. des zweiten intern. Math. Kongr. 1905, S. 174), diese Vorstellungen zu umgehen, arbeitet mit Erschleichungen.

Wie bisher werden auch in Zukunft die Logiker und Mathematiker mit einer *endlichen* Anzahl von Schlüssen operieren; unsere beschränkte menschliche Natur läßt uns nur solche Vorstellungen und Sätze auffassen, die endlich viele Bestandteile haben. Herr Schoenflies verwechselt hier wohl eine Vorstellung von unendlich vielen Gegenständen mit einer unendlichen Vorstellung und *einen* Schluß über „jeden" dieser Gegenstände mit einer unendlichen Menge von Sätzen über die einzelnen Gegenstände. Nicht in der (unmöglichen) Auffindung unendlicher Schlußketten, sondern in der Entdeckung neuer Begriffe oder Vorstellungen überhaupt mit unendlich vielen Gegenständen besteht eine Bereicherung der logischen Methoden.

Daß, falls $S_1, S_2, \cdots S_\nu \cdots$ „Bewegungen" und

$$S_\omega = S_1 . \; S_2 . \; \cdots S_\nu \cdots$$

eine 1—1-deutige Transformation ist, auch S_ω eine „Bewegung" sei, kann ich nicht für evident halten. Warum soll sich S_ω auch in jener Gruppe befinden, die Hilbert „Bewegungsgruppe" nennt? Der Satz ist wahrscheinlich falsch, oder er gibt eine Einschränkung des schon festgesetzten Begriffs „Bewegung". Überhaupt leidet die Hilbertsche Behandlung von „Bewegung" (Math. Ann. 56) an logischen Mängeln, die mit einiger, aber nicht mit der möglichen logischen Schärfe Herr Wilson (the so-called foundations of geometry, Archiv für Math. und Physik III, 6) angegeben hat.

Darnach kann ich in dem Russellschen Paradoxon keine Ursache zum Zweifel an den Grundwahrheiten der Mengenlehre finden. Wohl aber sind ihre abgeleiteten Sätze bis jetzt zum Teil ungenügend bewiesen, insbesondere die Sätze über Summen, Produkte und Potenzen von Mächtigkeiten[1]), soweit man, wie in den deutschen Darstellungen, die mathematische Logik beiseite läßt. Es wird nämlich immer von „einer Kardinalzahl (Mächtigkeit) a", von der „Summe mehrerer Anzahlen" usw. gesprochen, ohne daß man die Vorstellung „Kardinalzahl" definiert. Denn die Aussage: „gewisse Mengen haben dieselbe Mächtigkeit wie eine Menge a, wenn die Glieder jeder derselben mit den Gliedern von a 1—1-deutig paarbar sind", erklärt nicht das Wort „Mächtigkeit", sondern den Sinn einer ganzen Redensart, von der das Wort „Mächtigkeit" nur ein Teil ist. So wird auch in der Geometrie, wenn man streng verfährt, nicht die *Vorstellung* „unendlich ferner Punkt", sondern der *Satz:* „mehrere Gerade haben einen unendlich fernen Punkt gemein" definiert.

1) Bolzano sagt für Mächtigkeit: Weite einer Vorstellung.

Nur wenn man mit **Russell** sagt: Anzahl der Menge a heißt die Allheit der Mengen, die „gleiche Anzahl mit a haben", hat man eine Deutung des Wortes „Anzahl". Die Beweise jener Sätze bedürfen dann aber einer Umgestaltung.

Nach dem bisher Gesagten ist der Cantorsche Satz:

zu jedem Inbegriffe a gibt es einen Inbegriff von höherer Mächtigkeit

und sein Beweis falsch, denn beide versagen für $a =$ das All. Ob der eingeschränktere Satz:

zu jedem vom All verschiedenen Inbegriffe gibt es einen ebenfalls vom All verschiedenen Inbegriff höherer Mächtigkeit

wahr ist, scheint mir noch recht der Prüfung bedürftig und würdig zu sein.

Bemerkung zu W. Wien: Über die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik.

Von E. Haentzschel in Berlin.

Am Schlusse seines im Januarheft dieses Bandes abgedruckten Referates (S. 51) fordert Herr W. Wien zur Berechnung *halbkonvergenter* Reihen für die *Funktionen des elliptischen Zylinders* auf, die nach Herrn Thomé sich in der Form

$$e^{g(z)} z^{r}\left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \cdots\right)$$

darstellen würden. Ich möchte dazu bemerken, daß ich diese Aufgabe in zweifacher Hinsicht gelöst habe.

Erstens in der von Herrn Wien auf S. 49 in der Fußnote selbst angeführten Programmabhandlung der 3. städtischen höheren Bürgerschule (3. Realschule) zu Berlin, Ostern 1889; Programm Nr. 106. Dort stelle ich *zwei* von einander *verschiedene* Fundamentalsysteme von Integralen auf, welche Potenzreihen enthalten, die nach Potenzen von $\frac{1}{\sin\eta}$ bez. $\frac{1}{\sin i\eta}$ fortschreiten; das zweite partikuläre Integral besitzt in jedem Falle eine logarithmische Unstetigkeit. Die Untersuchung habe ich in solcher Allgemeinheit geführt, daß sie die *Besselschen Funktionen* als Grenzfall in sich schließt, und für diese zwei neue, bis dahin unbekannte asymptotische Reihen liefert. Sollte eine gewisse Konstante verschwinden und dadurch die logarithmische Unstetigkeit aus der Darstellung herausfallen, so entsteht ein Fundamentalsystem von Integralen, das im Grenzfalle der *Besselschen Funktionen* mit dem von

Poisson übereinstimmt, in dem die Integrale sich in geschlossener Form darstellen lassen.

Zweitens habe ich, angeregt durch eine Arbeit des Herrn H. Bruns in den Astron. Nachrichten, gleichzeitig eine andere Darstellung der *Funktionen des elliptischen Zylinders* gegeben, indem ich durch Einführen der Variable

$$u = e^{i\eta}$$

die Differentialgleichung in die merkwürdige, in Beziehung auf $v = \frac{1}{u}$ sich selbst reziproke Form brachte

$$u^4 \frac{d^2 z}{du^2} + u^3 \frac{dz}{du} - \left[\frac{h^2}{4}(\beta u^2 - \alpha)^2 + \nu^2 u^2\right] z = 0.$$

Die Integrale haben die Form

$$z_1 = c' \sqrt{u}\, e^{\pm \frac{h\alpha}{2u}} \left\{1 \pm \frac{n}{1!}\left(\frac{u}{h\alpha}\right) + \frac{n(n+2)}{2!}\left(\frac{u}{h\alpha}\right)^2 \pm \cdots\right\}$$

$$z_2 = c'' z_1 \mp u^{\frac{3}{2}} e^{\mp \frac{h\alpha}{2u}} B\mathfrak{P}(u) + z_1 B \int \frac{du}{u} e^{\mp \frac{h\alpha}{u}}$$

und stellen *zwei verschiedene* Fundamentalsysteme dar mit logarithmischer Unstetigkeit. Für $B = 0$ fällt dieselbe heraus und führt auf zwei Thoméscher Normalintegrale. Für $\alpha = 0$ erhält man wieder die *Besselsche Transzendente* mit dem schon oben für $B = 0$ charakterisierten Poissonschen Fall. Ich habe diese Entwickelungen, die ich schon 1887 Kronecker übergab, 1893 im 5. Teil (S. 94—134) meiner *Studien über die Reduktion der Potentialgleichung auf gewöhnliche Differentialgleichungen, Berlin, G. Reimer,* veröffentlicht, deren 6. Teil (S. 135—180) die aus der Untersuchung der Differentialgleichung

$$\Delta u + \beta^2 \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

hervorgehenden *Heineschen Funktionen*, einschließlich der *hyper-Besselschen Transzendente* enthält, und auch diese teils durch geschlossene Integrale, teils durch halbkonvergente oder asymptotische Reihen zur Darstellung bringt.

Zur Statistik des mathematischen Studiums.

Die Zahl der Studierenden der Mathematik an den preußischen Universitäten betrug in runder Zahl im Sommersemester

1901	1902	1903	1904	1905
1000	1200	1420	1440	1510.[1]

Sie ist also im letzten Jahre wiederum gewachsen. Dagegen begannen die allgemeinen Aussichten sich mehr und mehr zu verschlechtern. Ein Mangel an Lehrkräften ist höchstens noch teilweise vorhanden. Voraussichtlich wird er zu der Zeit, in der die jetzt vorhandenen Studierenden in den Schuldienst eintreten können, überall geschwunden sein. Nur der Fluß, in dem sich die Unterrichtsreform augenblicklich befindet, erschwert es, ein sicheres Urteil hierüber abzugeben. Immerhin hält sich die statistische Kommission der Deutschen Mathematiker-Vereinigung für verpflichtet, ihre frühere Warnung in dem Sinne zu wiederholen, daß die bloße Aussicht, in Kürze zur Anstellung zu gelangen, niemanden zum Studium der Mathematik bestimmen sollte. Wer aus solchen äußerlichen Motiven das mathematische Lehrfach ergreift, wird zweifellos Enttäuschungen erfahren.

Die allgemeine Situation geht deutlicher aus folgenden Ziffern hervor, die zeigen, daß die Zahl der Probanden und Seminaristen schon jetzt dem normalen Bedarf in jeder Hinsicht entspricht. Am 1. Mai 1902, 1903, 1904, 1905 gab es an den höheren Unterichtsanstalten

Preußens[2])	1902	1903	1904	1905
Seminarmitglieder	41; 4	82; 17	107; 29	141; 23
Probanden	32; 11	42; 4	78; 26	112; 25
Anstellungsfähige Kandidaten	16; 5	12; 3	16; 5	23; 6 .

Ein dauerndes Anwachsen dieser Zahlen ist für die nächsten Jahre mit Bestimmtheit zu erwarten.

Für dieselben Jahre betrug in Preußen die Zahl der

Neuanstellungen	39; 19	61; 16	49; 14	91; 21
Ausscheidungen aus dem Amt	40; 4	26; 13	43; 9	39; 7 .

Die Zahl der Seminaristen und Probanden ist also schon erheblich größer als die höchste Zahl der Neuanstellungen, die die letzten Jahre aufweisen. Dieses Verhältnis wird sich immer weiter in der gleichen ungünstigen Richtung verschieben.

1) Die Zählung erstreckt sich nur auf diejenigen, die die deutsche Staatsangehörigkeit besitzen. Sie kann immerhin um einige Prozente ungenau sein.

2) Die zweite Zahl bezieht sich auf diejenigen, die in der Mathematik die Lehrbefähigung nur für die zweite Stufe besitzen.

Mitteilungen und Nachrichten.

Geeignete Mitteilungen wird der Herausgeber stets mit größtem Danke entgegennehmen.

1. Akademien. Gesellschaften. Vereinigungen. Versammlungen.

Veränderungen im Personalbestande der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Februar 1906.

Neu aufgenommen als Mitglieder:

Dr. Johannes Mollerup, Assistent an der Technischen Hochschule, Kopenhagen.
Seminar-Professor Gyula Lechnitzky, Maramarossziget (Ungarn).

Gestorben:

Stammer, W., Professor, Düsseldorf.

Ausgetreten:

Westphal, A., Professor, Abteilungsvorsteher am k. Geodätischen Institut, Potsdam.

Adressenänderungen:

Cardinaal, J., Professor a. d. Techn. Hochschule, Delft, Oude Delft 47.
Czuber, E. *H.R.*, Prof. a. d. Techn. Hochschule Wien XIII, Auhofstr. 34.
Dohmen, F. J., Dr., Austin, Texas, Whites Avenue. 1913.
Engel, F., Professor a. d. Universität, Greifswald, Arndtstr. 11.
Frobenius, G., Professor a. d. Univers. Berlin; Charlottenburg, Leibnizstr. 83.
Gibson, G. A., Professor am Glasgow and West of Scotland Technical College, Glasgow, Sandyford Place 8.
Herberich, G., Dr., k. Inspektor der städtischen höheren Mädchenschule, Nürnberg, Am Maxfeld 11.
Jirgensen, N., Mag. sc., a. d. Nordisk Livsforsikrings A.-S. af 1897, Kopenhagen, Kongens Nytorv 8.
Kleiber, J., Hauptlehrer a. d. Handelsschule, München, Thierschstr. 21.
Müller, Hans, Dr., Göttingen, Nikolausbergerweg 49.
Steinitz, E., Professor, Dozent a. d. Techn. Hochsch., Berlin W 50, Nachodstr. 38.
Vries, H. de, Professor a. d. Techn. Hochsch., Delft, Oranjeplantage 39.
White, H., Professor a. d. Vassar College, Poughkeepsie, N. Y.
Wolletz, K., Professor am Maximilians-Gymn., Wien IX, Porzellangasse 21.
Worm, H., Oberlehrer a. d. Fürstenschule, Meißen, Freiheit 16.

Berliner Mathematische Gesellschaft. *Sitzung am Mittwoch den 28. Februar 1906.* Fuchs: Über lineare Differentialgleichungen 3. Ordnung mit nur wesentlich singulären Stellen. — Jolles: Die Fokaltheorie der linearen Kongruenz. — Haentzschel: Über die Genauigkeit geometrischer Konstruktionen. *Sitzung am Mittwoch den 28. März 1906:* Hessenberg, Über die Projektion des räumlichen Punktgitters — Valentin, Beweis des Goldbachschen Satzes. — Denizot, Zur Kritik der Theorie des Foucaultschen Pendels.

Mathematisches Kränzchen zu Karlsruhe i. B. Vorträge im Wintersemester 1905/06: 7. November 1905: Ludwig, Über Photogram-

metrie. — 28. November 1905: Krazer, Über komplexe Multiplikation. — 12. Dezember 1905: Schur: Über die Bewegung des starren Körpers. — 9. Januar 1906: Winkelmann, Über die Stabilität eines rotierenden Körpers. — 23. Januar 1906: Sieveking, Über die Geschwindigkeit der Röntgen-Strahlen. — 6. Februar 1906: Tolle, Impulspaar, Trägheits- und Spannungsellipsoid. — 20. Februar 1906: Heun, Über angenäherte Differentiation und Integration. — 6. März 1906: Faber, Über die Genauigkeit logarithmischer Rechnungen.

Mathematische Sektion der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Kultur. *Sitzung am 19. Februar 1906:* Vogt, Der Pythagoreische Lehrsatz in der ältesten Geometrie der Indier. — Rosanes, Eine analytisch-geometrische Bemerkung.

San Francisco Section of the American Mathematical Society. Die neunte ordentliche Versammlung der genannten Sektion wurde am 24. Februar 1906 in der Stanford Universität abgehalten. Folgende Vorträge wurden gehalten: J. H. McDonald, The theory of the reduction of hyperelliptic integrals of the first kind and of genus 2 to elliptic integrals by a transformation of the nth order; W. A. Manning, On multiply transitive groups; A. Ranum, A new kind of congruence-group and its application to the group of isormorphisms of any abelian group; D. N. Lehmer, On the orderly listing of substitutions; D. N. Lehmer, Note on the values of z of given modulus which give maximum or minimum values to the modulus of a given rational integral function of z; R. E. Allardice, Note on Legendre's equation; E. J. Wilczynski, Outline of a projective differential geometry of curved surfaces; E. T. Bell, Method of dealing with the problems connected with prime numbers; T. M. Putnam, Theorems on perfect numbers; J. H. McDonald, A method of simultaneous approximation to two consecutive roots of an algebraic equation of degree n all of whose roots are real; J. H. McDonald, Remark on the calculation of roots of Bessel functions; M. W. Haskell, On collineations; G. A. Miller, Groups in which every subgroup of composite order is invariant, and a new chapter in trigonometry; G. A. Miller, The groups which contain exactly thirteen operators of order 2. — Die nächste Versammlung der Section wird am 29. September 1906 in der Universität von Californien stattfinden.

G. A. Miller.
Secretary of the Section.

The Missouri Society of teachers of mathematics. Die zweite Versammlung dieser Gesellschaft fand am 27.—28. Dezember 1905 in Jefferson City statt. Folgende Vorträge wurden gehalten: Dean, Maxima and Minima; Glenn, Laboratory methods in algebra teaching; Wilson, The treatment of limits in elementary geometry. Ferner fand eine Diskussion statt über die Frage: What should be taught in arithmetic? — Es wird eine Erweiterung der Gesellschaft in der Weise geplant, daß sie auch die Lehrer der exakten Wissenschaften des Staates Missouri umfassen soll.

The British Association for the advancement of science wird ihre diesjährige Tagung am 1. August in York beginnen; sie feiert gleichzeitig ihr 75jähriges Bestehen. Der Präsident der gesamten Association ist Professor Ray Lankester, während die Sektion A (Mathematik und

Physik) unter dem Vorsitz von Prinzipal E. H. Griffiths steht, dem als Vizepräsidenten Forsyth und Callendar zur Seite stehen.

Internationale Assoziation der Akademien. Eine Sitzung des Komitees der internationalen Assoziation der Akademien wird am 30. Mai d. J. in Wien abgehalten werden.

2. Preisaufgaben und gekrönte Preisschriften.

(Vacat.)

3. Hochschulnachrichten.

Universität Straßburg. In der math. und naturwiss. Fakultät der Universität Straßburg haben während des Studienjahres 1905—06 im Sommer 15, im Winter 16, im ganzen 31 Doktorpromotionen stattgefunden, darunter 8 mit mathematischen und 2 mit physikalischen Dissertationen.

Universität Padua. An der hiesigen Universität beabsichtigt Professor A. Fevaro von nun an regelmäßig jährlich Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik zu halten.

Universität Upsala. Während der drei Jahre von 1903 bis 1905 fanden folgende Promotionen auf mathematischem Gebiete statt: B. Lindgren, Sur «Le cas d'exception de M. Picard» dans la théorie des fonctions entières (1903). — F. Lundberg, I. Approximerad framställning af sannolikhetsfunktionen. — II. Återförsäkring af Kollektivrisker (1903). — G. Tegengren, Bestämning af ett enkelt Sammanhängande Minimalytstycke (1904). — H. v. Zeipel, Recherches sur les solutions périodiques de la troisième sorte dans le problème des trois corps (1904). — S. Johansson, Über die Uniformisierung Riemannscher Flächen mit endlicher Anzahl Windungspunkte (1905).

Vorlesungen über Physik an der Columbia Universität in New York hält zur Zeit Hendrik Antoon Lorentz, Professor der mathematischen Physik an der Universität Leiden, über die Theorie der Elektronen und ihre Anwendungen auf die Erscheinungen des Lichts und der strahlenden Wärme. Die Vorträge behandeln: Die allgemeinen Grundlagen; die Theorie der freien Elektronen; Emission und Absorption der Wärme; Den Zeeman Effekt; Die Ausbreitung des Lichts in ponderablen Körpern; optische Erscheinungen in bewegten Systemen. — Für das Jahr 1906/7 sind Professor Joseph Larmor in Cambridge und Professor O. Lummer in Breslau eingeladen worden, Vorlesungen an der Columbia Universität zu halten.

Verzeichnis der für das Sommersemester 1906 angekündigten Vorlesungen über die mathematischen Wissenschaften.

Berlin. Schwarz, Elementargeometrische Behandlung einiger Aufgaben des Maximums (2); Theorie der analytischen Funktionen II (4); Über krumme Flächen und Kurven doppelter Krümmung (4); Seminar; Kolloquien. — Frobenius, Theorie der Determinanten (4); Seminar. — Schottky, Differentialrechnung (4); Übungen dazu; Abelsche und Thetafunktionen (2); Seminar. — Hettner, Wahr-

scheinlichkeitsrechnung (2). — Knoblauch, Anwendungen der elliptischen Funktionen (4); Analytische Geometrie (4); Theorie der Strahlensysteme (1). — Landau, Über den Picardschen Satz (2). — Schur, Integralrechnung (4); Übungen dazu. — Lehmann-Filhés, Analytische Mechanik (4). — Förster, Geschichte der alten Astronomie (2); Theorie und Kritik der Zeitmessung (2); Fehlertheorie im Lichte der Astronomie (1). — Bauschinger, Mechanik des Himmels, neuere Theorien (3); Einrichtung und Gebrauch der Planetentafeln. — Struve, Sphärische Astronomie I (2); Übungen. — Marcuse, Theorie und Anwendung astronomischer Instrumente; Einführung in die astronomische Geographie und Erdphysik. — Ristenpart, Gemeinverständliche Himmelskunde; Einführung in die astronomische Chronologie. — Scheiner, Über die Temperatur der Sonne; Astrophysikalisches Kolloquium. — Helmert, Gradmessungen; Theorie der Kartenprojektionen. — Planck, System der gesamten Physik (4); Übungen. — Krigar-Menzel, Theoretische Physik IV (4). — Warburg, Ausgewählte Kapitel aus der theoretischen Physik (2). — Drude, Physikalisches Kolloquium. — Neesen, Grundlagen der Ballistik (2). — Weinstein, Kinetische Gastheorie (3). — Aschkinass, Die Radioaktivität (1). — Valentiner, Vektorentheorie mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendung in der theoretischen Physik (1). — Martens, Theorie und Anwendung optischer Instrumente (1). — Grüneisen, Hydrodynamik reibender Flüssigkeiten (1). — Slaby, Funkentelegraphie (2). — Gehrcke, Theorie der Wechselströme (1). — Meyer, Ausgewählte Kapitel der technischen Mechanik (2). — v. Ihering, Maschinenkunde mit Übungen (4). — Börnstein, Übungen in Herstellung und Gebrauch physikalischer Unterrichtsapparate (4).

Bonn. Study, Analytische Geometrie II (Projektive Geometrie) (3); Einleitung in die Invariantentheorie (3); Seminar. — Kowalewski, Einführung in die Zahlentheorie (2); Differentialrechnung und Elemente der Integralrechnung (4); Übungen dazu; Kritische Übersicht über die neueren Ergebnisse der Mengenlehre (1); Seminar. — London, Darstellende Geometrie mit Zeichenübungen (4); Theorie der elliptischen Funktionen (4); Seminar. — Küstner, Theorie und Praxis der astronomischen Instrumente (3); Astronomisches Kolloquium. — Mönnichmeyer, Geographische Ortsbestimmungen (2). — Kayser, Physikalisches Kolloquium (2). — Kaufmann, Theorie der Wärme (4); Übungen dazu. — Eversheim, Die elektrische Energie bei wissenschaftlichen Arbeiten, ihre Messung und Verteilung (1); Die Elektrizität als Licht- und Kraftquelle (1). — Pflüger, Elektromagnetische Wellen (1). — Bucherer, Über die Elektronentheorie (1).

Münster. Killing, Analytische Geometrie I (4); Übungen dazu (1); Algebra (4); Oberseminar. — v. Lilienthal, Differential- und Integralrechnung I (4); Krümmungstheorie der Kurven und Flächen (4); Oberseminar. — Dehn, Mechanik I (4); Übungen dazu (1); Analysis situs (2). — Plaßmann, Methode der kleinsten Quadrate (3); Die Fixsterne (2); Geschichte der Astronomie (1); Übungen im Beobachten. — Heydweiller, Elementar-mathematische Ergänzungen zur Experimentalphysik (1). — Konen, Einleitung in die theoretische Physik (3); Übungen dazu (1); Übungen in Demonstrationsversuchen (4); Theoretisch-physikalische Übungen für Vorgeschrittene.

Stuttgart. Mehmke, Darstellende Geometrie mit Übungen; Analytische Mechanik mit Übungen; Seminar. — Reuschle, Analytische Geometrie der Ebene mit Übungen; Differential- und Integralrechnung mit Übungen; Seminar. — Wölffing, Funktionentheorie II; Variationsrechnung. — Bretschneider, Repetitionen in niederer Mathematik. — Stübler, Kinematik mit Übungen; Mathematische Geographie. — Roth, Perspektive. — Weyrauch, Einleitung in die mathematische Theorie der Elastizität. — Autenrieth, Technische Mechanik. — Hammer, Praktische Geometrie; Übungen dazu; Ausgleichungsrechnung. — Hohenner, Trigonometrische Übungen; Astronomische Zeit- und direkte geo-

graphische Ortsbestimmung; Katastermessungen; Übungen zur praktischen Geometrie. — Koch, Theoretische Physik. — Lang, Elektromagnetisches Feld II.

Tharandt. Weinmeister, Infinitesimalrechnung mit Übungen I; Infinitesimalrechung mit Übungen II; Mechanik. — Kunze, Vermessungskunde; Meßübungen; Planzeichnen.

4. Personalnachrichten.

Ernennungen, Auszeichnungen usw.:

Professor Dr. Anding an der Universität München wurde zum Direktor der Sternwarte in Gotha ernannt.

Dr. G. Bagnera, ao. Professor der Analysis an der Universität Messina, wurde zum o. Professor daselbst ernannt.

Dr. G. Bisoncini wurde zum Dozenten der Mechanik an der Universität Rom ernannt.

Dr. G. Bortolotti, ao. Professor an der Universität Modena, wurde zum o. Professor daselbst ernannt.

Professor Dr. H. Bruns, Direktor der Sternwarte in Leipzig, wurde von der Akademie der Wissenschaften in Berlin zum korrespondierenden Mitgliede ernannt.

Professor W. N. Campbell von der Lick Sternwarte erhielt die goldene Medaille der Royal Astronomical Society für seine Untersuchungen über die Bewegung der Sterne in der Richtung der Sehlinie.

Dr. H. S. Davis, Astronom am Internationalen Breiten-Observatorium in Gaithersburg, ist von seiner Stellung zurückgetreten.

Dr. G. Fubriori wurde zum ao. Professor der höheren Analysis an der Universität Catania ernannt.

Dr. P. Guthnick in Bothkamp wurde zum Observator an der Königl. Sternwarte in Berlin ernannt.

Dr. G. Huber, ao. Professor der Mathematik an der Universität Bern, wurde zum o. Professor daselbst ernannt.

E. Lemoyne, Privatgelehrter in Paris, ist zum Ritter der Ehrenlegion ernannt worden.

Dr. Herbert R. Morgan, Rechner am U. S. Naval Observatory in Washington, wurde zum Professor der Astronomie und Direktor der Morrison-Sternwarte in Glasgow, Mo., ernannt.

Professor Dr. Richard Müller gibt mit Ende des Wintersemesters seine Tätigkeit als Privatdozent der Mathematik an der Technischen Hochschule zu Charlottenburg auf.

Professor Dr. C. Neumann an der Universität Leipzig ist für das Sommersemester beurlaubt worden.

Professor J. M. Peirce an der Harvard Universität beabsichtigt, von seiner Stellung zurückzutreten; er wirkt seit 1854 an der Harvard Universität.

Professor Dr. Pickering, Direktor der Sternwarte in Cambridge, Mass., wurde von der Akademie der Wissenschaften in Berlin zum korrespondierenden Mitgliede ernannt.

Dr. C. W. Pritchett, Professor der Astronomie und Direktor der Morrison-Sternwarte in Glasgow, Mo., ist von seiner Stellung zurückgetreten.

Dr. M. Reißner wurde zum ao. Professor der Mechanik an der Technischen Hochschule zu Charlottenburg ernannt.

Dr. Frank E. Ross von der Carnegie-Institution wurde zum Astronomen der Breitenstation Gaithersburg ernannt.

Dr. W. Schlink, Privatdozent an der Technischen Hochschule in Darmstadt, wurde zum ao. Professor für Mechanik an der Technischen Hochschule in Braunschweig ernannt.

Professor Dr. H. von Seeliger, Direktor der Sternwarte in München-Bogenhausen, wurde von der Akademie der Wissenschaften in Berlin zum korrespondierenden Mitgliede ernannt.

Dr. O. S. Stetson an der Universität zu Syracuse wurde zum ao. Professor der Mathematik daselbst ernannt.

Professor C. A. Van Velzer an der Universität von Wisconsin wird zum 1. Juli 1906 sich von seiner Tätigkeit zurückziehen und in den Ruhestand treten.

Professor Dr. A. Wangerin an der Universität Halle wurde zum Präsidenten der Kaiserl. Leopoldinisch-Carolinischen Deutschen Akademie der Naturforscher in Halle a. S. gewählt.

Professor E. T. Whittaker in Cambridge wurde zum Professor der Astronomie am Trinity College in Dublin und zum Royal Astronomer of Ireland ernannt.

Dr. E. B. Wilson wurde zum ao. Professor der Mathematik an der Yale Universität ernannt.

Dr. C. v. Wisselingh in Amsterdam wurde zum Professor der Mathematik an der Universität Groningen ernannt.

Habilitationen:

Dr. M. Großmann habilitierte sich als Privatdozent der Mathematik an der Universität Basel.

Realschulprofessor M. N. Vanecek hat sich an der böhmischen Technischen Hochschule in Prag als Privatdozent der Mathematik habilitiert.

Oberlehrer Dr. Georg Wallenberg habilitierte sich an der Technischen Hochschule in Charlottenburg als Privatdozent für reine Mathematik.

Gestorben:

Professor Dr. S. P. Langley, Direktor des Astrophysical Laboratory und Sekretär der Smithsonian Institution in Washington, ist am 27. Februar d. J. im Alter von 72 Jahren gestorben.

Dr. H. Lorberg, ao. Professor der Physik an der Universität Bonn, ist infolge eines Unglücksfalls gestorben.

Geheimer Rat Professor Dr. Bauer ist am 3. April d. J. nach längerem Leiden im Alter von 86 Jahren zu München gestorben.

5. Vermischtes.

Franklin-Feier. Die zweihundertste Wiederkehr des Geburtstages von Benjamin Franklin wird in den Tagen vom 17.—20. April d. J. von der American Philosophical Society in Philadelphia festlich begangen werden. Der Feier liegt folgendes Programm zugrunde: Am 17. April Versammlung zum Empfang der Delegierten und der Adressen; am 18. April

Sitzung für die Überreichung von Schriften über Franklin, Vorträge von Nichols über Franklins Untersuchungen über Elektrizität und von Rutherford über moderne Theorien der Elektrizität und ihre Beziehung zu der Franklinschen Theorie; am 19. April Ehrenpromotionen seitens der Universität von Pensylvania und Feier am Grabe Franklins, abends allgemeiner Empfang; am 20. April Vorträge von Furness über Franklin als Bürger und Philanthrop, von Eliot über Franklin als Drucker und Philosoph, von Choate über Franklin als Staatsmann und Diplomat. Abends Bankett.

Ein Zukunftsprogramm der Versammlung Deutscher Philologen und Schulmänner. In einer Schrift: „Schlußrede der 48. Versammlung Deutscher Philologen und Schulmänner nebst einem Zukunftsprogramm", die im Verlage von B. G. Teubner auch separat als Sonderabdruck aus den neuen Jahrbüchern für das klassische Altertum, Geschichte und Deutsche Literatur (VIII. Jahrgang 1906) erschienen ist, hebt Professor Paul Wendland hervor, daß die Organisation des Philologentages einer Reform bedarf, wenn anders die Versammlung nicht an Bedeutung verlieren will. Das ist auch in verschiedenen Resolutionen zum Ausdruck gekommen, die in den Sektionen gefaßt wurden. Von besonderer Bedeutung war die Resolution der pädagogischen Sektion: „Die pädagogische Sektion erklärt es für wünschenswert, daß auf künftigen Versammlungen in noch stärkerem Maße, als es erfreulicherweise schon in Hamburg geschehen ist, Gelegenheit gegeben werde, den Gedankenaustausch zwischen Lehrern der Universität und der höheren Lehranstalten über die gemeinsamen Interessen zu pflegen." — Um nun alle Schwierigkeiten zu überwinden und die pädagogische Sektion aus der Konkurrenz der andern Sektionen herauszuheben, zugleich um der Philologenversammlung in Zukunft ihre Bedeutung im geistigen Leben zu sichern, entwickelt Wendland folgenden Plan für die künftigen Versammlungen: 1. Tag, Eröffnungsrede, Sektionssitzungen; 2. Tag, Sektionen; Plenum „Geisteswissenschaften"; 3. Tag, Sektionen; Plenum „Naturwissenschaften und Mathematik"; 4. Tag, Sektionen; Plenum „Religionsunterricht", Schlußrede. — Durch diesen Vorschlag würden die Sektionen an Spielraum gewinnen und die pädagogischen Fragen würden im Plenum behandelt werden, wo wesentlich über die Didaktik der Wissenschaften, das Gleichgewicht der Lehrfächer, das Verhältnis von Universität und Schule zu beraten wäre. Es würde bei Ausführung dieses Programms die Philologenversammlung auch für die Mathematiker von größerer Bedeutung als jetzt, und so möchte man wünschen, daß die Anregung von Wendland nicht spurlos vorübergehe. — Unter den Problemen, die für die *Mathematik* und die *Naturwissenschaften* im Rahmen dieses großen Programms zu behandeln wären, führt Wendland nach F. Klein folgende auf: Berücksichtigung der besondern Bedingungen der heutigen Kultur? Der modernen wissenschaftlichen Fortschritte? Bedeutung der streng wissenschaftlichen Präzision für die Schule. Unterschied zwischen systematischer und „methodischer" Lehrweise. Gleichmaß in der Entwicklung des logischen und anschaulichen Denkens. — Wie vereinigt sich im *mathematischen* Unterrichte die Wahrung des formalbildenden Wertes mit der Anpassung an die Bedürfnisse des Lebens? Pflege der mathematischen Exekutive (numerisches Rechnen, Messen, Zeichnen). Wie weit gehören die Elemente der Funktionslehre und der Infinitesimalrechnung auf die Schule, und wie sind sie in den übrigen

Lehrstoff einzuarbeiten? — Welches Lehrziel des *naturwissenschaftlichen* Unterrichts würde den Interessen der allgemeinen Bildung, andererseits dem Bedürfnis der mannigfachen späteren Berufsstudien am meisten entsprechen? Entwicklung des Beobachtungsvermögens und des induktiven Denkens. Nutzen der Schülerpraktika und ihre Organisation. Zweckmäßige Einrichtung der Sammlungen von Apparaten und Anschauungsmitteln. Spezifische Bedeutung der biologischen Fächer für die Schule. Was gehört von Hygiene an die Schule, und wie ist der Unterricht zu ermöglichen? — Stellung von Mathematik und Naturwissenschaft zur Philosophie. — Ferienkurse und Auffrischungssemester für die Lehrer usw. usw. — Auch unter den als *„Allgemeine Fragen“* bezeichneten Problemen befinden sich nicht wenige, die für die Mathematiker an Schulen und Universitäten von Interesse sind. Es mag hier mit diesem Hinweise sein Bewenden haben, indem betreffs näherer Einzelheiten auf die erwähnte Schrift verwiesen wird.

Mathematische Modelle.

H. Wieners Sammlung mathematischer Modelle. 1. Ebene Gebilde. — 2. Ebenflächige Raumgebilde. — 3. Flächen 2. Ordnung. — 4. Dreh- und Schraubenflächen. — 5. Raumkurven. Bis jetzt 59 Modelle. Leipzig, B. G. Teubner.

Die Forderung größerer *Anschaulichkeit* des mathematischen Schul- und Hochschulunterrichts läßt sich ohne geeignete Lehrmittel nur unvollkommen erfüllen. Wenn unter diesen die geometrischen Modelle als wirksamste Anschauungsmittel anerkannt sind, so ist doch zu betonen, daß ihre Verwendbarkeit an gewisse Bedingungen geknüpft ist: vor allem müssen sie wirklich aus dem *Bedürfnis des Unterrichts* hervorgegangen sein, ferner sollen sie durch *Einfachheit und Übersichtlichkeit* das Verständnis und durch *Mannigfaltigkeit* das Interesse des Lernenden wachrufen, und endlich können sie nur in der Hand eines Lehrers von Nutzen sein, der über *Art und Umfang ihrer Verwendung* genau Bescheid weiß.

Solche Erwägungen haben zur Herausgabe der „Sammlung mathematischer Modelle“ und der dazu gehörigen „Abhandlungen“ (siehe unten) geführt.

Während die zu erstrebende Einfachheit zumeist von der Auswahl des geometrischen Stoffes abhängt, wird die Übersichtlichkeit durch die Art der Darstellung bedingt. So verdienen Modelle aus Draht und Fäden den Vorzug vor Papp- und Gipsmodellen; es sind deshalb von den Vielflachen die Kanten dargestellt, und es erscheinen krumme Flächen nicht als Oberflächen von Körpern, sondern als erzeugt von überdeckenden Linien. Die dadurch erreichte völlige Durchsichtigkeit kommt dann auch der geforderten Mannigfaltigkeit zugute, da ein durchsichtiges Modell, von verschiedenen Seiten aus betrachtet, sich in wechselnden Formen stets deutlich projiziert.

Die größten Mannigfaltigkeiten bieten Modelle, die in ihren Teilen beweglich sind, weil sie nicht eine, sondern unendlich viele Flächen in stetigem Übergange darstellen. Es seien hier hervorgehoben die geradlinigen Flächen 2. O. als Fadenmodelle, dieselben Flächen als Stabmodelle (nach O. Henrici), die in einer konfokalen Schar beweglich sind, und endlich die durch Drahtkreise dargestellten Flächen 2. O. mit Kreisschnitten. Die Beweglichkeit der genannten Fadenmodelle ist dabei nicht durch angehängte Gewichte,

sondern durch gleichbleibende Fadenlängen erzielt, während für die beweglichen Drahtmodelle eine eigene Gelenkverbindung konstruiert wurde (*H. Wieners* geschränktes Verbindungsgelenk, D. R. G. M.), die das Kugelgelenk durch Leichtigkeit der Herstellung und durch einen unbegrenzten Ausschlag übertrifft.

Der Lehre vom Projizieren, die am meisten zur Schulung des Anschauungsvermögens beiträgt, gehören die einfachsten und wieder die verwickeltsten und inhaltreichsten Modelle der Sammlung an; jene (wie das des drehbaren Kreises oder der Sinuslinie) erläutern die einfachen Gesetze der Projektion, diese veranschaulichen die verwickelten Verhältnisse, die beim Abbilden von Flächen, insbesondere bei verschwindenden und verdeckten Umrissen, auftreten. Die in der Flächentheorie als wichtig erkannten Asymptotenlinien (Haupttangentenlinien) erhalten hierdurch eine allgemeinere Bedeutung, und die Modelle dienen so nicht nur dem geometrischen Unterricht, sondern zeigen sich als ein allgemein bildendes Element, indem sie den Formensinn zu wecken uud zu üben geeignet sind.

Die „Sammlung“ umfaßt bis jetzt 59 Modelle in acht Reihen, Ausführlicheres sehe man weiter unten in der Besprechung des „Verzeichnisses“.

Verzeichnis mathematischer Modelle, bearbeitet von H. Wiener (H. Wieners Sammlung mathematischer Modelle). Leipzig 1905, B. G. Teubner.

Das „Verzeichnis“ enthält von den Modellen der „Sammlung“ eine systematische Aufzählung und neben den Angaben über Art der Herstellung, Größe und Preis eine kurze, durch viele Figuren unterstützte Beschreibung, sowie Bemerkungen über ihre Handhabung. Außerdem gibt es wissenschaftliche Erläuterungen, die für die fünf ersten Reihen kürzer gefaßt sind, da hier die „Abhandlungen“ das Nötige bieten, die aber ausführlicher auf die Theorie der Kreisschnitte der Flächen 2. O. und auf die Dreh- und Schraubenflächen (insbesondere die Asymptotenlinien der letzteren) eingehen, und die schließlich auf eine neue Ableitung der Singularitäten der Raumkurven hinweisen. Das Verzeichnis wird auf Verlangen von der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig, Poststr. 3, kostenfrei zugesandt.

Näheres über diese Modelle entnehme man aus der folgenden Übersicht:

H. Wieners Sammlung mathematischer Modelle.

59 Modelle mit allem Zubehör *M.* 1800.—

Daraus: Ebene Gebilde.

I. Reihe. 7 Drahtmodelle zum Projizieren. *M.* 65.—

Daraus einzeln:

1. Quadrat	*M.*	6.—	12. Rechtwinkelige Hyperbel.	*M.*	16.—
2. Regelmäßiges Fünfeck	„	9.—	Dazu Drehkopf	„	2.40
3. Regelmäßiges Sechseck	„	7.—	13. Parabel	„	7.50
11. Kreis mit Quadrat	„	10.—	21. Sinuslinie	„	7.50
Dazu Drehachse mit Drehkopf	„	3.50			

Ebenflächige Raumgebilde.

II. Reihe. 5 Drahtmodelle der regelmäßigen Vielflache. *M.* 60.—

Daraus einzeln:

101. Tetraeder	*M.*	7.—	104. Dodekaeder	*M.*	16.—
102. Würfel	„	11.—	105. Ikosaeder	„	16.—
103. Oktaeder	„	11.—			

III. Reihe. 6 Drahtmodelle mit Fäden: Höhere regelmäßige Vielflache. Regelmäßige räumliche Vielstrahlen. ℳ 115.—
Daraus einzeln:

111. Würfel mit 2 Tetr. und Okt. . . . . ℳ 16.—
112. Dodekaeder mit 5 Würfeln „ 20.—
113. Dodekaeder mit Isokaeder „ 24.—
114. Ikosaeder mit Dodekaeder ℳ 24.—
115. Regelm. räuml. Sechsstrahl „ 12.—
116. Regelm. räuml. Fünfzehnstrahl . . . . „ 20.—

Flächen 2. Ordnung.

IV. Reihe. 6 Drahtmodelle der Flächen 2. O. in Hauptschnitten. ℳ 90.—
Daraus einzeln:

401. Kugel (vgl. 407, VII. Reihe) ℳ 10.—
402. Ellipsoid . . . . „ 10.—
403. Zweischal. Hyperboloid . „ 20.—
404. Einschaliges Hyperboloid ℳ 20.—
405. Elliptisches Paraboloid . „ 8.—
406. Hyperbol. Paraboloid . „ 28.—

V. Reihe. 6 bewegliche Modelle der Regelflächen 2. O. ℳ 210.—
Daraus einzeln:

a) Fadenmodelle:
411. Bewegliches einschaliges Dreh-Hyperboloid . . . ℳ 35.—
412. Bewegliches hyperbolisches Paraboloid . . . „ 45.—

b) Stabmodelle:
421. Bewegliches einschaliges Hyperboloid . . . . . ℳ 35.—
422. Dasselbe auch zum Umstülpen . . . . „ 25.—
423. Bewegliches einschaliges Dreh-Hyperboloid . . . „ 35.—
424. Bewegliches hyperbolisches Paraboloid . . . „ 35.—

VI. Reihe. 6 bewegliche Drahtmodelle der Flächen 2. O. in Kreisschnitten. ℳ 255.—
Daraus einzeln:

425. Bewegl. Ellipsoid . . . ℳ 42.—
426. Bewegl. ellipt. Paraboloid „ 42.—
427. Bewegl. einschal. Hyperboloid . . . . „ 42.—
428. Bewegl. zweischal. Hyperboloid . . . . „ 42.—
429. Bewegl. Kegel (doppelt). ℳ 48.—
430. Bewegl. ellipt. Zylinder . „ 40.—
Nr. 427, 428, 429, gemeinsam beweglich . . . . . . „ 125.—
429a. Bewegl. Kegel (einfach) „ 24.—

Dreh- und Schraubenflächen.

VII. Reihe. 6 Drahtmodelle von Dreh- und Schraubenflächen. ℳ 525.—
Mit Einschluß von 512a ℳ 535.—
Daraus einzeln:

407. Kugel mit Parallelkreisen ℳ 18.—
501. Kreisring . . . . „ 50.—
503. Urne . . . . „ 65.—
512. Wendelfläche . . . . . „ 100.—
512a. Ausschnitt der vorigen. „ 10.—
514. Schiefe geschloss. Regel-Schraubenfläche . . . ℳ 175.—
515. Schrauben-Röhrenfläche . „ 120.—
Galgen für die beiden letzten Modelle . . . . „ 1.50

Raumkurven.

VIII. Reihe. 16 Fadenmodelle der Singularitäten von Raumkurven. ℳ 660. —

Daraus je 4 Modelle:
Nr. 321, 322, 323, 324 zus. ℳ 155.—
Nr. 325, 326, 327, 328 „ „ 155.—
Nr. 329, 330, 331, 332 „ „ 175.—
Nr. 333, 334, 335, 336 „ „ 175.—

Einzeln:

Nr.	321	322	323	324	325	326	327	328	je ℳ 40.—
Nr.	329	330	331	332	333	334	335	336	je „ 45.—

Abhandlungen zur Sammlung mathematischer Modelle, herausgegeben von Hermann Wiener. In zwanglosen Heften. I. Heft (unter der Presse). Leipzig 1906, B. G. Teubner.

Inhalt: Abhandlungen von H. Wiener. Vorbemerkung. Nr. 1. Über mathematische Modelle und ihre Verwendung im Unterricht. Nr. 2. Zur Projektion einiger ebenen Figuren. Nr. 3. Die 5 regelmäßigen Vielflache Platons, Regel-

mäßigkeit in einer Gruppe. Nr. 4. Regelmäßige Vielstrahlen und geschlossene Spiegelsysteme. Nr. 5. Die regelmäßigen Vielflache (Platons, Keplers und Poinsots), abgeleitet aus ihrer Gruppe. Nr. 6. Wie sollen Flächen, insbesondere die der 2. O., gezeichnet werden? Nr. 7. Über Flächen 2. O.: I. Reelle und ideelle Achsen und Scheitel der Flächen 2. O. Imaginäre Flächen. II. Erzeugung der Kurven und Flächen 2. O. im Gebiet der affinen Abbildungen. Nr. 8. Bewegliche Fadenmodelle der Regelflächen 2. O. mit gleichbleibenden Fadenlängen. Nr. 9. Bewegliche Stabmodelle zur Überführung einer Fläche 2. O. in konfokale Flächen.

Die „Abhandlungen" geben zunächst dem Lehrer alles das an die Hand, was zum erfolgreichen Gebrauch der Modelle nötig ist: Anleitungen zur Handhabung und Hinweise auf die Verwendbarkeit im Unterricht, auf diejenigen mathematischen Sätze, die durch sie erläutert werden können, und auf die einschlägige Literatur. Außerdem bieten schon die einfacheren der Modelle Anlaß zu eigenen Untersuchungen. Der Begriff der Abbildungen und ihrer Gruppen, der neuerdings immer mehr in den Vordergrund geometrischer Betrachtungen tritt, wird (in Nr. 5) zu einer neuen Ableitung der regelmäßigen Vielflache benützt, wobei sich die zwei letzten Platonischen und die vier höheren regelmäßigen Vielflache (abgesehen von der dualen Zuordnung) so in Paare ordnen, daß die beiden Vielflache eines Paares einheitlich und gruppentheoretisch nicht unterscheidbar auftreten. Auch über Flächen 2. O. waren längere Ausführungen (Abh. Nr. 7) nötig, um darauf hinzuweisen, daß die Darstellung mittels der Hauptschnitte, wie in der analytischen, so auch in der rein geometrischen Einführung die geeignetste sei; freilich muß man sich dann von dem vielfach ermüdenden Formalismus der projektiven Geometrie frei machen und die affine Abbildung als Grundlage wählen, die vermöge ihrer Anschaulichkeit das Wesentliche besser hervortreten läßt. Man gelangt so zu einer elementaren Theorie dieser Flächen, die zugleich einfache Konstruktionen ihrer Punkte und Berührebenen liefert.

So sollen die Abhandlungen wie die Modelle selbst, dem anschaulichen Denken immer mehr Eingang verschaffen helfen, aber über dies hinaus auf scharfe geometrische Begriffsbildung und Anwendung zweckentsprechender und reiner Methoden hinweisen.

Literarisches.

1. Notizen und Besprechungen.

J. W. Gibbs. Elementary principles in statistical mechanics developed with especial reference to the rational foundation of thermodynamics. New York und London 1902. XVIII u. 207 S.

Elementare Grundlagen der statistischen Mechanik entwickelt besonders im Hinblick auf eine rationelle Begründung der Thermodynamik von I. Williard Gibbs, deutsch bearbeitet von E. Zermelo, Leipzig 1905. XVI u. 216 S.

Seit den frühesten Anfängen der Naturwissenschaft ist es ein Lieblingsgedanke der Forscher gewesen, die Mannigfaltigkeit der Naturvorgänge auf eine gemeinsame Grundform, auf die Bewegung ihrer kleinsten Teilchen, zurückzuführen. Namentlich für eine exakte quantitative Naturerkenntnis schien eine solche Zurückführung aussichtsvoll, nachdem durch Galilei und

Newton die Grundlage für eine mathematische Theorie der Bewegungserscheinungen geschaffen war. Es ist bekannt, daß Newton selbst die Optik in Gestalt der Emissionstheorie als einen Zweig der Mechanik behandelt hat, und wenn auch später diese Theorie zugunsten der Undulationstheorie aufgegeben werden mußte, so verstand man doch auch die letztere zunächst rein mechanisch, indem man sich den Äther wie eine elastische Flüssigkeit schwingend vorstellte. Eine Neubelebung erfuhr die mechanistische Vorstellungsweise, als mit der Entdeckung des Energiegesetzes die erkannte Äquivalenz von Wärme und Arbeit die Vermutung nahe legte, daß die Wärme eine reine Bewegungserscheinung und die Temperatur eines Körpers durch die lebendige Kraft der unregelmäßig bewegten Moleküle zu messen sei. Aber nur in der kinetischen Gastheorie, deren Hypothesen so besonders einfach sind, ist eine solche Zurückführung der thermischen Vorgänge auf mechanische bis zu einem gewissen Grade gelungen, bei den festen Körpern und den Flüssigkeiten ist sie bisher noch in ziemlich unvollkommenen Anfängen stecken geblieben.

Die Schwierigkeiten, die sich der exakten Durchführung der Molekularhypothese entgegenstellen, sind von zweierlei Art. Einmal entsteht die physikalische Frage: wie sollen wir uns die Beschaffenheit der kleinsten materiellen Teile vorstellen und welche Wirkungsgesetze den zwischen ihnen wirkenden Kräften zuschreiben, um einen bestimmten Ansatz für die Rechnung zu gewinnen? Es ist klar, daß wir uns hier mit ziemlich rohen Annäherungen, mit unvollkommenen Bildern begnügen können, sofern nur zu erwarten steht, daß die hierbei begangenen Fehler ohne wesentlichen Einfluß auf die Gesamterscheinung sein werden. So begnügt man sich in der Gastheorie meist mit der Vorstellung elastischer Stöße zwischen einfach geformten festen Körpern in der Annahme, daß das wahre Wirkungsgesetz der zwischen den Molekülen wirkenden Kräfte bei der kurzen Dauer der Einwirkung nur unwesentlich in Betracht kommen werde. Aber jetzt beginnt eine weitere, die mathematische Aufgabe, auf Grund unserer physikalischen Hypothesen die zusammengesetzten Vorgänge zu berechnen, die in den gesamten Molekülsystemen, d. h. in den unserer Beobachtung zugänglichen Körpern unter den gemachten Annahmen stattfinden würden, damit wir in der Lage sind, die so berechneten Vorgänge mit der Erfahrung zu vergleichen und daraus Rückschlüsse auf die Berechtigung unserer Annahmen zu ziehen. Bedenkt man nun, welche außerordentlichen Schwierigkeiten schon der einfache Fall der drei nach dem Newtonschen Gesetze bewegten Himmelskörper den Astronomen bietet, so erscheint es fast vermessen, die Bewegungsvorgänge in einem aus vielen Billionen von Molekülen zusammengesetzten Systeme berechnen zu wollen. Doch auch hier bietet sich eine bedeutende Erleichterung. Es ist ja weder notwendig noch auch wünschenswert, den Weg jedes einzelnen Teilchens zu verfolgen, sondern es genügt, die in ihrer Gesamtheit geltenden Gesetzmäßigkeiten zu erforschen. Wir brauchen weder den genauen Anfangszustand zu kennen, der uns durch messende Beobachtung doch niemals gegeben werden kann, noch auch den genauen Endzustand zu berechnen. Vielmehr kommt es nur darauf an, aus einem nur in ganz rohen Umrissen bestimmten Anfangszustande auf das Eintreten eines ebenso roh bestimmten Endzustandes zu schließen und dabei von allen singulären und wegen ihrer relativen Kleinheit und Seltenheit in der großen Masse

verschwindenden Einzelvorgängen abzusehen. Man muß mit einem Worte die Mechanik der Moleküle nicht individuell sondern *statistisch* betreiben. Nicht die Bewegung eines einzelnen Teilchens ist zu bestimmen, sondern die Veränderung gewisser Funktionen, die von unzählig vielen solchen Teilchen abhängen, und auch hier nur die durchschnittliche oder wahrscheinliche Änderung für alle möglichen mit dem beobachtbaren physikalischen Anfangszustande verträglichen Positionen. Bei dieser statistischen Betrachtungsweise ist auch anzunehmen, daß unsere Hypothesen über Gestalt und Beschaffenheit der Moleküle und ihre Wirkungsgesetze nur teilweise zum Ausdruck kommen und daß speziellere Vorstellungen für die Beantwortung vieler Fragen sich als unnötig erweisen. Freilich müssen Grundlagen und Methoden dieser „statistischen Mechanik" zuerst bekannt sein, es muß möglich sein, ohne willkürliche und zweifelhafte Hypothesen die Massenerscheinungen in mechanischen Systemen mit sehr viel Freiheitsgraden unter Beschränkung auf eine plausible Wahrscheinlichkeit ebenso sicher zu bestimmen wie vermöge der reinen Mechanik die Vorgänge in einem einzelnen System mit einer beschränkten Zahl von Freiheitsgraden.

Solcher Methoden hat man sich natürlich in der Gastheorie immer bedient. Aber die Art und Weise, wie man die in allen Richtungen durcheinander fliegenden Moleküle durch Gruppen von mittlerer Beschaffenheit ersetzte, wie man die Verteilung der Geschwindigkeiten nach dem Maxwellschen Gesetze zu begründen und die Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die mittlere Anzahl und den Effekt der Zusammenstöße anzuwenden suchte, war nicht immer einwandsfrei. Auch bezogen sich alle diese Methoden meist auf den speziellen nur in der Gastheorie vorliegenden Fall eines Systems von geradlinig bewegten Teilchen und waren somit auf die Theorie der Flüssigkeiten und festen Körper nicht ohne weiteres anwendbar. Es besteht also gewiß ein Bedürfnis, die Grundlagen der statistischen Mechanik unabhängig von ihrem Anwendungsgebiete auf streng mathematischer Grundlage zu entwickeln, und dies ist eben die Aufgabe, die der jüngst verstorbene große amerikanische Physiker sich in seinem hier vorliegenden letzten Werke gestellt hat, um hiermit der kinetischen Theorie einen ähnlichen Dienst zu leisten, wie er ihn in seinen grundlegenden „Thermodynamischen Studien" der phänomenologischen Thermochemie erwiesen hat. Das behandelte Problem bietet in neuester Zeit noch ein erhöhtes Interesse: seitdem man begonnen hat, auch die Elektrizität atomistisch aufzufassen, wird man auch in der Theorie der bewegten „Elektronen" statistische Methoden nicht entbehren können.

Ebenso wenig wie Maxwell[1]) bei der Untersuchung der intramolekularen Bewegung legt Gibbs seiner Theorie eine speziellere Molekularvorstellung zugrunde, sondern ausschließlich die allgemeine Form der dynamischen Gleichungen, welche für ein System von n Freiheitsgraden unter der Einwirkung von inneren Potentialkräften in der Hamiltonschen Form geschrieben werden können:

$$\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial q_i}, \tag{6}$$

wo $q_1, q_2 \ldots q_n$ die Koordinaten, $p_1, p_2 \ldots p_n$ die Impulse (momenta) und ε die Gesamtenergie des Systemes bedeutet. Die Koordinaten für sich

1) Maxwell, Cambr. Trans. 12 (1879), p. 547; Papers 2, p. 713.

bestimmen die Konfiguration, die Impulse den Geschwindigkeitszustand, beide zusammen die „Phase" des Systems für einen variablen Zeitpunkt t. Durch die Anfangsphase zur Zeit $t = t_0$ ist nun die Phase zu jeder anderen Zeit t und damit die ganze Bewegung des Systems vollständig bestimmt. Läßt man also die Anfangsphase variieren innerhalb eines gewissen $2n$-dimensionalen Gebietes g_0, so variiert auch die Phase zur Zeit t_1 innerhalb eines entsprechenden Gebietes g_1, und nach einem bekannten Satze von Liouville hat das $2n$fache Integral $\int..\int dp_1..dp_n dq_1..dq_n$, das von der Wahl des Koordinatensystemes unabhängig ist und als „Phasenausdehnung" (extension-in-phase) bezeichnet wird, für beide Gebiete g_0 und g_1 denselben Wert, d. h. es ist für bewegte Systeme in der Zeit konstant. Dieser Satz wird bezeichnet als der „Satz von der Erhaltung der Phasenausdehnung" und ist für alles Folgende von grundlegender Bedeutung. Anstatt eines einfachen Systemes denken wir uns eine große Zahl von Systemen mit verschiedenen Anfangsphasen in der Weise verteilt, daß der Quotient aus der Anzahl der Systeme, die sich innerhalb eines Gebietes g befinden, durch die Ausdehnung dieses Gebietes bei entsprechender Verkleinerung einer Grenze D zustrebt, die im allgemeinen eine Funktion der Phase (p, q) ist und als „Phasendichte" (density-in-phase) bezeichnet wird. Der Quotient P dieser Phasendichte durch die Anzahl N aller überhaupt betrachteten Systeme heißt der „Wahrscheinlichkeitskoeffizient" (coefficient of probality), dessen natürlicher Logarithmus η ist der „Wahrscheinlichkeitsexponent" (index of probality), und der Ausdruck $P dp_1 .. dq_n = e^\eta dp_1 .. dq_n$ stellt den Wert der Wahrscheinlichkeit dar, daß ein gegebenes System sich zwischen den durch das Differentialprodukt angedeuteten Phasengrenzen befindet. Denken wir uns nun ein beliebiges System gleichzeitig mit den anderen Systemen, die von benachbarten Phasen ausgehen, gemäß den Bewegungsgleichungen verändert, so muß dabei mit der Phasenausdehnung und der Anzahl der Systeme auch die Phasendichte D und daher auch P und η ungeändert bleiben. Ist also die Phasendichte zu einer beliebigen Zeit t als Funktion der Phase (p, q) gegeben, so ist für die betrachtete „Gesamtheit" (ensemble) die „Phasenverteilung" (distribution-in-phase) für jede andere Zeit t bestimmt vermöge der partiellen Differentialgleichung

$$(21) \qquad \left(\frac{dD}{dt}\right)_{p,q} + \sum\left(\frac{\partial D}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial D}{\partial q_i}\dot{q}_i\right) = 0$$

oder

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \sum\left(\frac{\partial D}{\partial p_i}\frac{\partial \varepsilon}{\partial q_i} - \frac{\partial D}{\partial q_i}\frac{\partial \varepsilon}{\partial p_i}\right),$$

die als die „Grundgleichung der statistischen Mechanik" bezeichnet werden kann. Hier bedeutet $\frac{\partial D}{\partial t}$ oder genauer $\left(\frac{dD}{dt}\right)_{p,q}$ die zeitliche Veränderung von D für konstante p, q, d. h. an einer bestimmten Stelle des Phasenraumes. Die Phasendichte bleibt an jeder Stelle (p, q) ungeändert: $\left(\frac{dD}{dt}\right)_{p,q} = 0$, wenn die rechte Seite der letzten Gleichung verschwindet, und in diesem Falle sagen wir, unsere Gesamtheit sei in „statistischem Gleichgewicht" (statistical equilibrium). Dies wird insbesondere dann eintreten, wenn die Phasendichte konstant oder eine Funktion der Gesamt-

energie ist. Ob eine Gesamtheit in statistischem Gleichgewichte ist oder nicht, hängt demnach nicht von der Beschaffenheit der einzelnen Systeme selbst ab, sondern lediglich von der willkürlich angenommenen anfänglichen Phasenverteilung, d. h. von der Anzahl der Systeme, die wir von jedem Phasenelement aus ihre Bewegung beginnen lassen. Die in einem einzelnen Systeme stattfindenden Vorgänge sind daher ganz unabhängig davon, ob das betrachtete System einer in statistischem Gleichgewichte stehenden Gesamtheit angehört oder nicht. Zur Erleichterung der meisten Untersuchungen wird es zweckmäßig sein, Verteilungen in statistischem Gleichgewichte vorzugsweise zu betrachten, und es bietet sich eine weitere Vereinfachung, wenn wir die Phasendichte kontinuierlich nach 0 abnehmen lassen, während die Koordinaten und Impulse q, p ins Unendliche wachsen. Beiden Forderungen genügt eine Verteilung, in welcher der Wahrscheinlichkeitsexponent eine lineare Funktion der Energie ist:

$$\eta = \log P = \frac{\psi - \varepsilon}{\theta} \quad \text{oder} \quad P = e^{\eta} = e^{\frac{\psi - \varepsilon}{\theta}},$$

wo ψ und θ Konstanten sind und ψ als Funktion von θ so zu bestimmen ist, daß die Gesamtwahrscheinlichkeit, d. h. das Integral

$$\int e^{\frac{\psi - \varepsilon}{\theta}} \, dp_1 \, .\, .\, dq_n,$$

über alle möglichen Phasen bis ins Unendliche erstreckt, den Wert 1 hat. Eine solche Verteilung bezeichnet Gibbs als eine „kanonische“ und beschränkt seine weiteren Untersuchungen zumeist auf solche Gesamtheiten. Die Analogie einer kanonischen Verteilung mit dem Maxwellschen Verteilungsgesetze in der Gastheorie ist unmittelbar einleuchtend, nur handelt es sich hier nicht um verschiedene Teilchen desselben Systems, sondern um lauter voneinander unabhängige Systeme. Speziell für solche kanonischen Verteilungen werden nun „Durchschnittswerte“, d. h. Integrale der Form

$$\bar{u} = \int . \, . \int u e^{\frac{\psi - \varepsilon}{\theta}} \, dp_1 \, .\, .\, dq_n$$

für verschiedene Phasenfunktionen u sowie ihre „mittleren Fehler“ d. h. ihre durchschnittlichen Abweichungen vom Durchschnittswerte berechnet.

Die für eine kanonische Verteilung charakteristische Konstante, den „Verteilungsmodul“ θ, betrachtet Gibbs in seiner Analogie mit der Temperatur eines thermischen Systems. Werden nämlich zwei kanonische Gesamtheiten zu einer dritten Gesamtheit in der Weise vereinigt, daß der Wahrscheinlichkeitskoeffizient des Gesamtsystems durch das Produkt $P_1 P_2$ der beiden gegebenen Koeffizienten für dieselbe Phase dargestellt wird, so ist die entstehende Gesamtheit wieder eine kanonische, also in statistischem Gleichgewichte, wenn die Verteilungsmoduln θ_1 und θ_2 der beiden Gesamtheiten gleich sind, ebenso wie zwei thermische Systeme nur dann miteinander im Gleichgewichte sein können, wenn ihre Temperaturen gleich sind. Denkt man sich ferner den Verteilungsmodul θ einer kanonischen Gesamtheit variiert, betrachtet also eine kontinuierliche Schar solcher Gesamtheiten mit verschiedenen Moduln, so ändert sich auch ψ und ergibt für die Durchschnittswerte $\bar{\varepsilon}$ und $\bar{\eta}$ der Energie und des Wahrscheinlichkeitsexponenten die Beziehung

$$d\psi = \frac{\psi - \bar{\varepsilon}}{\theta} d\theta = \bar{\eta} d\theta.$$

Werden gleichzeitig auch die „äußeren Koordinaten“ verändert, d. h. die Parameter $a_1, a_2, a_3 \ldots$, welche in dem Ausdrucke ε der Gesamtenergie außer den Koordinaten und Impulsen p, q als Veränderliche auftreten, sodaß sie für alle Systeme einer einzigen Gesamtheit dieselben Werte, für jede veränderte Gesamtheit aber andere Werte haben, so kommen noch weitere Glieder hinzu, welche die Durchschnittswerte der „äußeren Kräfte“ $A_1 = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial a_1}$, $A_2 = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial a_2}, \ldots$ darstellen und mit $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots$ bezeichnet werden mögen, und wir erhalten die Formeln

$$d\psi = \overline{\eta} d\theta - \overline{A}_1 da_1 - \overline{A}_2 da_2 - \cdots$$

oder wegen $d\psi - d\overline{\varepsilon} = d(\theta\overline{\eta})$ schließlich

$$d\overline{\varepsilon} = -\theta d\overline{\eta} - \overline{A}_1 da_1 - \overline{A}_2 da_2 - \cdots \tag{114}$$

ganz analog der Differentialbeziehung des zweiten Hauptsatzes, wenn θ der Temperatur, $\overline{\varepsilon}$ der Energie und $\overline{\eta}$ der negativen Entropie entspricht. Diese Analogie bleibt aber rein äußerlich und kann uns keine Aufklärung über den mechanischen Charakter der thermodynamischen Gleichung bieten. Denn die Größe $\overline{\eta}$, der Durchschnittswert des Wahrscheinlichkeitsexponenten, ist gar keine Eigenschaft der einzelnen mechanischen Systeme, auch keine durchschnittliche Eigenschaft, welche das allen Gemeinsame oder Vorwiegende zum Ausdruck bringen könnte, sondern sie hängt wie der Wahrscheinlichkeitsexponent selbst ausschließlich von der willkürlichen anfänglichen Phasenverteilung ab, während die Entropie eines Systems doch immer durch die Natur dieses einzelnen Systems selbst bestimmt sein muß. Ebensowenig kann das Glied $\theta d\overline{\eta}$ im eigentlichen Sinne die übergehende Wärme repräsentieren, da es sich lediglich auf eine Veränderung der Phasenverteilung, auf den Übergang zu einer neuen Gesamtheit, gar nicht auf eine Wechselwirkung der Systeme mit der Außenwelt bezieht. Will man in einwandsfreier Weise die Eigenschaften eines mechanischen Systems statistisch untersuchen, so muß man immer die Gesamtheit beibehalten und nur innerhalb dieser Gesamtheit die Änderungen der Durchschnittswerte bestimmen. Denn das einzelne System in seinem durchschnittlichen oder wahrscheinlichen Verhalten, nicht eine zwischen solchen Systemen willkürlich festgesetzte Beziehung sollte doch das mechanische Analogon eines physikalisch veränderten Naturkörpers darstellen.

Im 10. Kapitel untersucht der Verfasser eine andere Analogie mit Hilfe der „mikrokanonischen Phasenverteilung“, d. h. einer Phasenverteilung, in welcher alle Systeme die gleiche Energie haben, und die auch als ein Grenzfall einer kanonischen Gesamtheit aufgefaßt werden kann, indem man den Ausdruck $\eta = c - \frac{(\varepsilon - \varepsilon')^2}{\omega^2}$ für sehr große Werte von ω als Wahrscheinlichkeitsexponenten ansetzt. Jedem Energiewerte ε entspricht nun ein bestimmter Wert des im 8. Kapitel eingeführten Integrales

$$V = \int \ldots \int dp_1 \ldots dq_n$$

erstreckt über alle Phasen mit einer Energie $< \varepsilon$. Somit ist V, die Phasenausdehnung unter einer Energiegrenze ε, sowie auch der abgeleitete Wert $\varphi = \log \frac{\partial V}{\partial \varepsilon}$ eine Funktion von ε und den äußeren Koordinaten $a_1, a_2, \ldots$,

also konstant in jeder mikrokanonischen Gesamtheit. Bezeichnet man nun mit $\overline{A_1}|_\varepsilon$, $\overline{A_2}|_\varepsilon$ usw. die in der mikrokanonischen Gesamtheit genommenen Durchschnittswerte der äußeren Kräfte, so gelangt man zu der Gleichung

$$(418) \qquad d\varepsilon = e^{-\varphi} V d \log V - \overline{A_1}|_\varepsilon da_1 - \overline{A_2}|_\varepsilon da_2 - \cdots,$$

welche wieder der Gleichung des zweiten thermodynamischen Haupsatzes entspricht, wenn $e^{-\varphi} V = V / \frac{\partial V}{\partial \varepsilon}$ die Temperatur und $\log V$ die Entropie repräsentiert. Diese zweite Analogie entspricht nun schon sehr viel besser einem wirklichen Naturvorgange, da alle hier vorkommenden Größen wirkliche Eigenschaften der einzelnen Systeme sind, bestimmt durch den Ausdruck, welcher die Energie als Funktion der äußeren und inneren Koordinaten und der Impulse darstellt. Bezeichnet man ferner mit ε_p die kinetische Energie des Systems, so gilt für ihren Durchschnittswert in der mikrokanonischen Gesamtheit die Beziehung

$$(377) \qquad \frac{2}{n} \overline{\varepsilon_p}|_\varepsilon = e^{-\varphi} V,$$

es wird also wie in der kinetischen Gastheorie die lebendige Kraft der bewegten Teilchen ein Analogon der Temperatur. Dagegen gilt für solche mikrokanonischen Gesamtheiten nicht allgemein das Analogon des Satzes, daß zwei Körper von gleicher Temperatur vereinigt wieder ein System von derselben Temperatur ergeben.

Einen wesentlichen Bestandteil der Theorie bildet das 12. Kapitel, in welchem die Bewegung der Systeme und Gesamtheiten in langen Zeiten untersucht wird. Aus dem Gesetze von der Erhaltung der Phasenausdehnung wird der Satz von Poincaré hergeleitet, daß ein innerhalb endlicher Grenzen eingeschlossenes und sich selbst überlassenes, nur den Hamiltonschen Gleichungen folgendes mechanisches System im Poissonschen Sinne *stabil* ist. Betrachten wir nämlich ein beliebig kleines Gebiet g von Anfangsphasen von endlicher Phasenausdehnung, so wird wenigstens ein Teil, sogar der größte Teil dieser Phasen nach Ablauf einer beliebig langen Zeit T, wenn auch nicht genau in die Anfangsphase, so doch in dasselbe Gebiet g zurückkehren, die Bewegung wird also für den überwiegenden Teil der Phasen einen quasiperiodischen Charakter haben. Somit steht nicht zu erwarten, daß sich bei Bewegungen dieser Art eine Tendenz nach irgend einem Endzustande geltend machen werde. Gleichwohl versucht der Verfasser ein solches Verhalten wenigstens wahrscheinlich, plausibel zu machen, indem er seinen Gesamtheiten, sofern sie nicht schon in statistischem Gleichgewichte sind, eine Tendenz nach einem Endzustande statistischen Gleichgewichtes zuschreiben möchte. Für den Fall des statistischen Gleichgewichtes ist nun, wie im elften Kapitel gezeigt wird, der durchschnittliche Wahrscheinlichkeitsexponent $\bar{\eta}$ *kleiner* als bei jeder anderen Verteilung. Es müßte sich also der Wert $\bar{\eta}$ mit unbegrenzt wachsender Zeit seiner unteren Grenze $\bar{\eta}_0$ beliebig nähern. Dem gegenüber steht aber die Tatsache, daß der Wahrscheinlichkeitsexponent, welcher der jeweiligen Phase eines bewegten Systemes entspricht, und damit auch der mittlere Wahrscheinlichkeitsexponent der ganzen Gesamtheit auf Grund des Gesetzes von der Erhaltung der Phasendichte von der Zeit unabhängig, eine Konstante ist. Hier sucht sich nun der Verfasser durch Umdeutung und Ana-

logie zu helfen. Er denkt sich in einem geschlossenen Raum zwei nichtdiffundierbare inkompressible Flüssigkeiten von gleicher hydrodynamischer Beschaffenheit, eine gefärbte und eine ungefärbte, durcheinander gerührt. Dann wird nach einiger Zeit, im allgemeinen wenigstens, eine nahezu homogene Mischung entstehen, obwohl jedes Flüssigkeitsteilchen nach wie vor entweder der einen oder der anderen Flüssigkeit angehören muß, die Dichtigkeit des Farbstoffes also in jedem kleinsten Teilchen dieselbe geblieben ist. Das mittlere Quadrat dieser Dichte, das im Falle wahrer Homogenität seinen Minimalwert annehmen müßte, wird also dasselbe sein wie am Anfang, wenn die Dichte in jedem Augenblicke durch unbegrenzte Verkleinerung des Volumenelementes bestimmt wird. Berechnet man dagegen die mittlere Dichte für endliche wenn auch beliebig kleine Volumenelemente, die nach einer gewissen Zeit eine große Menge verschiedenartiger Flüssigkeitsteilchen enthalten werden, so erscheint die so bestimmte Dichte im Endzustande nahezu homogen, und ihr mittleres Quadrat hat gegen den Anfangszustand abgenommen. In analoger Weise glaubt der Verfasser durch Vertauschung der beiden Grenzübergänge der Folgerung von der Konstanz des mittleren Wahrscheinlichkeitsexponenten entgehen zu können, indem er nicht ohne Berechtigung der betrachteten Bewegung in dem Sinne „Instabilität“ zuschreibt, daß im allgemeinen anfangs benachbarte Phasen sich im Laufe der Zeit immer weiter voneinander entfernen und anfangs getrennte sich nähern werden. Diese Analogie ist aber irreführend. In dem vorliegenden Beispiele handelt es sich wesentlich um einen Gegensatz zwischen kontinuierlicher und diskontinuierlicher Dichtigkeitsverteilung. Eine anfangs vorhandene Diskontinuitätsfläche von beschränkter Ausdehnung wird durch fortgesetzte Bewegung in eine schwammartig verwickelte Fläche von ungeheurer Ausdehnung auseinander gezogen und über den ganzen Raum verbreitet, sodaß jeder nicht allzu kleine Raumteil schroffe Übergänge von der einen in die andere Flüssigkeit in sich enthält, seine mittlere Dichtigkeit aber von der des benachbarten nur unbedeutend abweicht. Es wird also durch das Umrühren die Inhomogenität aus dem Großen ins Kleine übertragen, während ihre durch das mittlere Quadrat der Farbstoffdichte gemessene Gesamtgröße ungeändert bleibt. Von einem solchen Gegensatz zwischen kontinuierlichen und diskontinuierlichen Dichtigkeitsänderungen ist aber bei den von Gibbs betrachteten Gesamtheiten durchaus nicht die Rede. Vielmehr wird die Phasendichte von vornherein als eine stetige Funktion des Ortes im Phasenraume aufgefaßt, und es liegt kein Grund vor, anzunehmen, daß sie in den kleinsten Teilchen immer inhomogener werden sollte, um in den größeren Teilen im Mittel homogener werden zu können. Daß sich der Verfasser jede Phasenausdehnung bei der ursprünglichen Einführung der Phasendichte nicht stetig sondern durch eine endliche wenn auch sehr große Zahl von Systemen erfüllt denkt, tut nichts zur Sache, da dies anfangs so gut wie später gelten müßte, seine Formeln wenigstens haben es nur mit einer im allgemeinen stetigen Phasenverteilung zu tun. Aus der oben zitierten Grundgleichung (21) der statistischen Mechanik folgt mathematisch streng, daß auch $\eta = \log \frac{D}{N}$ der Differentialgleichung genügt

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \sum \left(\frac{\partial \eta}{\partial p_i} \frac{\partial \varepsilon}{\partial q_i} - \frac{\partial \eta}{\partial q_i} \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_i} \right)$$

und daher $\int .. \int \eta\, dp_1 .. dq_n$ eine Bewegungsinvariante ist, d. h. $\bar{\eta} = \text{const.}$, und dies gilt ganz unabhängig vom Koordinatensystem, mag man die Volumenelemente ursprünglich größer oder kleiner wählen, die Phasendichte durch den einen oder den anderen Grenzübergang bestimmen.

Wäre es aber auch gelungen, durch geeignete Umdeutung des Dichtigkeitsbegriffes das gewünschte Resultat zu erzielen, so stände es doch jedenfalls im Widerspruche mit den anfangs gegebenen Grundgleichungen, d. h. mit der gesamten vorher entwickelten Theorie. Man müßte geradezu von vorn anfangen und eine neue Theorie begründen, in welcher der Satz von der Herstellung des statistischen Gleichgewichtes gelten könnte. Ganz unstatthaft ist es aber, wie der Verfasser es im folgenden Kapitel tut, Formeln der alten und der neuen Theorie zu kombinieren, indem er z. B. in (462) die Annahme $\bar{\eta}''_{12} \leqq \bar{\eta}'_{12}$ zu den Folgerungen aus früheren Entwicklungen hinzufügt. Mit widersprechenden Voraussetzungen kann man freilich alles beweisen, was man will, beweist aber damit in Wirklichkeit nur die Unzulässigkeit eines solchen Verfahrens. Aber noch ein Weiteres hätte ich gegen die Formel (462) einzuwenden. Angenommen selbst, es wäre bewiesen, daß $\bar{\eta}$ mit der Zeit seinem Minimalwerte zustrebte, so müßte dies, wie der Verfasser selbst zugibt (Gibbs, p. 150, deutsche Bearbeitung S. 153) für abnehmende Zeiten ebenso gut gelten wie für wachsende, und die Grenzwerte für $t = +\infty$ und für $t = -\infty$ wären dieselben. Dann ist es aber völlig willkürlich, einer Zeit $t'' > t'$ einen Wert $\bar{\eta}'' < \bar{\eta}'$ zuzuschreiben, ebenso gut könnte man umgekehrt verfahren; denn welcher der beiden Zustände, der frühere oder der spätere, dem Grenzzustande näher liegt, ist allgemein nicht zu entscheiden. Es gelten eben hier dieselben Einwände wie gegen das Boltzmannsche H-Theorem, und es sei mir daher gestattet, auf die prinzipielle Seite dieser früher von mir erörterten Frage hier noch mit einigen Worten zurückzukommen.

Daß aus den Prinzipien der statistischen Mechanik, die auch ich für die einzig zuverlässige Grundlage solcher Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen über dynamische Systeme halte, die beständige Zunahme irgend einer Phasenfunktion im Sinne des zweiten Hauptsatzes weder bewiesen noch auch wahrscheinlich gemacht werden kann, habe ich schon im Jahre 1896 mit Hilfe des Liouvilleschen und des Poincaréschen Satzes nachgewiesen[1]) und diesen Beweis dann 1899 nach verschiedenen Richtungen ergänzt.[2]) Es sei nämlich G irgend ein „invariantes Gebiet“ im Phasenraume, d. h. ein solches, aus welchem vermöge der Grundgleichungen weder Systeme austreten noch eintreten können, z. B. eines, das durch irgend welche Energiegrenzen ε' und ε'' bestimmt ist, und es sei u irgend eine eindeutige Phasenfunktion. Dann wird der für das Gebiet G genommene Durchschnittswert in der Gibbsschen Bezeichnung

$$\bar{u} = \int u P\, dp_1 .. dq_n$$

und ist von der Zeit unabhängig. Somit erhalten wir, weil die Phasenwahrscheinlichkeit $P dp_1 .. dq_n$ eine Bewegungsinvariante ist,

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \int \frac{du}{dt} P\, dp_1 .. dq_n = \overline{\frac{du}{dt}} = 0,$$

1) Zermelo, Ann. d. Phys. 57 (1896) S. 485.
2) Zermelo, Phys. Ztschr. 1 (1900) S. 317.

d. h. die Funktion u wird im betrachteten Gebiete im Durchschnitt weder zunehmen noch abnehmen, sondern beides wird gleich wahrscheinlich sein. Dasselbe ergibt sich aber auch, wenn G kein invariantes Gebiet, sondern ein in zwei Grenzen u' und u'' der betrachteten Phasenfunktion u eingeschlossener Bereich ist.[1]) Daß ich in meiner damaligen Darstellung der Einfachheit halber $P = 1$ angenommen hatte, ist für die Beweisführung selbst völlig unwesentlich. Meine Argumentation richtete sich nun auch gegen das Boltzmannsche H-Theorem, d. h. gegen die Behauptung, daß die von Boltzmann in die Gastheorie eingeführte Funktion H (Boltzmann, Vorlesungen über Gastheorie I § 5, 6), welche ebenso wie das Gibbssche η im wesentlichen den Logarithmus der Phasenwahrscheinlichkeit darstellt und der Entropie entsprechen soll, beständig abnehmen müsse. In der sich hieraus entwickelnden Polemik[2]) versuchte dann Boltzmann das H-Theorem zu retten, indem er seiner H-Kurve nicht mehr einen wesentlich absteigenden, sondern einen im allgemeinen gleichförmigen Verlauf parallel zur t-Achse zuschrieb, wobei die hin und wieder auftretenden „Buckel" um so seltener sein sollen, je größer sie sind. Mag hiermit auch dem Minimalwerte von H entsprechend die überwiegende Wahrscheinlichkeit der Maxwellschen Verteilung plausibel gemacht werden, so kann ich doch in einem solchen nahezu symmetrischen Verlaufe der Kurve eine wirkliche Analogie zur Irreversibilität der Naturvorgänge keineswegs erblicken, und welchen Anspruch auf Allgemeingültigkeit dann die Ungleichung $\frac{dH}{dt} \leqq 0$ noch haben soll, ist mir unverständlich geblieben. Weder die Boltzmannschen noch die Gibbsschen Deduktionen haben meine Überzeugung erschüttern können, daß eine kinetische Wärmetheorie auch im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung sich nur dann mit dem zweiten Hauptsatze wird vereinigen lassen, wenn man sich entschließt, an Stelle der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen solche Differentialgleichungen zugrunde zu legen, welche das Prinzip der Irreversibilität bereits in sich enthalten.

Die Ausführungen des 13. Kapitels, in dem die Wirkung verschiedener äußerer Einflüsse auf Systeme und Gesamtheiten untersucht wird, beruhen nun großenteils auf den im 12. Kapitel gewonnenen Ergebnissen und sind daher nach den vorstehenden Ausführungen nicht frei von inneren Widersprüchen. Es wird angenommen, daß eine Gesamtheit, wenn einmal durch äußere Einflüsse ihr statistisches Gleichgewicht gestört ist, innerhalb einer gewissen Zeit wieder zu einem solchen Gleichgewichte zurückkehren werde, und hieraus werden dann in Verbindung mit den sonst abgeleiteten Beziehungen Ungleichungen gewonnen, die den thermodynamischen zu entsprechen scheinen. Im letzten Kapitel werden endlich die allgemeinen Betrachtungen spezialisirt auf Systeme von Molekülen verschiedener Gattungen, in welchen gegenseitige Umsetzungen zwischen den verschiedenen Gattungen stattfinden können. Auch solche Gesamtheiten denkt Gibbs sich kanonisch verteilt mit einem Wahrscheinlichkeitsexponenten der Form

$$\text{(503)} \qquad \mathsf{H} = \frac{\Omega + \mu_1 \nu_1 + \cdots + \mu_h \nu_h - \varepsilon}{\theta},$$

1) Zermelo, Phys. Ztschr. 1 S. 319.

2) Boltzmann, Ann. d. Phys. 57 (1896) S. 773; ibid. 60 (1897) S. 392. Zermelo, Ann. d. Phys. 59 (1896) S. 793, vgl. auch Boltzmann, Enzykl. d. math. Wiss. V. 8.

wo die Zahlen $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_h$ die Anzahlen für die verschiedenen Partikelgattungen und Ω, θ, $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_h$ Konstanten bezeichnen. Aus diesem Ansatz ergeben sich dann wieder Gleichgewichtsbedingungen wie die folgende

$$d\Psi = \mathrm{H}\,d\theta + \sum \mu_1 d\bar{\nu}_1 - \sum \bar{A}_1 da_1, \tag{532}$$

die der thermodynamischen analog ist, wenn θ der Temperatur, $-\bar{\mathrm{H}}$ der Entropie und $\Psi = \bar{\varepsilon} + \theta\bar{\mathrm{H}}$ der freien Energie entspricht. Es ist aber physikalisch nicht recht einzusehen, wie denn das chemische Gleichgewicht der einzelnen Systeme mit dem statistischen Gleichgewichte ganzer Gesamtheiten zusammenhängen soll. Auch beruht die formale Analogie mit den thermodynamischen Gleichungen zum großen Teile nur auf der zu diesem Zwecke gewählten Form des Wahrscheinlichkeitsexponenten. Ich kann daher auch hier nicht zugeben, daß wir von solchen Analogien einen tieferen Einblick in das Wesen der chemischen Umsetzungen und ihrer Gleichgewichtsbedingungen zu erwarten hätten.

Einige weitere in dem besprochenen Werke mehr nebensächlich behandelte Gegenstände will ich zum Schlusse noch kurz erwähnen: im 2. Kapitel die Anwendung des Gesetzes von der Erhaltung der Phasenausdehnung auf die „Fehlertheorie“, wo aber im wesentlichen nur der Begriff, nicht die „Erhaltung“ der Phasenausdehnung benutzt wird, die Frage also nicht eigentlich der statistischen Mechanik angehört, und im 3. Kapitel die Anwendung desselben Prinzips auf die Integration der Bewegungsgleichungen mit Hilfe des „letzten Multiplikators“, für die aber statt Jacobis „Vorlesungen über Dynamik“ eine viel spätere Arbeit von Boltzmann als Quelle zitiert wird. Besonders verdienstvoll sind die Untersuchungen des 7. Kapitels, wo die Berechnung einer großen Zahl von Durchschnittswerten ausgeführt und Methoden zu ihrer Fortsetzung angegeben werden. Hervorzuheben ist dabei die eingehende Berücksichtigung der „mittleren Fehler“, deren Abschätzung allein uns gelegentlich berechtigen kann, die in der Untersuchung vorkommenden Größen statistisch durch ihre Durchschnittswerte zu ersetzen. Interessant ist auch das 11. Kapitel, in dem eine Reihe von Sätzen über Maximums- und Minimumseigenschaften verschiedener Verteilungen entwickelt werden. —

In seinem Vorworte bekennt der Verfasser, er versuche nicht, die Geheimnisse der Natur zu erklären, sondern wolle sich mit dem bescheideneren Ziele begnügen, die einfachsten Sätze einer Disziplin zu entwickeln, die einer künftigen mechanischen Naturerklärung als Grundlage dienen könne. Auf diesem Gebiete sei auch schon jetzt ein sicheres Fortschreiten möglich, während einer eingehenden Durchführung der Molekularhypothese zur Zeit noch unüberwindliche Schwierigkeiten entgegenständen. Hat ihn bei der Verfolgung dieses Zieles sein lebhaftes Interesse für die Sache auch gelegentlich verleitet, die selbstgesteckten Grenzen zu überschreiten und dem Irrtum zu verfallen, so kann doch das Unternehmen selbst, mit dem der hochverdiente Forscher seine Lebensarbeit beschlossen hat, nur als gelungen betrachtet werden. Wo immer man statistischer und wahrscheinlichkeitstheoretischer Betrachtungen in der Mechanik bedarf, wird man nicht umhin können, sich zunächst mit dem Gibbsschen Werke vertraut zu machen und auf den hier gelegten Grundlagen weiterzubauen.

Göttingen. E. Zermelo.

H. A. Lorentz, Abhandlungen über theoretische Physik. In zwei Bänden. Erster Band. Erste Lieferung. Mit 8 Figuren im Text. [298 S.] gr. 8°. Leipzig 1906, B. G. Teubner.

Auf den Vorschlag des Herrn Verlegers zu einem Neudruck meiner Abhandlungen über theoretische Physik bin ich gern, wenn auch nicht ohne Zaudern eingegangen. Entscheidend war dabei für mich die Erwägung, daß ich hierin Anlaß finden würde, meine Arbeiten einer gründlichen Sichtung und Revision zu unterziehen, diejenigen, die mir wertlos scheinen, ganz wegzulassen, das Übrige aber von mancher Unvollständigkeit und sonstigen Mängeln zu befreien und so umzugestalten, daß der Zusammenhang besser hervortreten würde. Indem ich mich nun bemüht habe, Inhalt und Form tunlichst zu verbessern, habe ich zu gleicher Zeit eine gewisse Einheit zu erreichen gesucht. Zu diesem letzteren Zwecke bin ich vielfach von der chronologischen Folge, in der die Abhandlungen erschienen sind, abgewichen und habe ich an vielen Stellen die mathematische Bezeichnungsweise geändert; auch habe ich hie und da Neues hinzugefügt und einige Artikel aufgenommen, die von meinen Vorlesungen herrühren. Das bunte Gewand der drei Sprachen bitte ich den Leser gütigst zu entschuldigen. Wir Holländer sind nun einmal genötigt, wenn wir uns an der gemeinsamen wissenschaftlichen Arbeit der Völker beteiligen wollen, in fremden Sprachen zu schreiben, und so habe ich es eben, je nach Umständen, bald in der einen, bald in der anderen versucht. Zu der Übersetzungsarbeit, die der Gebrauch einer einzigen Sprache erfordert hätte, fehlte mir die Zeit; auch wäre die Mühe wohl überflüssig gewesen.

Leiden. H. A. Lorentz.

J. Thomae, Grundriß einer analytischen Geometrie der Ebene. Mit 8 Figuren im Text. [X u. 183 S.] gr. 8. Leipzig 1906, B. G. Teubner.

Es ist mit großer Freude zu begrüßen, daß der Verfasser sich entschlossen hat, diesen Grundriß, den er seit einer Reihe von Jahren seiner Vorlesung zugrunde legt, zu veröffentlichen. Die reiche pädagogische Erfahrung einer langjährigen Dozententätigkeit hat der Darstellung den Stempel aufgedrückt. Es ist so ein Buch entstanden, das man wirklich jedem jungen Studierenden zur Einführung unbedenklich empfehlen kann und das genau an der Stelle einsetzend, wo der Schulunterricht aufgehört hat, ihn auf interessanten Pfaden in die wesentlichen Ideen der analytischen und projektiven Geometrie einführt.

Der Kursus beginnt mit einer analytischen Einleitung, in der die fundamentalen Begriffe des Doppelverhältnisses und der Projektivität auseinandergesetzt werden. Dann wird die Geometrie in der Geraden und im Strahlenbüschel behandelt. Es folgt ein Abschnitt über Punktkoordinaten in der Ebene, in dem bis zum Satz des Desargues gegangen wird. Nach Möglichkeit werden schon hier, wie auch später Anwendungen auf Einzelaufgaben gemacht. Es sind hier, wie im größten Teil des Buches gewöhnliche Cartesische Koordinaten gebraucht, was in Hinblick auf Anfänger sehr angebracht ist, die im Anfange ihrer Studien auf der Universität schon so mit der Aneignung des unumgänglichen Formalismus belastet sind, daß man nicht unbedingt Nötiges zunächst vermeiden sollte, zumal da es später mühelos nachgeholt wird.

Sehr anregend ist die nachfolgende Auseinandersetzung über Dualität und Linienkoordinaten, welche mit einer räumlichen geometrischen Konstruktion der Verwandtschaft beginnend zu der allgemeinen analytischen Formulierung aufsteigt und in dem für die lebendige Frische des Stils ebenso wie für die Sache charakteristischen Ausspruch gipfelt: „Die Funktionszeichen sind Gefäße, die einen andern Wein liefern, wenn man sie am uvHahn anzapft, als am xyHahn.“ Es folgt nun ein Abschnitt über den Kreis, bemerkenswert durch schöne Anwendungen (z. B. Bestimmung des Ortes gleicher scheinbarer Größe zweier Strecken, Apollonisches Problem, Malfattis Problem). Nachdem man so annehmen kann, daß die neuen Methoden dem Studierenden vertraut sind, wird das neue Hilfsmittel der Determinanten eingeführt, wobei eine Beschränkung auf die Determinanten dritten Grades stattfindet. Die dann behandelte Klassifikation der Kegelschnitte und Bestimmung der Hauptachsen wird durch ein numerisches Beispiel erläutert. Hiernach wird die projektive Erzeugung der Kegelschnitte gelehrt und die Polarentheorie behandelt. Auch über Kegelschnittbüschel wird der grundlegende Satz abgeleitet. Endlich wird die Lehre von der Dualität noch einmal an der Hand der Polarentheorie erläutert und angewendet. Es folgt endlich die Definition der Dreieckskoordinaten und die Behandlung der ebenen Kollineation. Ein besonderer Wert ist im ganzen Buche auf die Konstruktion der behandelten Gebilde gelegt. Diese Seite wird bei den jungen Studierenden besondere Gegenliebe finden, die geradezu ein Bedürfnis empfinden, sich die neuen Vorstellungen auf diese Weise zu eigen zu machen. Die vom Verfasser ausgesprochene Hoffnung, daß er diesen das Studium und Verständnis der analytischen und projektiven Geometrie erleichtern wird, wird sich gewiß erfüllen.

Halle a/S. Felix Bernstein.

L. Heffter und C. Köhler, Lehrbuch der analytischen Geometrie. Erster Band. Geometrie in den Grundgebilden erster Stufe und in der Ebene. Mit 136 Figuren im Text. [XVI u. 526 S.] gr. 8. Leipzig und Berlin 1905, B. G. Teubner.

Wenn man die große Weiterentwicklung, welche die analytische Geometrie im 19. Jahrhundert unter dem Einfluß der projektiven Ideen genommen, in ihren wichtigsten Zügen charakterisieren will, so dürfte man etwa die folgenden Momente hervorheben. Der analytische Apparat wurde durch die Erfindung der Determinanten, der sich das Studium der Invarianten anschloß, von Jacobi, Hesse, Clebsch, Sylvester, Cayley u. a. vervollkommnet. Die von Möbius und Hesse begonnene Einführung allgemeiner Koordinaten wurde von Plücker durch die Einführung eines beliebigen analytischen Gebildes als Raumelements zu höchster Vollendung gebracht und damit zugleich die Deutung analytischer Beziehungen in der Geometrie mit einem Schlage ebenso vervielfacht, wie die analytische Formulierung geometrischer Tatsachen. Zugleich lag in dem Prinzip der Wechsel des Raumelements die allgemeinste Auffassung des von Poncelet und Gergonne begründeten Prinzips der Dualität. Von Poncelet, Laguerre und endlich von Cayley geschah dann durch Einführung des Kugelkreises der Schritt, die Metrik in das projektive System einzuordnen, indem die metrischen Beziehungen als projektive Beziehungen zum Kugel-

kreise hergeleitet wurden. Volle Klarheit über die prinzipielle Klassifizierung der verschiedenen geometrischen Eigenschaften der Figuren sowie über den Aufbau der entsprechenden Geometrie gab dann die von Klein und Lie begründete Theorie der geometrischen Gruppen. Die bei den Transformationen der Gruppe oder einer ihrer Untergruppen invarianten Eigenschaften der Figuren stellen sich, wie F. Klein dies vor allem ausführt, als Beziehungen zwischen den Invarianten der betreffenden Gruppen heraus und gewinnen in diesen einfachsten analytischen Ausdruck. Endlich strebt die neuere Entwickelung der Geometrie dahin, die Tragweite einer geometrischen Entwickelung dadurch zu erweitern, daß sie als Konsequenz eines Axiomensystems bestimmter Art hingestellt wird, welches in den allerverschiedensten geometrischen Gebilden gedeutet, denselben logischen Inhalt in dem geometrisch verschiedenen Gewande darstellt. So hatte übrigens schon Gergonne die Begründung des Dualitätsprinzips geleistet.

Man muß diese ganze Entwickelung vor Augen haben, um zu verstehen, wie groß der Abstand zwischen den Lehrbüchern und der fortschreitenden Wissenschaft geworden ist. Jeder Versuch, denselben zu verringern, muß daher mit Freuden begrüßt werden. In dieser Richtung haben sich die Verfasser L. Heffter und C. Köhler des vorliegenden Lehrbuchs ein großes Verdienst erworben. Analysieren wir nun im einzelnen den von ihnen eingeschlagenen Gang.

Die Verfasser haben es besonders als ihre Aufgabe betrachtet, die strenge Scheidung der Geometrien, welche durch F. Klein vorgenommen ist, auszubauen und elementar darzustellen. Sie sind dabei von der projektiv reellen Gruppe ausgegangen und sind dann durch Auszeichnung der unendlich fernen Elemente zur Parallelmetrik, durch Auszeichnung der Kreispunkte zur Orthagonalmetrik oder gewöhnlichen Metrik übergegangen.

Es hätte im Sinne ihres Programmes gelegen, diesen Weg zugleich so zurückzulegen, daß sie für jede Geometrie zunächst das charakteristische Axiomensystem aufgestellt hätten und darauf die betreffende analytische Entwickelung gestützt hätten. Indessen schien ihnen dieser Weg einer independenten Begründung der projektiven Geometrie, wie sie zuerst F. Klein anstrebte, zu abstrakt, und sie haben sich die Inkonsequenz gestattet, den metrischen Begriff der Strecke vorauszusetzen.

Inzwischen ist der zweite Band der Enzyklopädie der Elementarmathematik von Weber und Wellstein erschienen, in dem Wellstein sich der gleichen Aufgabe unterzogen hat, und es scheint mir, daß es Wellstein überraschend gelungen ist, einen zugleich elementaren und strengen Aufbau der projektiven Geometrie im hier geforderten Sinne zu geben, indem er aus den ebenen projektiven Axiomen die nötigen Konstruktionen herleitet, die das projektive Rechnen mit Doppelverhältnissen begründen. Wie dem auch sei, jedenfalls führt der Weg der Verfasser schnell in medias res der analytischen Formeln, und hier werden mit großer Eleganz und Sorgfalt die grundlegenden Sätze über Punktepaare, Involutionen, Büschel von Punktepaaren hergeleitet, wobei stets genau zwischen projektiven und affinen Eigenschaften unterschieden wird. Analog wird dann der Büschel behandelt und auf den charakteristischen Unterschied des Fehlens der affinen Beziehung, aber des Vorhandenseins der orthogonalen Beziehung hingewiesen.

Diese Gegenstände machen den Inhalt des 1ten Abschnitts aus, der sich mit den Grundgebilden 1ter Stufe beschäftigt und in vieler Hinsicht einen vorbereitenden Charakter trägt.

Den Kern des Buches bildet der zweite Abschnitt, der nun in ganz analoger Folge die Geometrie in den Grundgebilden zweiter Stufe, zunächst die Geometrie der Ebene behandelt.

Die Betrachtung ist so gegliedert, daß erst die projektive Geometrie mit den charakteristischen Doppelverhältniskoordinaten, dann die affine Geometrie mit den als Hessesche Koordinaten bezeichneten Abstandsverhältniskoordinaten, endlich die äquiforme oder gewöhnliche Geometrie mit den üblichen Koordinatensystemen abgehandelt wird. Hierbei ist im ganzen das geometrische Gebilde durch das einmal gewählte Koordinatensystem definiert. Der Plückersche Gesichtspunkt der mehrfachen geometrischen Deutung derselben Formel tritt, obgleich der Beweis des Dualitätsgesetzes durchaus auf die Analogie der Formeln gegründet wird, etwas mehr zurück, als man wünschen möchte. Der Gergonnesche Gedankengang ist zwar in der Einleitung angedeutet, aber da es sich um eine volle Durchführung nach der Seite der axiomatischen Grundlegung nicht handelt, so dient er mehr als heuristische Überlegung, denn als Beweis des Dualitätsprinzips. In Hinsicht der Plückerschen Gedanken dürfte der noch ausstehende Band reichliche Gelegenheit zu weiterer Ausführung bieten. Interessant ist die Durchführung des Beweises des Staudtschen Satzes, daß jede kollineare Beziehung zweier ebenen Felder auch projektiv ist.

Auf die allgemeinen Ausführungen folgen die projektiven Eigenschaften der Kurven II. Ordnung und II. Klasse, sowie die projektive Einteilung der Kegelschnitte, woran sich eine Darstellung der projektiven Eigenschaften des Kegelschnittbüschels und der Kegelschnittschar anschließt. Es folgen dann in gleicher Anordnung die affinen und die äquiformen Eigenschaften dieser Gebilde, insbesondere sind die Brennpunktseigenschaften der Kegelschnitte auf Grund der Betrachtung der vom Kegelschnitt und dem absoluten Gebilde bestimmten Kegelschnittschar hergeleitet. Es ist selbstverständlich, daß die Verfasser, die vor allem einen wissenschaftlich grundlegenden Gedanken zur vollen Klarheit bringen wollten, mancherlei weggelassen haben, am bedauerlichsten ist es, daß die Geometrie der reziproken Radien sehr kurz behandelt worden ist. Im Sinne der Verfasser wäre es gewesen, das Verhältnis der reellen projektiven Gruppe innerhalb der komplexen projektiven Gruppe ein wenig zu erörtern; spielt doch das Imaginäre naturgemäß eine so große Rolle, daß auch die imaginäre Transformation eine Erörterung verdient.

Die Darstellung ist durchweg präzis, elegant und gut geordnet. Die wichtigen Abschnitte schließen mit Übersichten, die zum Teil durch vorzügliche Tabellen unterstützt werden. Wünschenswert wären historische Bemerkungen gewesen, da das Buch doch ein Lehrbuch sein soll, von dessen Leser man allzu große Selbständigkeit in der Ausfüllung dieser Lücke nicht erwarten darf.

Besonders zu rühmen ist die sorgfältige Durchführung der Diskussion aller Ausartungen und Spezialfälle, wodurch eine der wesentlichsten Anforderungen geometrischer Strenge erfüllt wird. Alles in allem ist es ein Buch, das man nicht nur gern zu Rate ziehen wird, sondern auch mit Ver-

gnügen lesen wird, da die einheitliche Durchführung des angelegten Planes eine Art ästhetischen Genusses gewährt.

Halle a/S. FELIX BERNSTEIN.

J. J. Thomson D. SC. LLD. Ph. D. ER. S. Fellow etc. **Elektrizitäts-Durchgang in Gasen.** Deutsche autorisierte Ausgabe unter Mitwirkung des Autors besorgt und ergänzt von Dr. Erich Marx, Privatdozent an der Universität Leipzig. Mit 187 Figuren im Text. [VII u. 587 S.] gr. 8°. Leipzig 1906, B. G. Teubner.

Ich habe versucht, die Übersetzung der „Conduction of Electricity through Gases" so auszuführen, daß der Grundcharakter J. J. Thomsonscher Schreibweise gewahrt bleibt: Nicht nur der Inhalt, auch der Ausdruck zielt dahin, die räumliche Anschauung des Geschilderten zu ermöglichen. — Die stets auf den Mechanismus des physikalischen Vorgangs gerichtete Fragestellung erhellte hier das Dunkel, das über dem Gebiete der Gasentladung trotz 40jähriger Erforschung lag. J. J. Thomsons Entdeckung der Elektronen im Kathodenstrahl, die Durchforschung des Elektrizitätsdurchgangs in Gasen von höherem Druck mit Methoden, die allein der Einführung des mechanischen Bildes der Ionenhypothese zu danken sind, schließlich die außerordentlich fruchtbare J. J. Thomson-Townsendsche Hypothese der Ionisation durch Stoß, brachte über dieses Spezialgebiet eine Aufklärung, die sich von hier aus über das ganze Gebiet physikalischer Forschung ausbreitete. Die kinetische Theorie der Ionen hat den Einblick in die Einheitlichkeit der Naturkräfte, in den Zusammenhang von Äther und Materie mächtig gefördert; sie hat einen Fortschritt naturwissenschaftlicher Erkenntnis, wie ihn kaum je ein Dezennium der Forschung zu verzeichnen hatte, zu der Zeit gezeitigt, in der die energetische Richtung der Naturphilosophie den erkenntnistheoretischen Wert der bewährten, gaskinetischen Vorstellungen negierte. — Die deutsche Ausgabe enthält verschiedentlich Ergänzungen gegenüber der englischen. Sie bezwecken, den Fortschritten der Wissenschaft in den $2^1/_2$ Jahren seit Erscheinen des Werkes in gewissen Grenzen gerecht zu werden. Maßgebend für die Auswahl derselben blieben auch bei der deutschen Ausgabe die einleitenden Worte J. J. Thomsons: „... I have therefore confined myself for the most part to those phenomena which furnish results sufficiently precise to serve as a test of the truth of this (Ionen-) theory...." — Diese Ergänzungen sind, soweit sie größeren Umfang haben, um die Paragraphenfolge der englichen Ausgabe beizubehalten, sie aber als Neueinschaltungen zu kennzeichnen, mit Buchstaben neben den Paragraphenzahlen versehen; sie tragen sämtlich den Charakter des Referates, sind deshalb so geschrieben, daß sie mit Begriffen operieren, die dem Fachmann geläufig sind, demjenigen aber, der das Werk als Lehrbuch benutzt, zum Teil erst in späteren Kapiteln erklärt werden. Anders konnte die Einschaltung, bei Vermeidung einer beträchtlichen Erweiterung des Umfanges des Werkes, nicht geschehen, wollte man nicht einer Anfügung als Nachtrag, die wegen der hiermit verbundenen Unübersichtlichkeit unterblieben ist, den Vorzug geben. — Von ausführlicheren Ergänzungen verdanke ich im Kap. 13, 15, 17 einige, als solche gekennzeichnete, dem Präsidenten d. R. Herrn Prof. Dr. Warburg. — Durch die Anordnung von Satz und Figuren wurde es möglich, daß trotz der Neueinfügung von über 50 Druckseiten,

also etwa $^1/_{10}$ der englischen Ausgabe, Volumen und Preis der deutschen Ausgabe sich gegenüber der englischen kaum erhöht haben. — Ein ausführlicheres Referat des Originals konnte fortgelassen werden: Blondlots Versuch der Geschwindigkeitsmessung der Röntgenstrahlen; an seine Stelle ist ein Bericht über den entsprechenden Versuch des Herausgebers getreten. — Eine äußerliche Neuerung der deutschen Ausgabe sind die Marginalien, die, in großer Zahl angebracht, ein fast vollständiges Gerippe des geistigen Inhaltes des Werkes darstellen. Die Klarheit des ganzen Aufbaues des Thomsonschen Werkes tritt hier aufs prägnanteste zutage. Meine Absicht war es, durch diese Marginalien dazu beizutragen, daß das Thomsonsche Werk nicht nur dem Lehrer und Jünger der Physik ein zur schnellen Orientierung unübertroffenes Handbuch werde, sondern auch dem Forscher in den Nachbargebieten, der für seine Zwecke die Erscheinungen der Radioaktivität, der Kathoden- und Röntgenstrahlen verwertet, die Benutzung des hervorragendsten Fachwerkes zu erleichtern.

Leipzig. Erich Marx.

Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics. Unter diesem Titel erscheint im Verlage der Cambridge University Press unter der Leitung von J. G. Leathem und E. T. Whittaker eine Sammlung von Schriften über Mathematik und mathematische Physik. Es sind Abhandlungen geplant, die in Form von Monographien verschiedene wichtige Fragen der genannten Gebiete behandeln sollen, und zwar im Umfange von etwa 30—70 Seiten. Bisher erschien ein Heft von 47 Seiten Umfang, in dem Herr Leathem behandelt: Volume and surface integrals in physics. Die Schrift zerfällt in folgende Abschnitte: On the validity of volume integral expressions for the potential and the components of attractions of a body of discontinuous structure; Potentials and attractions of accurately continuous bodies; Volume integrals; Theorems connecting volume and surface integrals; The differentiation of volume integrals; Applications to potential theory; Application to theory of magnetism; Surface integrals; Volume integrals through regions that extend to infinity. — In Vorbereitung befinden sich folgende Hefte: Hardy, The integration of functions of a single variable; Bromwich, Quadratic forms and their classification by means of invariant factors; Hobson, The definite integral, its meaning and fundamental properties; Scott, Singular points and asymptotes of plane curves; Whitehead, The axioms of geometry; Whittaker, The Eikonal and its application to optical instruments.

Henri Poincaré, Membre de l'Institut, **Wissenschaft und Hypothese.** Autorisierte deutsche Ausgabe mit erläuternden Anmerkungen von F. und L. Lindemann. Zweite verbesserte Auflage. [XVI u. 346 S.] 8°. Leipzig 1906, B. G. Teubner.

Auf Grund der siebenten Auflage der französischen Ausgabe sind einige unbedeutende Änderungen im Texte vorgenommen worden, bez. Sätze eingeschoben (besonders Seite 90); außerdem sind Übersetzung und Anmerkungen gründlich revidiert und an manchen Stellen verbessert.

München. F. L.

2. Bücherschau.

Clebsch, F., Vorlesungen über Geometrie. Bearbeitet und herausgegeben von Dr. Friedrich Lindemann. Ersten Bandes erster Teil. Erste Lieferung. 480 S. gr. 8. Leipzig 1906. ℳ 12.—.

Czuber, E., Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. I. Band. Mit 115 Fig. XIV, 560 S. gr. 8°. Leipzig 1906. ℳ 12.—.

Ferval, H., Éléments de géométrie descriptive, à l'usage des candidats aux baccalauréats de l'enseignement secondaire et aux écoles du gouvernement. 6ᵉ éd. VI, 326 p. avec fig. et carte. Paris 1906.

Gerland, E., Leibnizens nachgelassene Schriften physikalischen, mechanischen und technischen Inhalts. Mit 200 Figuren im Text. VI, 256 S. gr. 8°. Leipzig 1906. ℳ 10.—.

Goursat, E., Cours d'analyse mathématique. T. 2. VI, 640 p. 8°. Paris 1905. Fr. 20.—.

Hadamard, J., Leçons de géométrie élémentaire. I. Géométrie plane. 2ᵉ éd. XVI, 309 p. 8°. Paris 1906. Fr. 6.—.

Husson, E., Recherche des intégrales algébriques dans le mouvement d'un solide pesant autour d'un point fixe Thèse. 85 p. 4°. Paris 1905.

Jäger, G., Die Fortschritte der kinetischen Gastheorie. Mit 8 eingedruckten Abbildungen. 8°. Braunschweig 1906. ℳ 4.10.

Keck, W., Vorträge über Elastizitätslehre als Grundlage für die Festigkeitsberechnung der Bauwerke. 2. verm. Aufl., neu bearbeitet von L. Hotopp. 1. Teil. VIII, 306 S. 8°. Hannover 1905. ℳ 8.—.

Kiseljak, M., Grundlagen einer Zahlentheorie eines speziellen Systems von komplexen Größen mit drei Einheiten. 29 S. Dissert. Bonn.

Lebon, E., Géométrie descriptive et géométrie cotée, conforme aux programmes du 31 mai 1902 pour l'enseignement secondaire. VI, 176 p. avec fig. Paris 1905. Fr. 3.50.

Liebmann, J., Beiträge zu einer universelleren Anwendung der Querlibelle für die Kontrolle der fundamentalen Sternörter. Dissert. Mit 1 Taf. 26 S. 4°. Berlin.

Mellor, J. W., Höhere Mathematik für Studierende der Chemie und Physik und verwandte Wissensgebiete. In freier Bearbeitung der 2. engl. Ausgabe herausgegeben von A. Wogrinz und A. Szarvassi. XI, 412 S. m. 109 Fig. 8°. Berlin 1906. ℳ 8.—.

Müller, Felix, Schellbach, Rückblick auf sein wissenschaftliches Leben. Nebst zwei Schriften aus seinem Nachlaß und Briefen von Jacobi, Joachimsthal und Weierstraß. Mit einem Bildnis Karl Schellbachs. 86 S. gr. 8°. Leipzig 1905. ℳ 2.80.

Osgood, W. F., Lehrbuch der Funktionentheorie. I. Bd. 1. Hälfte. 306 S. m. Fig. gr. 8°. Leipzig 1906. ℳ 7.—.

Pockels, F., Lehrbuch der Kristalloptik. Mit 168 Figuren und 6 Doppeltafeln. X, 519 S. gr. 8°. Leipzig 1906. ℳ 16.—.

Ritter, W., Anwendungen der graphischen Statik. Nach Culmann bearbeitet. 4. Teil. Der Bogen. VII, 269 S. m. 120 Fig. u. 3 Taf. 8°. Zürich 1906. ℳ 9.60.

Rosenkranz, P. N., Geschichtliche und technische Entwicklung des Indikators. Nachtrag zur 6. Aufl. des Hauptwerkes: Der Indikator und seine Anwendung. VI, 108 S. 8°. Berlin 1906. ℳ 3.—.

Rouché et Lévy, Analyse infinitésimale, à l'usage des ingénieurs. T. 2. VII, 648 p. 8°. Paris 1905. Fr. 15.—.

Sannia, A. e D'Ovidio, E., Elementi di geometria. Vol. 1, ad uso dei ginnasii. 12ª ediz. XVI, 200 p. 8°. Napoli 1906. L. 2.—.

Sauer, R., Eine polynomiale Verallgemeinerung des Fermatschen Satzes. Dissert. 18 S. Gießen.

Simon, M., Methodik der elementaren Arithmetik in Verbindung mit algebraischer Analysis. Mit 9 Figuren. VI, 108 S. gr. 8°. Leipzig 1906. ℳ 3.20.

Sommerfeldt, E., Geometrische Kristallographie. X, 139 S. m. 69 Abb. und 31 Taf. 8°. Leipzig 1906. ℳ 7.—.

Tapla, Th., Grundzüge der niederen Geodäsie. III. Kartierung. Mit 14 lith. Tafeln. VII, 107 S. Wien 1906. ℳ 3.50.

Thalreiter, F., Auflösung gewisser algebraischer Eliminationsaufgaben durch Benutzung der Teilungsgleichungen der $\wp$-Funktion. Dissert. 59 S. München.

Thomae, J., Grundriß einer analytischen Geometrie der Ebene. Mit 8 Fig. X, 183 S. gr. 8°. Leipzig 1906. ℳ 3.60.

Wallner, C. R., Die Verteilung der Primzahlen nach neuen Gesichtspunkten betrachtet. 53 S. Dissert. München.

3. Zeitschriftenschau.

(Von dem Inhalt der Zeitschriften werden nur die Aufsätze erwähnt, welche dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften angehören.)

Mathematische Annalen. 62. Band. 1. Heft.

Hartogs, Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen, insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen, welche nach Potenzen einer Veränderlichen fortschreiten. Loewy, Über vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichungen. Koenigsberger, Über das identische Verschwinden der Hauptgleichungen der Variation vielfacher Integrale. Kürschák, Die Existenzbedingungen des verallgemeinerten kinetischen Potentials. Rados, Zur ersten Verteilung des Bolyai-Preises.

Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 129. Heft 3—4.

Mertens, Ein Beweis des Satzes, daß jede Klasse von ganzzahligen primitiven binären quadratischen Formen des Hauptgeschlechts durch Duplikation entsteht. — Hurwitz, Über eine Darstellung der Klassenzahl binärer quadratischer Formen durch unendliche Reihen. — Wirtinger, Über eine besondere Dirichletsche Reihe. — Minkowski, Diskontinuitätsbereich für arithmetische Äquivalenz. — Picard, Sur quelques questions se rattachant à la connexion linéaire dans la théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes. — Schlesinger, Über die Lösung gewisser linearer Differentialgleichungen als Funktionen der singulären Punkte. — Steinitz, Über die Anziehung hyperboloidischer Schalen.

Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg. Band IV, Heft 6. Februar 1906.

Teege, Ein direkter Beweis des Additionstheorems in der Lehre von den elliptischen Funktionen. — Busche, Lösung einer Aufgabe über Teileranzahlen. — Hoppe, Die Kant-Laplacesche Theorie und die Gasgesetze. — Lony, Elementargeometrische Herleitung einer nichteuklidischen Längenmaßbestimmung. — Schröder, Zur Berechnung der Potenzsummen der Teiler von 1 bis n. — Schwaßmann, Über eine Methode, einen Wert für den Brechungsexponenten der die Sonne umgebenden Materie zu erhalten. — Wetzler, Integration von $(\wp(u))^n$, wo $\wp(u)$ die Weierstraßsche Funktion bedeutet.

Zeitschrift für Mathematik und Physik. 52. Band. 4. Heft.

Schimmack, Ein kinematisches Prinzip und seine Anwendung zu einem Katenographen. — Timpe, Probleme der Spannungsverteilung in ebenen Systemen, einfach gelöst mit Hilfe der Airyschen Funktion. — Weitbrecht, Über die elastische Deformation eines kreisförmigen Ringes. — Reuser, Die vorteilhafteste Pfeilhöhe eines gleichmäßig belasteten symmetrischen Dreigelenkbogens mit kreisförmiger Mittellinie. — Holtsmark, Über eine Anwendung der Fehlerwahrscheinlichkeitstheorie auf Größen, welche sich nicht rein zufällig ändern. — Doehlemann, Die Perspektive der Brüder van Eyck. — Biske, Katoptrisches Okular. — Schnöckel, Graphisch-analytische Ausgleichung eines ebenen Linienzuges nach der Methode

der kleinsten Quadrate. — Mack, Tangentenkonstruktion mit Hilfe des Spiegellineals. — Kleinere Mitteilungen. — Bücherschau.

Zeitschrift für Mathematik und Physik. 53. Band. 1. Heft.

Nitz, Beiträge zu einer Fehlertheorie der geometrischen Konstruktionen. Mie, Über die Kurzschlußstromkurve eines Gleichstromankers. Ernst, Zur Addition und Subtraktion mit Hilfe des logarithmischen Rechenschiebers. Kleinere Mitteilungen. Bücherschau.

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. 37. Jahrgang. 1. Heft.

Eckhardt, Berechnung der zyklometrischen und goniometrischen Funktionen ohne Reihenentwicklung. Hagge, Das Volumen des Tetraeders als Funktion der Kanten. Epstein, Ein Zerlegungsbeweis des Pythagoreischen Lehrsatzes. Tesař, Ein Beispiel aus der Mathematik und Mechanik zur Lehre von den Größenordnungen Pasternak, Über die Identität $(m^2+n^2)(o^2+p^2)=(mo\pm np)^2+(mp\mp no)^2$. Hermes, Bemerkungen zum Paskalschen Sechsecke. Milarch, Elementare Berechnung der Logarithmen. Aufgaben-Repertorium. Literarische Berichte. Pädagogische Zeitung.

Nouvelles Annales de Mathématiques. Quatrième Série. Tome VI. Janvier 1906.

Halphen, Théorie et application du coin. — De Saint-Germain, Note relative au mouvement de rotation. — Juhel-Rénoy, Sur le théorème de Ptolémée et son application aux polygones réguliers. — Fouché, Au sujet d'un théorème connu. Note au sujet de l'article précédent. — Vacquant, Solution de la question de mathématiques spéciales au concours d'aggrégation de 1905. — Bibliographie. — Questions. — Solutions.

4. Kataloge.

Buchhandlung Gustav Fock, Leipzig. Lager-Verzeichnis Nr. 280. Physik, Astronomie, Geodäsie, Meteorologie, Nautik. (2802 Nummern.)

Gauthier-Villars, Paris. Bulletin des publications nouvelles. Année 1905. IIe et IIIe trimestre.

5. Bei der Redaktion eingegangene Schriften.

[Titel, Preis usw. der eingesandten Schriften werden hier regelmäßig veröffentlicht. Besprechungen geeigneter Bücher bleiben vorbehalten. Eine Rücksendung der eingegangenen Schriften kann nicht erfolgen.]

R. Böttger, Beiträge zur Geschichte und Methode des chemischen Unterrichts in der Volksschule. B. G. Teubner, Leipzig 1906. ℳ 1.40.

F. Clebsch, Vorlesungen über Geometrie. Bearbeitet und herausgegeben von Dr. Friedrich Lindemann. Ersten Bandes erster Teil. Erste Lieferung. 480 S. gr. 8. Leipzig 1906, B. G. Teubner. ℳ 12.—.

E. Czuber, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. Erster Band. Mit 115 Figuren im Text. Zweite, sorgfältig durchgesehene Auflage. B. G. Teubner, Leipzig 1906. ℳ 12.—.

Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées. Edition française (Jules Molk). Tome I. Vol. 4. Fasc. 1. [Czuber, Calcul des probabilités; Selivanov, Calcul des différences et interpolation.] B. G. Teubner, Leipzig 1906. ℳ 4.—.

V. Fischer, Grundbegriffe und Grundgleichungen der mathematischen Naturwissenschaft. Mit 12 Figuren. VIII, 108 S. 8. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1906. ℳ 4.50.

J. Franz, Der Mond. B. G. Teubner, Leipzig 1906. ℳ 1.25.

E. Gerland, Leibnizens nachgelassene Schriften physikalischen, mechanischen und technischen Inhalts. Mit 200 Figuren im Text. B. G. Teubner, Leipzig 1906. ℳ 10.—.

A. Höfler, Physik mit Zusätzen aus der angewandten Mathematik, aus der Logik und Psychologie und mit 230 physikalischen Leitaufgaben. Mit 981 Abbildungen im Text und 12 Tafeln. XXXI, 966 S. 8°. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1904. *M.* 16.—.

A. Höfler, Hilfsbuch zur Physik enthaltend Zusätze aus der angewandten Mathematik, aus der Logik und Psychologie und 230 physikalische Leitaufgaben. VIII, 258 S. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1904. *M.* 4.—.

A. Höfler, Naturlehre für die Oberstufe der Gymnasien, Realschulen und verwandter Lehranstalten. Mit 459 Abbildungen im Text und 9 Tafeln. XIII, 407 S. 8. Fried. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1903. *M.* 5.—.

A. Höfler, Hilfsbuch zur Naturlehre für die Oberstufe der Gymnasien, Realschulen und verwandter Anstalten, enthaltend Zusätze aus der angewandten Mathematik, der Logik und der Psychologie und 80 Leitaufgaben. IV, 93 S. 8. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1904. *M.* 1.20.

A. Höfler, Repetitorium der Physik. Mit 241 Abbildungen im Text. VIII, 203 S. 8. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1904. *M.* 3.50.

A. Höfler, Die humanistischen Aufgaben des physikalischen Unterrichtes. Akademische Antrittsvorlesung. 17 S Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1904. *M.* 0.50.

H. Kistler, Über Funktionen von mehreren komplexen Veränderlichen. Dissertat. Göttingen 1906.

H. A. Lorentz, Abhandlungen über theoretische Physik. Erster Band. Erste Lieferung. Mit 8 Figuren im Text. 298 S. gr. 8°. B. G. Teubner, Leipzig 1906. *M.* 10.—.

H. Maurer, Methodisch geordnete Sammlung geometrischer Aufgaben in bildlicher Darstellung. 3360 Aufgaben in vier Bänden. Zum Selbststudium und zum Unterricht an höheren Lehranstalten. I. Band, enthaltend die Aufgaben 1 bis 840. Verlag von E. Speidel, Zürich 1906, *M.* 2.50.

Max Möller, Die abgekürzte Dezimalbruchrechnung. Alfred Hölder, Wien 1906.

Felix Müller, Karl Schellbach. Rückblick auf sein wissenschaftliches Leben. Nebst zwei Schriften aus seinem Nachlaß und Briefen von Jacobi, Joachimsthal und Weierstraß. Mit einem Bildnis Karl Schellbachs. B. G. Teubner, Leipzig 1905. *M.* 2.80.

M. Nath, Schülerverbindungen und Schülervereine. Erfahrungen, Studien und Gedanken. B. G. Teubner, Leipzig 1906. *M.* 2.60.

K. Nitz, Anwendungen der Theorie der Fehler in der Ebene auf Konstruktionen mit Zirkel und Lineal. Dissertat. Königsberg i. Pr. 1905.

Henri Poincaré, Wissenschaft und Hypothese. Autorisierte deutsche Ausgabe mit erläuternden Anmerkungen von F. und L. Lindemann. Zweite verbesserte Auflage. XVI u. 346 S. 8°. B. G. Teubner, Leipzig 1906. *M.* 4.80.

F. Poske, Unterstufe der Naturlehre (Physik nebst Astronomie und Chemie). Nach A. Höflers Naturlehre für die unteren Klassen der österreichischen Mittelschulen für höhere Lehranstalten des Deutschen Reiches bearbeitet. Mit 305 eingedruckten Abbildungen, einer Sterntafel und einem Anhang von 130 Denkaufgaben. X, 246 S. 8. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1905. *M.* 2.80.

M. Simon, Über die Entwicklung der Elementargeometrie im XIX. Jahrhundert. Bericht erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Mit 28 Figuren im Text. Auch unter dem Titel: Jahresbericht der Deutschen Mathem.-Vereinigung; der Ergänzungsbände I. Band. [VIII u. 278 S] gr. 8. Leipzig 1906, B. G. Teubner. *M.* 8.—, geb. *M.* 9.—.

R. Vater, Neuere Fortschritte auf dem Gebiete der Wärmekraftmaschinen. B. G. Teubner, Leipzig 1906. *M.* 1.—, geb. *M.* 1.25.

Ziehen, Schulpolitik und Pädagogik. Vortrag gehalten auf der 9. Hauptversammlung des Vereins zur Förderung des lateinlosen höheren Schulwesens zu Frankfurt a. M. B. G. Teubner, Leipzig 1906. *M.* —.60.

Poincaré, Henri, Membre de l'Institut, der Wert der Wissenschaft. Autorisierte deutsche Ausgabe von E. Weber. Mit Anmerkungen von H. Weber in Straßburg i. E. [V u. 252 S.] 8. 1906. In Leinwand geb.

Schüssler, Dr. Rudolf, Professor an der Technischen Hochschule zu Graz, orthogonale Axonometrie. Ein Lehrbuch zum Selbststudium. Mit 29 Figurentafeln in besonderem Hefte. [VIII u 170 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. ℳ 7.—

Simon, Dr. Max, Professor an der Universität Straßburg, über die Entwicklung der Elementar-Geometrie im XIX. Jahrhundert. Bericht erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. (A. u. d. T.: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Ergänzungsband I.) Mit 28 Figuren im Text. [VIII u. 278 S.] gr. 8. 1906. geh. n. ℳ 8.—, in Leinwand geb. n. ℳ 9.—

——— Methodik der elementaren Arithmetik in Verbindung mit algebraischer Analysis. Mit 9 Textfiguren. [VI u. 108 S.] gr. 8. 1906. geb. n. ℳ 3.20.

Starke, Dr. H., Privatdozent in Berlin, experimentelle Elektrizitätslehre. Mit besonderer Berücksichtigung der neueren Anschauungen und Ergebnisse dargestellt. Mit 275 in den Text gedr. Abb. [XIV u. 422 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. geb. n. ℳ 6.—

Staude, Dr. Otto, Professor an der Universität Rostock, analytische Geometrie des Punktes, der geraden Linie und der Ebene. Ein Handbuch zu den Vorlesungen und Übungen über analytische Geometrie. Mit 387 Figuren im Text. [VIII u. 447 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. ℳ 14.—

Stolz, Dr. Otto, weil. Professor an der Universität Innsbruck, und **Dr. J. Anton Gmeiner**, Professor an der deutschen Universität Prag, Einleitung in die Funktionentheorie. Zweite, umgearbeitete und vermehrte Auflage der von den Verfassern in der „Theoretischen Arithmetik" nicht berücksichtigten Abschnitte der „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik" von O. Stolz. Mit 21 Figuren im Text. [X u. 598 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. ℳ 15.—

Auch in 2 Abteilungen:

I. Abteilung. Mit 10 Figuren im Text. [VI u. 242 S.] 1904. In Leinwand geb. n. ℳ 6.—

II. — Mit 11 Figuren im Text. [VIII u. S. 243—612.] 1905. In Leinw. geb. n. ℳ 9.—

Thomae, Geheimer Hofrat J., Professor an der Universität Jena, Sammlung von Formeln und Sätzen aus dem Gebiete der elliptischen Funktionen nebst Anwendungen. [IV u. 44 S.] 4. 1905. kart. n. ℳ 2.80.

——— Grundriß einer analytischen Geometrie der Ebene. Mit 6 Figuren im Text. [X u. 183 S.] gr. 8. 1906. In Leinwand geb. n. ℳ 3.60

Thomson, J. J., D. Sc. Lld. Ph. D. Er. S. Fellow etc., Elektrizitäts-Durchgang in Gasen. Deutsche autor. Ausgabe unter Mitwirkung des Autors besorgt und ergänzt von Dr. E. Marx, Privatdozent an der Universität Leipzig. Mit 187 Figuren im Text. [VII u. 587 S.] gr. 8. 1906. geh. n. ℳ 18.—, in Leinw. geb. n. ℳ 19.—

Vivanti, G., Professor an der Universität Messina, Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen. Umarbeitung unter Mitwirkung des Verfassers deutsch hrsg. von Dr. A. Gutzmer, Professor an der Universität Halle a. S. [VI u. 512 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. ℳ 12.—

Weber, Dr. H., Professor in Straßburg, und **Dr. J. Wellstein**, Professor in Straßburg, Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende. In 3 Bänden. gr. 8. I. Band. Elementare Algebra und Analysis. 2. Auflage. Mit 38 Textfiguren. [XVIII u. 539 S.] 1906. In Leinw. geb. n. ℳ 9.60. II. Band. Elemente der Geometrie. Bearbeitet von H. Weber, J. Wellstein und W. Jacobsthal. Mit 280 Textfiguren. [XII u. 604 S.] 1905. In Leinw. geb. n. ℳ 12.— (Bd. III. Anwendungen der Elementar-Mathematik. U. d. Pr.)

JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG

IN MONATSHEFTEN HERAUSGEGEBEN VON

A. GUTZMER

IN HALLE A. S.

15. BAND. 5. HEFT. MAI.

AUSGEGEBEN AM 28. MAI 1906.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1906.

JAHRESBERICHT DER
DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG.

IN MONATSHEFTEN HERAUSGEGEBEN VON A. GUTZMER IN HALLE A. S.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

☛ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Bücher usw.) sind an

Prof. Dr. A. Gutzmer in Halle a. S., Martinsberg 8,

zu richten.

☛ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich: von größeren Aufsätzen 25 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen und Mitteilungen 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☛ Jeder Band des Jahresberichts in Monatsheften umfaßt vom 12. Bande ab 38 Bogen (= 608 Druckseiten) und kostet für Mitglieder der Vereinigung, Porto inbegriffen, Mark 14.70, für Nichtmitglieder Mark 18.—. Mitglieder haben ihr Abonnement bei der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig, Poststraße 3, aufzugeben, Nichtmitglieder dagegen bei einer Sortimentsbuchhandlung.

☛ Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung zählt z. Zt. über 660 Mitglieder. Der jährliche Mitgliedsbeitrag beträgt 2 Mark, kann aber auch durch einmalige Zahlung von 30 Mark abgelöst werden. Beitrittserklärungen nimmt der Schriftführer der Vereinigung, Prof. Dr. A. Krazer, Karlsruhe in Baden, Westendstraße 57, oder die oben genannte Verlagsbuchhandlung entgegen. Die Ablösungssumme bezw. der Jahresbeitrag ist an die Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig einzusenden.

INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.

On reading P. Harzer's paper on the mathematics in Japan.

By YOSHIO MIKAMI in Tokyo.

One who has read P. Harzer's paper[1]) would never have failed to be struck with a queer idea on the different ways of reading of some Japanese proper names. In writing this article I have therefore to begin with a statement about the point. As Harzer already explains, it owes the origin to the employment of Chinese ideograms, which bear their Japanised old Chinese way as well as one or more of Japanese reading ways. Seki's[2]) personal name, for instance, was Kōwa, according to the Chinese way of reading. In actuality Seki would have read his name by a Japanese way, not in a Chinese way, as was the usage with all gentlemen of those times. But there are many personal names, which were and are read in their Chinese ways, because their proper Japanese readings were not known. But it is highly probable that Seki's personal name was to read Takakazu, for Arai Hakuseki, a learned and renowned doctor and a contemporary of Seki's, records in his manuscript work, the Shinsho, Book VIII., that his name was to be so read. It is also at the same time an undeniable fact that Seki's personal name was used in old times of being read in the Chinese way as Kōwa instead of his proper way of reading. For there remain some works in which his name was written with different ideograms, which lead to the Chinese way of reading as Kōwa, a mistake but at the same time an indication that this way of reading was being attended to; there are also such works where the Japanese helpwords[3]) are added to indicate the reading as Kōwa. Seki's case is only an instance of ambiguity of reading; such an am-

1) P. Harzer, die exakten Wissenschaften im alten Japan, Jahresbericht der D. M. V., Bd. XIV., Heft 6.

2) Seki Kōwa is the most reputed mathematician in old Japan. Of Seki's performances P. Harzer has made a description in his paper.

3) In Japanese "kana", as distinguished from Chinese ideograms.

biguity reigns with almost all personal names of scholars in old Japan.

With family names the ambiguity of reading largely diminishes; but there are some few instances as Ajima and Yasushima. Yasujima or Yasushima will be the common way of reading and Ajima a special way; and so it seems that D. Kikuchi will rest on a steady stand-point in his reading the name as Ajima. If however there is no such stand-point, the name will be proper enough to be read as Yasujima.[1]) It is however a fact that there is a person who is known as Ajima with the same ideograms as the name of the mathematician before us.

Besides, in old Japan there was an usage of sometimes changing one's name; not only the personal names were changed but such a changing took place with family names too. To give a mathematician's case, Sawaguchi Kazujuki changed both his personal as well as family names into Gotō Kakubei. Although some writers take these two names to appertain to different persons, T. Endō ascribes them to belong to the same person. Such instances were not rare with mathematicians of note.

---

1) As to the difficulty of reading of some of Japanese names I shall give a few instances that occurred with my own acquaintances. One of my class-mates once told me that his personal name is to be read Yoshi, of which reading no one knew. They used to read his name in the Chinese way. My friend was content with that way of reading, and afterwards he was ashamed to be called with his real reading. Another person's personal name is Tei or Kanae, of which I once inquired him of the true reading. "Whichever you are pleased of you may take that for true", the striking answer was; "and so they call me in both ways". Another class-mate of mine, K. Tōkairin, was known to all of us as Tōkairin, and he himself spelled his name in that way. No one doubted of that. Strange to us all, a teacher in the Chinese classic would always call him in another way as Shōji. Some of his friends often asked him of the reason why he was called by such a different name. He never made his reply, he only smiled. He continued to spell his name as well as we called him as before. But the mystery came at last to an end, when I learned that the ideograms that represent his name are really to be read as Shōji but not in the way we have read. In spite of all this he will be always Tōkairin to me, when I happen to see him again. A gentleman, of whom I am slightly acquainted, was known as Kanno at the place where I had known him; at another place, I am told, he has been known as Sugano, the difference coming from different ways of reading. There are also some names that are differently read though bearing the same ideograms; some families, for instance, are called Kikkawa, while for others the same Chinese letters stand for Yoshikawa. Although such differences would seem to cause a troublesome ambiguity, it is not however so keenly felt in Japan, because the Chinese letters in which the names are represented are taken for the standard.

Sawaguchi wrote in 1670 the Kokon Sampōki, in which he unreservedly employed the sangi[1]) way of solving numerical equations. Such a way was handed down from China through a work, Suang Hsiao Chi Mêng, or Sangaku Keimō as known in Japan, compiled by Chu Shih Chieh, and it was becoming spread from before his time in Japan. But Sawaguchi may be safely said to have most largely contributed to the popularising of the method. Sawaguchi's work is worth of notice, because it serves to reveal the outlines of mathematics that stood before or at the time when Seki was preparing for his inventions. At the time of Sawaguchi's publication Seki was at his twenty-eighth year and it is not probable that he was already at the height of his fame. Sawaguchi is said to have afterwards gone to Seki for instruction. Although the date of his being taken among Seki's pupils is not exactly known, it must be deemed to have occurred in some later years; for Seki himself solves the questions proposed in the end of Sawaguchi's work and publishes them in 1674 in a work entitled the Hatsubi Sampō. In my opinion Sawaguchi was so struck with the newness in the way of Seki's solutions that he hastened without hesitation to join him as a disciple.

Seki appears to have been of a rather reserved turn of nature and so he loathed the printing of his works. The above said work was therefore the only one that was brought out in his life-time. The Kwatsuyō Sampō, another work that bears his name, was compiled by one Ōtaka[2]) in the next year of Seki's death and was printed in 1712, three years after the compilation. Seki was little inclined to reveal all his inventions to any of his pupils; he kept a strict secrecy about his own methods. When an advanced pupil was to be initiated into some of his methods, he could not hear from him, unless he swore with his own blood. Seki's whole doctrines were only handed down to his adopted heir and to Araki Son-yei (or Murahide), one of his numerous pupils. It was from the hand of Seki's son that Takebe

1) The sangis are small wooden pieces, and the term will be literally rendered in "calculating pieces". The sangis solely served for abacus calculations for a long time both in China and in Japan. Even the introduction of the soroban could not expulse the use of sangis. The sangis have gone out of use quite in a recent time.

2) In T. Endō's History of Japanese Mathematics, 1896, the name Ōtaka is erroneously printed as Ōta, to which same mistake Harzer falls. The same may be said of Muramatsu, whom Harzer represents as Matsumura according to Endō's history.

Kenkō (or Katahiro) came in possession of Seki's secret writings which were not given him from his own hands.[1])

Japanese mathematics assumed an entirely different aspect in Seki's hands, and the progress at that time appeared too rapid, which always remained questionable in my brain. At a time I thought whether he had not known some of Dutch and therewith a knowledge of the Occidental mathematics. No information could be procured, however, to affirm my doubt to that effect. As to the sources from which Seki learned mathematics, there remains a valuable record for us. As to the story that Seki had first studied under Takahara, who in his turn was a pupil of Mōri Shigeyoshi himself, there remains a doubtful point. Seki might have been a self-formed mathematician, in a high degree of certainty. A voluminous manuscript work, Okinagusa, contains with others a story about Seki's life. According to this work, it was a work entitled the Sangaku Gomō, probably a Chinese work, which is represented in another place as the Suang Hsiao Chi Mêng, that led Seki to his deep study of mathematics. In his mature

1) Seki had no son and adopted Shinhichirō, sometimes represented as Shinhichi, a nephew, who served to the Shogunate in the Province of Kai, where he was dismissed through some fault and his family's hereditary service exterminated. This happened on the 7th. of August in 1735. Seki's son, being thus deprived of livelihood, thence lived under the care of Takebe Kentō's, whom, according to T. Endō, he gave all secret writings of his father for his inspection. Takebe's writing of the Yenri Kohai Tetsujutsu appears to have issued from that event. If this is so, the work cannot date in an earlier period than 1735. Takebe's another work, Fukyū Tetsu-jutsu was written about 1722; the value of π calculated correct to 41 digits stands in this work. The way of expanding a root of a quadratic equation established in this work differs, according to T. Endō, from that used by Seki himself. Fukyū was Takebe's nom-de-plume. About Seki's own writing about the yenri or circular theory, I have never met with a mention. Only the Kigenkai, that consists of two books, bears Seki's name, though the style of writing is somewhat altered. The contents of this book are in some parts the originals to the fourth book of the Kwatsuyō Sampō; if not so, explanations of them. The work contains no such analytical treatment such as seen in the Fukyū Tetsu-jutsu or in the Yenri Kohai Tetsu-jutsu. It might be perhaps the results to which Seki had arrived before the establishment of his later calculations. The materials that served to or caused the writing of the Hō-yen Sankyō were handed to Matsunaga through Araki from Seki himself. There remains no probability that Matsunaga could have obtained a glance over the two works of Takebe's because they were cared with utmost secrecy, though they both belonged to Seki's school or sect. The identity of the results for the square of a circular arc in the two works will be sure enough to take Seki for the inventor of the formula or at least of the principle by which the formula was arrived at.

years he once learned that there were some unknown books in a certain Buddhist church at Nara, an ancient town near Kyōto; these books were contained among Buddhist bibles brought from China at some unknown date; they were neither religious books nor treatises on morals or medicine, which no one was said to have understood. Seki conjectured them to be mathematical works, so he asked for a leave and went to Nara, where he borrowed the said books and copied them in haste, although he was little able to understand their contents. Returned to Yedo his leisure hours were all spent in their digestion and in the course of three years of hard study his knowledge of mathematics became considerably bettered. Our narration goes no further than this; but the works Seki had studied would have been Chinese translations of Sanscrit works — probably bibles — of which it remains an interesting question how far the treatments extended their ranges. Be all this covered under a cloud, but it is far from being questionable that Seki's situation cannot reach to such a height as our predecessors have considered it.

Seki was no supernatural being as the mathematicians of old Japan adored him. The spirit of hero-worship had made him shine over all other scholars. Put aside the description we have just tried; and how far advanced was the state of mathematics in the very time when our great arithmetician was preparing for his inventions? On the first point the mere published works that appeared before his time could little avail for the purpose, on the whole, of illustration of the comparison with Seki's extensive system that underwent the fortune of being kept in secrecy. The habit of secret-keeping was by no means opened by Seki himself; his predecessors equally behaved themselves as he. For Sawaguchi, whom we have already spoken of, writes in his work that he had little inclination to give solutions to some of the problems, and so any one, who desired of being initiated to them, could be taken as his own pupil. These problems are those that relate to arcs and chords of a circle or related ones. Mōri Shigeyoshi[1]) himself left a secret work intended for personal teaching, according to an anonymous record, the author of which having seen it. Yoshida's Jinkōki consisted of eighteen books, of which the first three only were printed. Takahara, one of Mōri's direct pupils and

1) As to Mōri's travel to China there remains a deep-grounded point of doubt. According to an authority he is said to have gone to Corea, whence he passed to China with a letter of introduction from the Corean court. Older records do not mention of his travel. It is also doubtful why Toyotomi Hideyoshi, the ruler, had sent only a single person for instruction.

the said teacher to Seki, leaves no published work. Iwamura[1]), who wrote the Ketsugishō in 1660, has also left a written work upon the calculation of a circle, of which an anonymous author records that Watanabe Kazu possessed a copy and that he saw and copied it. The author thereby adds that Iwamura's formulæ are no means the general ones, but they are of some value. The said Watanabe, though of little note, was a mathematician among the pupils of Aida, a contemporary of Ajima or Yasujima.

These documents appear to show that the mathematics before Seki's time were some way advanced than that given by mere printed works. How far Seki got in his theory of the circular principle, it is little knowable at present; if however we are to take the theory solely as given in the Kigenkai, then Seki's method was a mere step in advance to that employed by Muramatsu[2]) in his Sanso of 1663. Now I have come so far in my description, that would make Seki out of his place. Does then Seki not merit the honour ever awarded to him and almost grown to adoration? Oh no! I never intend for such a purpose. Why, then, and how do Newton and Leibniz deserve the sole honour as to their invention of the infinitesimal calculus, whereas the method had really originated from the ancient method of exhaustion of the Greeks and come down gradually through the hands of Kepler, Cavalieri, Fermat, Roverval, Wallis, Barrow and numerous others? Besides did Newton and Leibniz leave their method perfectly furnished? Did it not require the hands of d'Alembert, Lagrange and still later mathematicians to afford their method in the form as we now possess? Does it not nevertheless remain for Newton and Leibniz's sole honour to have invented the almighty system of the calculus? When so it is, may Seki always and forever stand in his high situation as he had stood in spite of all that I have said.

Seki's success wholly lies in the introduction of the analytical method, which in turn owes largely or entirely to his groundation of algebra. The way of using letters for known quantities as well as for the unknown begins in Japan with no other than he, for written algebra never existed before him. He valued therefore his algebraical ways, so much so that he designated that science by the proud term

1) Some take the name for Isomura, and T. Endō changes the ideograms into those that definitively designate as Isomura.

2) Muramatsu was neither himself one of the famous fourty-seven loyal rōnin, as Harzer states in his paper, nor his two sons, as given in Endōs History of Japanese Mathematics; it was Muramatsu's adopted heir and his son who revenged with others upon their master's unlucky death.

of kigen seihō, by which he meant to be enabled to clear all the buried origin of things and lead them to the power of analysis. It is not surprising that he kept it secret as well as he did with the yenri principle. When we reflect on the difficulty with which the use of letters has been introduced in the history of Occidental mathematics, I cannot help of being struck with an intent feeling of woe and veneration for our great Seki's case.

Seki has already founded the science of, or rather the calculations with, algebra. It is not then surprising for a person of his genius that he could have established his way of solving the quadratic equation in an infinite series[1]). Be the principle, to which his way of expansion is liable, explained or unexplained, the fundamental ideas that led to his invention is perfectly traceable. For the Chinese way of solving numerical equations on a sangi board must have caught his piercing attention, and he had only to apply it without or with slight alterations to the case of a quadratic equation with literal coefficients. A glimpse on the way in which such an expansion is carried compared with that for the sangi way would never fail to discern the intimate relation that exists between the processes. I am not in the place to assure as to Seki's extention of the same way to the case of higher equations, a way which appeared in later years in a current application among mathematicians. The principle as well as the process for these higher equations also hardly differed from the original way for the quadratic equation.

We also see another way of solving numerical equations, that arose in the hands of Kawai Kyūtoku and his teacher Sakabe Kōhan. This way resulted in an expansion in an infinite expression resembling the continued fraction, and it served to the evaluation of all real roots, positive and negative.

Seki's calculation of the circle, as usually ascribed to him, rests on the expansion of the quadratic equations and the application of the imperfect induction.[2]) That such a way was actually had by Seki himself, it would be very probable, if he does not leave his own writing concerning to it. Takebe's and Matsunaga's works on the subject, perhaps, were taken from Seki's original with alterations and perfections by them. Could it be said here that these works were written by their respective authors independent of their great leader Seki? The fact that Seki had revealed all his inventions to Araki is

1) About this way see P. Harzer's paper.

2) See Harzer's paper for the process.

not deniable, and Araki did the same to Matsunaga, the author of the Hōyen Sankyō. Takebe does not seem to have been entrusted with all his master's writings, he obtained his most secret works from Seki's adopted son, who little valued them, because himself no mathematician, and who was too scantily meaned to answer to the kindness Takebe did to him. If there is no mention made in these works as to the true authorships, it is no surprise; such were sometimes the usage in Japan. The identity of results in the two works seem to justify our assumption of ascribing the principle used, in its rudiment at least, to Seki. There is no probability of the two scholars having seen each other's secret writings.

In Japan mathematics were cultivated as a mere art, and they never attained a situation as a science. There arose therefore no such science as geometry that throws itself wholly on a demonstrative system. Japanese scholars contented themselves with their rude ways of gaining the magnitude-relations of the figures they considered. It will be also not a little surprising to see that in old Japan there reigned no idea on angles. Geometrical considerations date first in later years, when the Chinese translation of Euclid was brought to Japan; even then they never freed themselves from some algebraical intermeddlings. The Japanese put little values on demonstrations, which they never came to take as a part of real knowledge. This dispension was especially great with older scholars. They unreservedly took resources in the imperfect induction, which they seem to have taken for absolute truth. So it comes that the Japanese mathematics made an appearance such as is handed down to us.

As is well known the Chinese mathematics had influenced our science from the very outset, which was continued through the entire period of its flourishment. In later years Chinese translations of Occidental books were also brought. Still later Japanese scholars became themselves enabled to read the Dutch language; and it seems they were affected by it. But they never lost their own way of progress; they never were brought to respect the Occidental mode of mathematics, of which act of our fathers I must ask for an acknowledgement and sympathy from the side of you the Occidental mathematicians.

As I have said Japanese mathematicians most valued the results of calculations, they little cared for the demonstrative character of the science. Why, then, was there anything in the Western books, which was brought before the eyes of our fathers, that could be valued by them? Of course all these works must have been restricted

to elementary mathematics. The Japanese had already an analytical method of their own, though of a rude kind. Every problem that lay before them they could solve it by their own instrument, while the knowledge got from foreign sources little satisfied their purposes. They therefore naturally came to disdain the foreign science. When they came at last to learn the calculus from Dutch teachers, they were not surprised in the newness of the methods; they only thought them as their equal. I have met, in more than one place, among the writings of our fathers, with these words: In astronomy and the art of calenders Japan is inferior to China and Occident; as to mathematics we are ahead of them; we have a need of learning astronomy and calendrical theory from foreign sources, we have no such need for mathematics. As we now see, they have done as they said. Japanese mathematicians were not however to refuse the introduction of logarithmetic tables and plane and spherical trigonometry by the way of Chinese works such as the Li Suan Ch'üan Shu and the So Li Ching Yün and others.

Japanese scholars studied various curves, but they never came to consider the parabola and the hyperbola.

In concluding this article I have to say a word or two about the distinction between the meanings of the words sūgaku and wasan, which was left by P. Harzer as unintelligible. The term sūgaku signifies mathematics and wasan means Japanese mathematics. The Restoration of the Emperial Rule was followed by a flood of Western civilization in the country. There arose scholars who never learned the old Japanese mode of mathematics, being only instructed in the foreign style. These persons grew in the idea that their knowledge must stand in a higher situation than the old fashioned peculiar ways, because and only because theirs belong to a more civilised world. Such a thought became prevalent and I cannot help but express my own feeling I have experienced when I first learned mathematics and when I knew nothing of our own father's ways. A hatred must therefore arise between both parties. A distinction beween their ways became needful, whereby the one was designated as wasan as distinguished from yōsan or Occidental mathematics. Their rivalship continued, when the wasan mathematicians were more and more deprived of their possessions. The yōsan came out victorious and it soon became prevailing all over the Empire. And now the general term signifying mathematics, or sūgaku, got to mean the yōsan only, because this mode is the whole of the science now studied. This is the reason why the distinction between sūgaku and wasan had arisen.

The wasan mathematics is at present entirely levelled down, no one goes to learn it. I don't mean thereby to include the fact that the soroban-arithmetic is still being attended in some quarters and is still being instructed in common schools.

Tokyo, Sept. 16th, 1905.

Sind die Elemente der Infinitesimalrechnung an den Mittelschulen einzuführen oder nicht?[1])

Von F. Hočevar in Graz.

Als zweiter Redner[2]) über dasselbe Thema halte ich es für angezeigt, mich möglichst kurz zu fassen. Daher will ich nur in allgemeinen Umrissen die Gesichtspunkte erörtern, welche mich bei der Beantwortung der Frage leiten, ob die Elemente der Infinitesimalrechnung an den Mittelschulen einzuführen sind oder nicht, indem ich zunächst die Gründe kurz anführe, welche *für* die Einführung sprechen, und hierauf etwas ausführlicher die Gründe, welche *gegen* die Einführung vorgebracht werden. Dabei werde ich vor allem die Verhältnisse an österreichischen Mittelschulen berücksichtigen, weil ich nur diese aus eigener Erfahrung kenne.

Für die Einführung spricht in erster Linie *der hohe Bildungswert* des neuen Lehrstoffes, welcher in dieser Hinsicht manchen Teil des gegenwärtig vorgeschriebenen Stoffes weit übertrifft. Denn die Elemente der Infinitesimalrechnung gewähren dem Schüler einen Einblick in jene Rechnungsmethoden, welche für die Beschreibung und Berechnung der meßbaren Naturvorgänge, für die Lösung wichtiger Aufgaben der Technik und des Verkehrs unerläßlich sind; sie setzen ihn aber auch in den Stand, zahlreiche Aufgaben aus den genannten Gebieten selbst zu lösen.

Ein zweiter Grund ist der, daß die Elemente der Infinitesimalrechnung den Schüler *auf* gewisse *Fachstudien* an der Hochschule *vorbereiten*. Für die Lehramtskandidaten der Mathematik und die Hörer der Technischen Hochschule ist eine solche Vorbereitung im allgemeinen nicht notwendig, ja sie wäre manchem akademischen Lehrer nicht erwünscht. Aber es gibt eine Reihe von Fächern, bei deren Studium heutzutage einige Vorkenntnisse aus der Differential- und Integralrechnung vorausgesetzt werden, wie z. B. die Nationalökonomie, die Statistik, die Phy-

1) Vortrag, gehalten in Meran am 25. September 1905.

2) Den ersten Vortrag hielt E. Czuber (s. diesen Jahresbericht S. 116).

siologie, die Chemie usf., und es zeigt die Erfahrung, daß sich jene Vorkenntnisse während des Hochschulstudiums nicht leicht nachholen lassen.

Als dritter Grund ist anzuführen, daß sich etliche *mathematische* und *physikalische Aufgaben*, welche wegen ihrer grundlegenden Bedeutung in den Lehrstoff der *Mittelschule* aufgenommen werden mußten, nur mit *Hilfe* infinitesimaler Betrachtungen korrekt behandeln lassen. Das versteckte Differenzieren und Integrieren, mit welchem man sich in solchen Fällen zu helfen sucht, entspricht nicht immer den Forderungen der Logik und Didaktik.

Gegen diese Argumente wird meines Wissens kein Einwand erhoben. Die Gegner der Reform erklären vielmehr ihren Widerstand mit dem Hinweis auf die Hindernisse, welche der Einführung der Infinitesimalrechnung entgegenstehen.

Vor allem wird eingewendet, daß der neue Stoff *für die Schüler zu schwierig* sei. Darauf ist zu erwidern, daß man eben diesen Stoff derart auszuwählen und zu begrenzen hat, daß er bei anschaulicher Darstellung und beständiger Einübung an naheliegenden Aufgaben auch von Schülern mittlerer Begabung erfaßt werden kann. Daß dies auch möglich ist, erkennt man aus zahlreichen, in der letzten Zeit erschienenen Aufsätzen und Lehrbüchern, so z. B. von Borel, Bourlet, Tannery, Fisher usw.

Ein anderer Einwand lautet, daß die geplante Änderung eine erhebliche *Mehrbelastung der Schüler* zur Folge hätte und überhaupt *wegen Mangels an Zeit nicht durchführbar sei.* Die Antwort hierauf fällt für die einzelnen Schulen je nach der Beschaffenheit ihres mathematischen Lehrplanes verschieden aus. So z. B. genügt es an den preußischen höheren Lehranstalten, denen eine reichlich bemessene Anzahl von Mathematikstunden zur Verfügung steht, gewisse isolierte Teile des Lehrstoffes wegzulassen und allzuweit ausgedehnte Übungen einzuschränken, und man wird ohne jede Mehrbelastung der Schüler eine für den neuen Lehrstoff hinreichende Zeit gewinnen.

Anders verhält es sich an den österreichischen Mittelschulen, wo die Anzahl der Mathematikstunden so gering ist, daß sie auch jetzt schon zur Bewältigung des vorgeschriebenen Lehrstoffes nicht ausreicht. Diese in den beteiligten Kreisen nur allzusehr bekannte Tatsache wird auch für den Fernerstehenden durch einen Vergleich der mathematischen Lehrpläne an dem österreichischen und dem preußischen Gymnasium bestätigt. An dem ersteren beträgt die wöchentliche Anzahl der Mathematikstunden 24, an dem letzteren hingegen 34, und doch ist der Umfang des vorgeschriebenen Lehrstoffes an beiden nahezu gleich. Die

Oberrealschulen lassen sich nicht in derselben Weise vergleichen, weil ihre mathematischen Lehrpläne wesentlich verschieden sind. Es genügt jedoch die Bemerkung, daß die gesamte Studiendauer an der österreichischen Realschule nur 7 Jahre beträgt, an der preußischen hingegen 9 und an der württembergischen sogar 10. Durch diese Gegenüberstellung wird die Forderung begreiflich, die österreichische Realschule um einen Jahrgang zu erweitern, welche Forderung von den Vertretern nicht nur der Mathematik, sondern auch der meisten übrigen Lehrfächer wiederholt erhoben wurde.

Mit Rücksicht auf diese Tatsachen kann man den von Herrn Klein aufgestellten Grundsatz, für den mathematischen Unterricht seien (zur Durchführung der besprochenen Reform) keine neuen Lehrstunden zu beanspruchen, auf die österreichischen Mittelschulen nicht gut anwenden, sondern müßte eine entsprechende Vermehrung der Mathematikstunden eintreten lassen. Dem stehen begreiflicherweise große Schwierigkeiten im Wege und, da überhaupt sprunghafte Änderungen im Lehrplane möglichst zu vermeiden sind, so möchte ich für Gymnasien nur ein Plus von 2 Stunden wöchentlich (je eine in der 6. und der 8. Klasse) und für Realschulen ein Plus von 4 Stunden wöchentlich in einem neu einzuführenden achten Jahrgange beantragen.

Mag nun eine Vermehrung der Mathematikstunden an den österreichischen Mittelschulen durchdringen oder nicht, in jedem Falle muß man den vorgeschriebenen Lehrstoff reduzieren, um eine Mehrbelastung der Schüler zu vermeiden und doch einiges aus den Elementen der Infinitesimalrechnung einführen zu können, in dem einen Falle mehr, in dem andern weniger.

Da man in einem Lehrstoffe, der seit Dezennien immer wieder Kürzungen erfahren hat, nicht leicht noch weitere vornehmen kann, ohne das allgemeine Lehrziel des mathematischen Unterrichtes zu schädigen, so erfordert diese Frage ein reifliches Studium. Ich erlaube mir in dieser Hinsicht einige Anregungen zu geben. Man könnte z. B. weglassen: die *Lehre von den diophantischen Gleichungen*, da sie mit den übrigen Teilen der Schulmathematik in keinem Zusammenhange steht; ferner am Gymnasium die *Kombinationslehre* und den *binomischen Lehrsatz* (für positive ganzzahlige Exponenten), da die Wahrscheinlichkeitslehre ohnedies schon weggefallen ist und der binomische Lehrsatz an der Mittelschule keine Anwendung findet.

An der Realschule könnte *die sphärische Trigonometrie* bedeutend gekürzt werden, weil für alle dort vorkommenden Anwendungen die Auflösung des rechtwinkligen Dreieckes und der Kosinussatz genügen; alles Übrige wäre dem Hochschulunterricht zu überlassen.

Was den Übungsstoff anbelangt, so könnte viel Zeit gewonnen werden durch Benützung von *vierstelligen Logarithmentafeln*, welche für die Zwecke der Mittelschule vollständig ausreichen, durch *Vermeidung schwieriger Textaufgaben* und solcher Gleichungen, deren Auflösung nur durch *außergewöhnliche Kunstgriffe* möglich ist, desgleichen von *komplizierten Konstruktions- und trigonometrischen Aufgaben.* Ohne die Bedeutung dieser Übungen für das selbständige Denken zu verkennen, glaube ich doch, daß nach dieser Richtung öfter zu hohe Anforderungen gestellt werden, wovon man sich bei der Durchsicht der schriftlichen Maturitätsaufgaben überzeugen kann.

Hingegen möchte ich mich gegen die hie und da geäußerte Absicht, die wissenschaftliche Begründung der arithmetischen Operationen im Unterrichte zu übergehen, ganz entschieden aussprechen. Man würde dadurch in den Grundlagen Unklarheiten und Lücken entstehen lassen, welche auch das Folgende ungünstig beeinflussen müßten. Das lehrreiche Kapital der systematischen Entwicklung des Zahlbegriffs, dessen Wiederholung in der Prima die preußischen Lehrpläne ausdrücklich vorschreiben, würde den österreichischen Schülern unbekannt bleiben. Man wendet mit Unrecht ein, daß die Schüler für den eben erwähnten Stoff in jenem Zeitpunkte, in dem er nach den Lehrplänen vorzunehmen ist, noch nicht die geistige Reife besitzen. Denn wenn man die Elemente der Infinitesimalrechnung dem Standpunkte der Mittelschule anpassen kann, so muß dies um so leichter bezüglich der Elemente der Arithmetik gelingen.

Zum Schlusse fasse ich die vorausgehenden, zum Teile nur angedeuteten Ausführungen in folgenden Sätzen zusammen:

Die Elemente der Infinitesimalrechnung sind an sämtlichen Mittelschulen oder höheren Lehranstalten einzuführen. Bei der Bestimmung des Umfanges, in welchem dies zu geschehen hat, berücksichtige man: 1. das Auffassungsvermögen der Schüler, 2. die Zeit, welche durch Kürzungen des jetzt vorgeschriebenen Lehrstoffes und Einschränkung allzuweit ausgreifender Übungen gewonnen wird, wobei in Österreich zugleich eine mäßige Vermehrung der Mathematikstunden und speziell für die Realschule die Erweiterung um einen Jahrgang anzustreben wäre, 3. jene mathematischen und physikalischen Aufgaben an der Mittelschule, welche die Anwendung der Infinitesimalrechnung erfordern. Den neuen Lehrstoff suche man anschaulich darzustellen und an zahlreichen Beispielen zu erläutern, ohne jedoch die Gesetze der Logik außer acht zu lassen. Denn die Mathematik soll dem Schüler in allen ihren Teilen als das Muster einer exakten Wissenschaft erscheinen.

Über Logik und Mengenlehre.

Von A. Korselt in Plauen i. V.

Die Bemerkungen der Herren Weber und Vahlen in dem vorhergehenden Hefte veranlassen mich zu folgenden Gegenbemerkungen.

Ein Leser könnte zunächst fragen: „Was haben die Ausführungen über Schaffen, göttliches Geschlecht, Idealbild usw. mit den Sätzen der Mengenlehre zu tun? Ich kann keine dieser Vorstellungen in den Sätzen dieser Lehre selbst entdecken.“ Darauf wäre zu antworten: Sie dienen dazu, die Stelle der Mengenlehre innerhalb der Logik und Mathematik festzustellen und der Leser über einige schwierigere Begriffe und die Notwendigkeit ihrer Einführung aufzuklären. Zu solchen Ansichten keine Stellung nehmen, angeblich weil sie zu nichts führen, heißt die Mathematik von der Logik, also von den Gesamtheit der Wissenschaften loslösen und sie unfruchtbar machen.

In der Erörterung über die rationalen Zahlen scheinen mir sowohl Herr Weber als Herr Dedekind Recht zu haben. Genau genommen schafft unser Denken nichts, was vorher nicht dagewesen, sondern findet, erkennt, entdeckt bisher unbemerkte Vorstellungen in seinen Erlebnissen, freilich nur, weil es etwas finden will. Die Auffindung eines mathematischen Beweises ist ebensogut eine Entdeckung oder Erfindung wie die Erfindung des Kompasses oder die Entdeckung Amerikas.

Soll die irrationale Zahl als Schnitt von rationalen Zahlen verstanden werden, so ist das allerdings, als Vorstellung des Paares von Inbegriffen rationaler Zahlen, ein anderer Begriff als „rationale Zahl“ und soweit schon etwas „Neues“. Aber dazu muß noch die Bemerkung kommen, daß ein Schnitt, der eine rationale Zahl bestimmt, selbst keine rationale Zahl ist und daß die Schnitte für sich einen neuen Inbegriff von Gegenständen bilden, die zwar in „Zahlbeziehungen“ stehen, aber von den rationalen Zahlen verschieden sind. Die Bildung von bloßen Inbegriffen ist uns zu geläufig, als daß sie uns als etwas Neues vorkäme.

Den lieben Gott braucht man hier nicht heranzuziehen. Auch die geistige Tätigkeit des Hochstaplers oder Bankdiebes ist in dem hier gemeinten Sinne schöpferisch.

Nur die Vorstellungen der formalen Wissenschaften (Logik, Mathematik, Mechanik) heißen passend Begriffe, die realen Wissenschaften

(Psychologie, Physik, Geschichte usw.) benutzen auch Anschauungen und gemischte Vorstellungen. Vollends sind nicht alle Begriffe Gattungsbegriffe, es gibt auch leere und Einzelbegriffe.

Ein Idealbild (eine Vorstellung) kann existieren, ehe ich es mir zum Bewußtsein gebracht habe, nämlich in einem andern Bewußtsein. Ist es aber einmal von mir erkannt, so verschwindet es nicht gänzlich, es läßt Nachwirkungen zurück.

Wie jeder zum Verständnis der Begriffe der Zahl, des Raumes, der Zeit, des Unendlichen usw. gelangt, wird sich nicht allgemein angeben lassen, das hängt von seinen sonstigen Erlebnissen ab. In gesitteten Ländern wird ein Kind wohl einfach die Worte hören und die entsprechenden oder passende Gegenstände gezeigt bekommen.

Werden die Vorstellungen nicht geschaffen, sondern in den Erlebnissen geschaut, an ihnen vorgefunden, so ist es kein Wunder, wenn man umgekehrt gewissen, auch sehr abstrakten Vorstellungen Wahrnehmungen zuordnet, die durch die Vorstellungen in Zusammenhang gebracht werden. So wird die Zukunft vorhergesagt und die Vergangenheit wieder herauf gebracht. Ergeben sich merkliche oder wichtige Abweichungen von dem Erwarteten, so legt man einige der gebrauchten Vorstellungen und Grundsätze beiseite und sucht zweckmäßigere „Hypothesen". Für gewisse Fälle ist nicht bloß eine kleine Kugel, sondern ein Land, die Erde, die Sonne usw. ein Punkt.

Sollen die Worte „ich zweifle, ob wir hier jemals zum befriedigenden Abschluß kommen können" bedeuten, daß sich in den Grundsätzen der Mathematik und Mechanik stets Widersprüche ergeben werden, so würde das Verzweiflung an der Mathematik als Wissenschaft, ja allseitigen Skeptizismus nach sich ziehen. Soll dies aber heißen, daß immer einige Gelehrte in den Grundlagen noch Unklarheiten finden werden, so kann ich dem auch nicht beistimmen. Die Meinung kann sich höchstens auf die gangbaren Logikbücher gründen, deren Wert für die Mathematik allerdings fast gleich Null ist. Wer aber Bolzanos Wissenschaftslehre studiert, wird zur entgegengesetzten Überzeugung kommen.

Nicht die Wahrheit (Tatsache), daß eine Menge Teile haben kann, entnehmen wir der Erfahrung (sondern das liegt im Begriff der Menge), sondern die Wahrheit, daß es Mehrheiten überhaupt gibt.

Sagen, daß in den Mengen A und B Elemente vorkommen, die objektiv identisch sind, heißt soviel wie: Wir betrachten nicht die Gegenstände von A und B selbst, sondern zwei Mengen A' und B' verschiedener Vorstellungen derselben, wobei A' und B' kein Glied gemeinsam haben. Oder auch so: Wir betrachten nicht einen Gegen-

stand x von A, sondern das Paar (x, A) des Gegenstandes und eines gewissen Inbegriffes. Jedenfalls können wir zunächst nur gänzlich getrennte Mengen auf ihre Anzahlen hin vergleichen.

Gehe ich von der beliebigen endlichen Menge A aus und gebe ihr einen Namen oder ein Attribut α, das ich ihre Zahl nenne, so tue ich etwas Überflüssiges und Falsches. Denn die Menge hat schon den Namen A, wozu noch der andere Name α? Dies α soll auch gar nicht der Name der Menge, sondern ein kürzerer Name für die *Vorstellung:* „Menge die mit A 1-1 deutig paarbar ist" sein, ist also ein Gattungsname, kein Eigenname.

Falsch ist es, den *Namen* α eine Zahl zu nennen, Zahl ist vielmehr der Gegenstand der Vorstellung, deren *Zeichen* α ist. α ist *Zeichen* einer Zahlvorstellung, Zahlzeichen. Am besten nennt man wohl „Anzahl von A" den Inbegriff der mit A gleichweiten Mengen. Da ich diesen Begriff verstehe, kenne ich ihn auch, mag ich mir nun von seinem Umfange ein Bild machen können oder nicht. Im Sinne Herrn Webers gesprochen „kenne" ich nicht den Inbegriff der ganzen Zahlen zwischen 0 und 9^{9^9} und werde ihn in meinem Leben nie kennen, obwohl er endlich ist.

Nicht deshalb bilden die endlichen Zahlen keine endliche Menge, weil *mir* keine endliche Menge bekannt ist, die ich nicht noch vermehren könnte, sondern weil dies in dem Begriffe der endlichen Zahl liegt. Wer etwas anderes dabei denkt, z. B. „endliche Zahl" nur eine der Zahlen 0, 1, 2, . . ., 16 nennt, nimmt das Zeichen „endliche Zahl" in einer Bedeutung, für die es nicht bestimmt ist. Er könnte dann mit seinen endlichen Zahlen immer noch die vier Rechnungsarten, nur nach dem Modul 17, ausführen.

In dem elementaren Teile der Mengenlehre bleibt man auch noch, wenn man zunächst den Unterschied zwischen Endlich und Unendlich nicht einführt, sondern etwa, nachdem der Begriff der Ordnung gegeben ist, sagt:

Eine Ordnung a heißt eine Wohlordnung, wenn für jede Teilmenge m der Glieder von a (des Gebietes von a, der durch a geordneten Menge) einer der beiden Sätze:

> Die Menge m besitzt ein Anfangsglied in a;
> die Menge m besitzt ein Endglied in a,

und zwar immer derselbe, zur Wahrheit wird.

Eine Wohlordnung heißt eine Abzählbarkeit, wenn jedes Nichtanfangsglied (bez. jedes Nichtendglied) einen Vornachbar (nachfolgenden Nachbar) hat.

Eine Menge heißt abzählbar, wenn sie Gebiet einer Abzählbarkeit ist.

Eine Menge heißt endlich, wenn sie Gebiet einer Abzählbarkeit ist und in dieser ein Endglied (Anfangsglied) hat.

Eine gegenständliche nicht endliche Menge heißt unendliche Menge.

Eine Menge heißt abzählbar unendlich, wenn sie unendlich und abzählbar ist.

Sagt man: eine linear geordnete Menge heißt stetig, wenn jedes durch Ordnungsbeziehungen (teils von der Form $x \geq a$, teils von der Form $x \leq b$) in bezug auf Dinge $a, b, \ldots$ von M definierbare Ding x ein Ding von m ist,

so ist auch (a, b, c) eine stetige Menge, denn es ist $a < b < c$, und dies gilt nur für b. Freilich wäre auch in der geordneten Menge (a, b', c) das neue Element b' so bestimmt, dann erhebt sich aber der Einwand, daß durch die Dinge $a, b, \ldots$ von M überhaupt kein Ding x „definierbar" ist. Dann gibt es keine stetigen Mengen.

Ratschläge und Unterweisungen für die Studierenden der Mathematik und Naturwissenschaften an der Universität zu Münster i. W.

Von R. v. LILIENTHAL in Münster i. W.

Zu Beginn des Sommersemesters 1906 sind „Ratschläge und Unterweisungen für die Studierenden der Mathematik und Naturwissenschaften an der Universität zu Münster i. W." gedruckt worden, die zum Teil von anderen als den sonst üblichen Gesichtspunkten aus entworfen sind. Die Ratschläge wollen dem Studierenden den Weg zeigen, auf dem die übliche Vorlesungsmethode zu dem beabsichtigten Nutzen führt, und schärfen deshalb die selbständige Ausarbeitung des Gehörten auf Grund eigener, während der Vorlesung gemachter Aufzeichnungen ein. Außerdem ist die Beschäftigung mit allgemein bildenden Fächern angeraten. Genauere Ratschläge über die Ausbildung in den einzelnen Fächern sind den Fachvertretern überlassen. Die „Unterweisungen" wollen dem Studierenden keineswegs angeben, auf welche Weise er ein vorzüglicher Mathematiker, Physiker usw. werden kann. Die Absicht der weitaus größten Anzahl der Studierenden der Mathematik und Naturwissenschaften geht nicht dahin, eine umfassende Fachgelehrsamkeit zu erwerben, sondern möglichst gut die Prüfung für das höhere Lehramt zu

bestehen, damit so das Fortkommen im späteren Leben gewährleistet sei. Damit erwächst die Aufgabe, den in Betracht kommenden Lehrbetrieb auf der Universität so einzurichten, daß wenigstens in *einem* Fache eine tiefer gehende wissenschaftliche Durchbildung und die Fähigkeit, selbständig weiter zu arbeiten, ermöglicht wird, und dies ist bei der Kürze der Studienzeit nicht ohne Entlastung des Studierenden in den übrigen von ihm betriebenen Fächern zu erreichen. Wir nennen *Hauptfach* dasjenige Fach, aus dem der Studierende in der Staatsprüfung die fachwissenschaftliche schriftliche Arbeit entnimmt. Für die übrigen Fächer sind in den „Unterweisungen" die Minimalanforderungen zusammengestellt, die zu erfüllen sind, wenn in einem dieser Fächer die Lehrbefähigung für die erste oder zweite Lehrstufe erlangt werden soll. Für das Hauptfach wird darüber hinaus eine weitergehende Benutzung der von der Universität gebotenen Lern- und Übungsgelegenheiten verlangt. Vertreten sind die Fächer: Reine und angewandte Mathematik, Physik, Chemie, Mineralogie, Botanik, Zoologie, Philosophie. Für die Geographie steht die Aufstellung der Minimalanforderungen noch aus.

Bei der Beurteilung des Ganzen dürfte Wert zu legen sein auf die erzielte Einigung der Vertreter recht verschiedener Fächer zu dem Zweck, dem Studierenden von vornherein Klarheit über das zu Leistende zu verschaffen. Das Ergebnis dieser Einigung ist gewiß noch verbesserungsfähig, aber die Grundlage für eine gesunde Weiterentwicklung ist gelegt, und damit ist die alte Gewohnheit, im Lehrbetrieb getrennt zu marschieren, in der Staatsprüfung vereint zu schlagen, immerhin um ein beträchtliches Stück zurückgedrängt worden.

Münster i. W., im Mai 1906.

Leonard Eulers Wohnhaus in Berlin.

Auszug aus einem Briefe an P. Stäckel in Hannover.

Von G. VALENTIN in Berlin.

. . . Im Jahre 1741 wurde Leonard Euler aus Petersburg nach Berlin berufen, wo er bis 1766 geblieben ist. Man findet in dem „Adres-Calender der Kgl. Haupt- . . . Stadt Berlin" für 1742 und ebenso für 1743 angegeben: *„L. Euler wohnt auf der Neustadt bey der Potsdamschen Brücke in dem Barbonessischen Hause"* und in den Jahrgängen des „Adres-Calenders" für 1744 bis 1766: *„L. Euler wohnt in der Bärenstraße in seinem eigenen Hause"*. Aus der von Schmettauschen

Karte von Berlin vom Jahre 1748 ergab sich, daß in der Neustadt der Teil der jetzigen Friedrichstraße zwischen der Behrenstraße und Unter den Linden damals Potsdamsche Brücke genannt wurde, und ferner, daß auf der Südseite der Behrenstraße zwischen der Friedrichstraße und Kanonierstraße Gärten lagen, an einer Stelle jedoch unterbrochen durch ein bebautes Grundstück, das auf jener Karte als „Eilersches Haus" bezeichnet war. Dies war also Eulers Wohnhaus. Da der von Schmettausche Plan bei allen Kennern als sehr genau gilt, konnte ich den Versuch wagen, durch genaues Ausmessen mit dem Zirkel jenes „Eilersche Haus" mit einem neueren Plane von Berlin zu identifizieren; ich benutzte dazu den Situationsplan von Sineck vom Jahre 1861, auf dem jedes einzelne Grundstück mit allen seinen Gebäuden und den entsprechenden Hausnummern genau eingezeichnet ist, und es ergab sich hieraus, daß das „Eilersche Haus" mit den beiden Häusern Behrenstraße 20/21 vom Jahre 1861 identisch sein müsse. Hiermit glaubte ich mich jedoch nicht begnügen zu dürfen und wendete mich an das Grundbuchamt. Die Einsicht in die Grundbücher wurde mir von dem Amtsgericht bereitwilligst gestattet, führte jedoch zunächst zu keinem Ergebnis, da die jetzigen Grundbücher für die in Frage kommende Gegend erst mit dem Anfang des vorigen Jahrhunderts beginnen. Erst als der Beamte einen alten Band hervorsuchte, in dem sich beglaubigte Auszüge aus dem „Französischen Colonie-Gerichte" über die Grundstücke der Behrenstraße während des 18. Jahrhunderts befanden, kam Licht in die Sache. Hier war unter der Reihe der Eigentümer des Grundstückes Behrenstraße 14/15 auch Leonhard Euler genannt, und aus einer angehängten Vergleichsliste der Grundstücksnummern des 18. Jahrhunderts mit den jetzigen Nummern ergab sich, daß die damalige Nummer 14 identisch mit der jetzigen Nummer 21 ist. *Das jetzige Haus Nr. 21 der Behrenstraße steht also auf der Stelle des von Leonard Euler 1744 bis 1766 bewohnten und ihm gehörigen Grundstückes.*

Am 15. April nächsten Jahres werden wir Eulers zweihundertjährigen Geburtstag feiern können. Es wäre zu wünschen, daß dann an dem Hause eine Gedenktafel angebracht würde, die daran erinnert, daß hier 23 Jahre lang Eulers Wohnsitz gewesen ist. . . .

Mitteilungen und Nachrichten.

Geeignete Mitteilungen wird der Herausgeber stets mit größtem Danke entgegennehmen.

1. Akademien. Gesellschaften. Vereinigungen. Versammlungen.

Veränderungen im Personalbestande der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. März und April 1906.

Neu aufgenommen als Mitglieder:

Dr. phil. G. Berkhan, Kandidat des höheren Schulamts in Hamburg, Arndtstraße 21.

Dr. phil. K. Giebel in Schleusingen, Klosterstraße 21.

Dr. phil. A. W. Velten, Rentner in Kreuznach.

Friedrich-Eugens Realschule in Stuttgart.

Mathematisches Seminar der Universität in Kiel.

Gestorben:

Am 3. April starb in München der langjährige ordentliche Professor der Mathematik an der dortigen Universität Geheimrat Gustav Bauer.

Adressenänderungen:

Braunmühl, A. v., Professor an der Technischen Hochschule, München, Blütenstraße 17.

Certo, L., Professor am R. Liceo Terenzio Mamiani, Rom.

Denizot, A., Dr. phil., Charlottenburg, Schlüterstraße 7.

Geys, A. T., wissenschaftl. Lehrer a. d. höheren Privatschule, Herzberg (Elster), Markt 4.

Schlink, W., Professor an der Technischen Hochschule Braunschweig.

Snyder, V., Professor an der Cornell Universität, Ithaca, N. Y., University Avenue 214.

Wieghardt, K., Professor an der Technischen Hochschule, Braunschweig, Schleinitzstraße 10.

Wilson, E. B., Professor an der Yale Universität, New Haven, Conn.

Deutsche Mathematiker-Vereinigung. Einladung zur Jahresversammlung in Stuttgart. Der unterzeichnete Vorstand der Abteilung für **Mathematik, Astronomie und Geodäsie,** sowie der Vorstand der **Deutschen Mathematiker-Vereinigung** gibt sich die Ehre, Sie zu der in der Zeit vom 16.—22. September d. J. in Stuttgart stattfindenden 78. Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte ergebenst einzuladen.

Da den späteren Mitteilungen über die Versammlung, die im Juni zur Versendung gelangen, bereits ein vorläufiges Programm der Verhandlungen beigefügt werden soll, so bitten wir, Vorträge und Demonstrationen — namentlich solche, die hier größere Vorbereitungen erfordern — wenn möglich bis zum 15. Mai bei dem mitunterzeichneten Herrn Prof. Dr. A. Krazer, Karlsruhe, Westendstraße 57 anmelden zu wollen. Vorträge, die erst später, insbesondere erst kurz vor oder während der Versammlung angemeldet werden, können nur dann noch auf die Tagesordnung kommen, wenn dafür nach Erledigung der früheren Anmeldungen Zeit bleibt; eine Gewähr hiefür kann daher nicht übernommen werden.

Die allgemeine Gruppierung der Verhandlungen soll so stattfinden, daß Zusammengehöriges tunlichst in derselben Sitzung zur Besprechung gelangt; im übrigen ist für die Reihenfolge der Vorträge die Zeit ihrer Anmeldung maßgebend.

Auch in diesem Jahre sind Vorbereitungen dafür getroffen, um für unsere Verhandlungen Mittelpunkte zu schaffen. Hierzu ist zunächst die Funktionentheorie in Aussicht genommen; wie wir schon jetzt mitteilen können, wird von sachkundiger Seite über einige neuere Untersuchungen, insbesondere auf dem Gebiete der Theorie der Funktionen mehrerer Veränderlichen berichtet werden. Vorträge über den genannten Gegenstand sind uns daher besonders willkommen.

Ganz besonders dankbar wären wir für Vorträge über Gegenstände, welche sich zur Besprechung in kombinierten Sitzungen zweier oder mehrerer verwandter Abteilungen eignen, da es dem universellen Charakter der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte, in welcher im Gegensatz zu den zahlreichen alljährlich stattfindenden Spezialkongressen sämtliche Zweige der Naturwissenschaften und Medizin vertreten sind, entspricht, daß gerade solche mehrere Abteilungen interessierende Fragen zur Verhandlung gelangen.

Den 15. März 1906.

Der Vorstand der I. Abteilung:
Die Einführenden:
Reuschle, Dr., Prof. a. techn. Hochschule.
Mehmke, Dr., Prof. a. techn. Hochschule.
Hammer, Dr., Prof. a. techn. Hochschule.
Die Schriftführer:
Wölffing, Dr., Prof.
Stübler, Dr., Priv.-Doz. und Ass.
Der Vorstand der Mathematiker-Vereinigung:
Prof. Pringsheim, München, Vorsitzender.
Prof. Krazer, Karlsruhe, Schriftführer.

Berliner Mathematische Gesellschaft. *Sitzung am Mittwoch den 25. April 1906.* Tagesordnung: Denizot, Zur Kritik der Theorie des Foucaultschen Pendels. Meißner, Über systematische Fehler bei Zehntelschätzungen.

Mathematische Sektion der Schlesischen Gesellschaft für Vaterländische Kultur. *Sitzung am 30. April 1906*: Sturm, Über das Prinzip der speziellen Lage. Kneser, Die Integralgleichungen, ein neues Hilfsmittel der mathematischen Physik. (Referat.)

Mathematisch-astronomische Sektion der Naturforschenden Gesellschaft in Görlitz. Winter 1905/06. *16. November 1905.* Lorey: 1) Bericht über die Versammlungen in Halle und Meran, insbesondere über die neuen Lehrpläne, 2) die v. Staudtsche Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks. — Weist: eine besondere Art räumlicher Veranschaulichung (s. Schottens Zeitschrift 1906 Seite 336.). — Koch: über eine russische Rechenmaschine. — *14. Dezember.* Lorey: Periodische Erscheinungen und ihre mathematische Beschreibung. (mit Lichtbildern, die das math. Institut der Universität Göttingen freundlichst gelichen hatte.) — *18. Januar 1906.*

Deckert: Paschkes Theorie der Kraftstrahlen. — *15. Februar 1906.* Lorey: 1) Gruppentheoretische Erläuterung der Neperschen Regel. 2) Methodisches zur Wurzelberechnung. — *15. März 1906.* Metzdorf: Geschichtliche Bemerkungen über Näherungswerte von π.

Mathematische Gesellschaft in Göttingen. *14. Sitzung am 13. Februar 1906:* H. Müller referiert über Poincarés Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren, von der eigenen Schwere unterworfenen rotierenden Flüssigkeitsmassen, insbesondere die von ihm entdeckten „birnförmigen“ Gleichgewichtsfiguren. *15. Sitzung am 20. Februar:* E. Zermelo referiert über das von ihm in deutscher Übersetzung herausgegebene Buch von J. W. Gibbs, Elementary principles in statistical mechanics. Der Vortragende nimmt besonders gegen die im 12. Kap. entwickelte Theorie der Entropiezunahme Stellung, indem sich gegen diese Betrachtungen die gleichen Einwände erheben lassen, welche der Vortragende bereits bei anderer Gelegenheit wiederholt geltend gemacht hat. *16. Sitzung am 27. Februar:* C. Runge berichtet über die von ihm gehaltene Vorlesung über „Graphische Methoden der Mechanik und Physik“. D. Hilbert bespricht seine demnächst in den Gött. Nachr. erscheinende „IV. Mitteilung über Integralgleichungen“, welche von den quadratischen Formen mit unendlich viel Variablen handeln soll.

Verein zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften. Die XV. Hauptversammlung findet Pfingsten d. J. zu Erlangen statt. Es werden wie üblich drei allgemeine Sitzungen und mehrere Abteilungssitzungen stattfinden, außerdem eine geschäftliche Sitzung der Sektion Bayern, sowie eine Geschäftssitzung des Gesamtvereins. Für die allgemeinen Sitzungen sind nach dem soeben zur Versendung gelangten Programm folgende mathematische und physikalische Vorträge geplant: Ducrue, Über geometrische Propädeutik; Wiedemann, Das Experiment im Altertum und Mittelalter; Wieleitner, Der Zahl- und Mengebegriff im Unterricht; Pietzker, Die Stellung der Fachkreise zu den Vorschlägen der von der Naturforschergesellschaft eingesetzten Unterrichtskommission. — Für die Abteilungssitzungen sind bisher folgende Vorträge mathematisch-physikalischen Inhalts angemeldet: Geissler, Neue Darstellung des Grenzüberganges und des Grenzbegriffs durch Weitenbehaftungen mit besonderer Berücksichtigung des Schulunterrichts; Grimsehl, Vorlesungsversuche zur Wellenlehre; Pietzker, Vorzeigung der Esselingschen Zeichnung des regelmäßigen Sechzigecks mit sämtlichen Diagonalen; Schorer, Demonstrationen beweglicher Modelle für den propädeutischen Unterricht in der Geometrie; Schorer, Über eine neue heuristische Art, in die Lehren von Flächengleichheit und -Ähnlichkeit einzuführen und dieselben zu verbinden; Wehnelt, Demonstrationen einiger Entladungserscheinungen in verdünnten Gasen. — Anmeldungen zur Teilnahme an der Versammlung sind an Prof. Lenk in Erlangen zu richten.

2. Preisaufgaben und gekrönte Preisschriften.

Preisaufgaben der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft in Leipzig. Die Fürstlich Jablonowskische Gesellschaft in Leipzig hat folgende Preisaufgaben gestellt. 1. Für das Jahr 1906: Es wird eine Untersuchung

der den Bernoullischen Zahlen analogen Zahlen, namentlich im Gebiete der elliptischen Funktionen, welche die komplexe Multiplikation zulassen, gewünscht. 2. Für das Jahr 1907: Es sollen eingehende und einwandfreie experimentelle Untersuchungen angestellt werden, die einen wesentlichen Beitrag zur Feststellung der Gesetze der lichtelektrischen Ströme liefern. Der einzelne Preis beträgt 1500 *M*. Die Zeit der Einsendung endet mit dem 30. November des angegebenen Jahres, und die Zusendung ist an den Sekretär der Gesellschaft (für das Jahr 1906 an Herrn Geheimen Hofrat Professor Dr. August Leskien, Leipzig, Stephanstraße 10/12) zu richten.

Preisaufgaben auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften, gestellt an den deutschen Universitäten.

Universität Göttingen. Untersuchungen über die Stabilität der elastischen Linie in Ebene und Raum, unter verschiedenen Grenzbedingungen.

Die Arbeiten müssen vor dem 15. April 1906 dem Dekan der Philosophischen Fakultät übergeben werden.

Universität Halle. (S. S. 157 dieses Jahresberichts.)

Universität Kiel. Für die hypergeometrische Differentialgleichung dritter Ordnung mit zwei endlich singulären Punkten sollen die Beziehungen, welche zwischen den Hauptintegralen der einzelnen Gebiete bestehen, ermittelt werden. (Für das Jahr 1906—07.)

Dr. Elsa Neumann-Stiftung. Aus der Dr. Elsa Neumann-Stiftung ist am 18. Februar 1907 ein Preis von 1000 Mark durch die philosophische Fakultät der Universität zu Berlin zu vergeben. Er soll zur Auszeichnung der hervorragendsten Arbeit auf physikalischem oder mathematischem Gebiete dienen, die im Jahre 1906 der Fakultät eingereicht worden ist. Zur Bewerbung um den Preis ist jeder ohne Unterschied des Geschlechts und der Religion zuzulassen, der an der Universität Berlin die Doktorprüfung bestanden oder wenigstens zwei Semester an ihr studiert und das 30. Lebensjahr nicht überschritten hat. Auch die Doktordissertation kann als Bewerbungsschrift verwendet werden. Bewerbungen sind bis zum 1. Januar 1907 einzureichen.

Der Preis für das Jahr 1905 ist Herrn Dr. P. Köbe aus Luckenwalde verliehen worden.

Smith-Preise. Die Smith-Preise des laufenden Jahres wurden zuerkannt: Herrn C. F. Russel vom Pembroke College für seine Arbeit über "The geometric interpretation of apolaric binary forms" und Herrn F. J. M. Stratton vom Gonville and Caius College für seine Arbeit über "A problem in tidal evolution suggested by the motion of Saturn's ninth satellite".

3. Hochschulnachrichten.

Universität Stockholm. Während des Monats Februar d. J. hat Professor V. Volterra auf Einladung des Königs Oskar von Schweden an der Universität Stockholm eine Reihe von Vorlesungen über die Differentialgleichungen der mathematischen Physik gehalten.

Verzeichnis der für das Sommersemester 1906 angekündigten Vorlesungen über die mathematischen Wissenschaften. (Schluß.)

Breslau. Rosanes, Analytische Geometrie der Ebene (3); Seminar. Sturm, Differentialgeometrie (4); Darstellende Geometrie und graphische Statik (2); Seminar. Kneser, Integralrechnung (4); Übungen dazu; Variationsrechnung (3); Seminar. Landsberg, Differentialrechnung (4); Übungen dazu; Einleitung in die Theorie der elliptischen und Modulfunktionen (3). Franz, Dioptrik (1); Mechanik des Himmels (4); Astronomisches Praktikum. Lummer, Physikalisches Kolloquium. Pringsheim, Theoretische Physik II (4); Übungen dazu. Schäfer, Elektrische und magnetische Meßmethoden; Beziehungen zwischen Licht, Elektrizität und Magnetismus; Vektoranalysis. Von dem Borne, Physik der irdischen Lufthülle; Geophysikalische Übungen und Besprechungen.

Charlottenburg. Lampe, Höhere Mathematik; Übungen dazu; Bestimmte Integrale und Differentialgleichungen. Hettner, Höhere Mathematik; Übungen dazu; Theorie der Raumkurven und Flächen. Dziobek, Höhere Mathematik; Übungen dazu. Haentzschel, Elemente der Mechanik. Cranz, Variationsrechnung. Steinitz, Variationsrechnung. Funktionentheorie. Niedere Analysis und Algebra; Elemente der darstellenden Geometrie. Hertzer, Darstellende Geometrie II. Hessenberg, Darstellende Geometrie I. Jolles, Darstellende Geometrie II. N. N., Darstellende Geometrie II. Fuchs, Reine Mathematik. Rothe, Fouriersche Reihen nebst Anwendungen; Einführung in die Vektorenrechnung. Servus, Einführung in das Studium der Elektrotechnik; Theorie der Schwingungen mit besonderer Rücksicht auf die elektrischen Schwingungen. Petzoldt, Grundbegriffe der Mechanik. Krigar-Menzel, Theorie des Lichtes; Theorie der Wärmeleitung und der Strahlung. Grunmach, Magnetische und elektrische Maßeinheiten und Meßmethoden; Physikalische Maßbestimmungen und Meßinstrumente. Kalischer, Die physikalischen Grundlagen der Elektrotechnik. Gleichen, Photographische Optik und Anleitung zur Berechnung photographischer Objektive. Groß, Mechanische Wärmetheorie; Einleitung in die Potentialtheorie; Theorie des Galvanismus; Gastheorie; Grundzüge der Energetik.

Dresden. Disteli, Darstellende Geometrie; Perspektive; Homogene Koordinaten. Grübler, Tech. Mechanik; Graphost. Übung. Heger, Analyt. Sphärik. Helm, Höhere Mathematik I; Potentialtheorie; Doppelbrechung d. Lichtes; Versicherungstechn. Seminar. Krause, Integralrechnung; Einleitung i. d. Theorie d. analyt. Funktionen; Seminar. Krone, Theorie u. Praxis d. Photographie. Naetsch, Einleitung i. d. Theorie d. ganzen Zahlen; Sphär. Trigonometrie. Toepler, Elektronen- u. Ionenstrahlung (Radioaktivität).

Erlangen. Gordan, Integralrechnung (4); Differentialgleichungen (4); Seminar. Nöther, Analyt. Geometrie des Raumes (4); Differentialgeometrie (3); Abelsche Funktionen; Synthetische und darstellende Geometrie (4). Wehnelt, Theoretische Physik II (3); Übungen dazu; Übungen in Experimentalvorträgen für Lehramtskandidaten. Wiedemann, Physikalisches Kolloquium.

Gießen. Pasch, Algebra (4); Invariantentheorie (3); Seminar. Netto, Analytische Geometrie der Ebene (4); Bestimmte Integrale (3); Seminar. König, Physikalisches Praktikum für Mathematiker und Naturwissenschaftler (6); Physikalisches Kolloquium (2). Fromme, Theorie der Elektrizität und des Magnetismus mit einer Einleitung in die Theorie des Potentials (5); niedere Geodäsie (3); mit praktischen Übungen. Graßmann, Analytische Mechanik mit Übungen (4); Festigkeitslehre mit Übungen (3). Schmidt, Absolutes Maßsystem (1).

Göttingen. Klein, Funktionstheorie (4); Seminar. Hilbert, Differential- und Integralrechnung I (4); Mechanik der Kontinua (4). Minkowski, Algebra (4); Kugel- und verwandte Funktionen (2); Seminar. C. Runge, Differentialgleichungen (6); Seminar; Graphische Statik. Prandtl, Graphische Statik (2).

Brendel, Wahrscheinlichkeitsrechnung (4); Versicherungsrechnung (2); Übungen im Seminar f. Versicherungswissenschaft (2). Zermelo, Partielle Differentialgleichungen der Physik (4). Abraham, Potentialtheorie (4). Herglotz, Analytische Geometrie (4). Carathéodory, Variationsrechnung (4). Schwarzschild, Allgemeine Astronomie (3); Populäre Astronomie (1); Astronom. Kolloquium (1). Ambronn, Sphärische Astronomie (3); Astronomische Übungen. Wiechert, Erdmagnetismus (2); Feldmessung (4); Polarlicht (1); Seminar; Geophysikalisches Praktikum. Riecke, Ausgew. Probleme der Optik. Voigt, Thermodynamik (4); Optik bewegter Medien (2).

Hannover. Kiepert, Differential- und Integralrechnung II; Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes. Stäckel, Differential- und Integralrechnung I; Differential- und Integralrechnung III; Anwendungen der höheren Mathematik. Rodenberg, Darstellende Geometrie. Precht, Mechanische Wärmetheorie.

Heidelberg. Koenigsberger, Differential- und Integralrechnung (4); Theorie der Linien und Flächen (4); Seminar. Cantor, Analytische Geometrie der Ebene (4); Arithmetik und Algebra (3). Köhler, Darstellende Geometrie, mit Übungen (4). Böhm, Elementarmathematik I; Übungen dazu. Valentiner, Sphärische Astronomie (3); Elemente der Astronomie in geschichtlicher Entwicklung (1). Wolf, Meteorologie (2). Pockels, Einleitung in die theoretische Physik (3); Übungen dazu (1); Geophysik (1). Weber, Kritik der physikalischen Grundbegriffe (1); wissenschaftlich-photographische Übungen. Kalähne, Einige Differentialgleichungen der mathematischen Physik (2); Die physikalischen Grundlagen der Elektrotechnik (1).

Jena. Thomae, Elliptische Funktionen (4); Mathematische Geographie (4). Haußner, Differential- und Integralrechnung mit Übungen (5); Analytische Geometrie der Ebene (4); Teilung und Quadratur des Kreises (2); Seminar. Frege, Analytische Mechanik II (4). Knopf, Zeit- und Ortsbestimmung (2); Bestimmung der Bahnen der Himmelskörper (4); Interpolationsrechnung (2). Auerbach, Theorie der Elektrizität und des Magnetismus (4); Das absolute Maßsystem (2). Rau, Mechanik I (4); Übungen dazu (3). Reich, Einführung in die Elektrotechnik (2); Elektrotechnisches Praktikum.

Kiel. Pochhammer, Einleitung in die Theorie der Determinanten (4); Anwendung der Infinitesimalrechnung auf die Geometrie; Seminar. Heffter, Differential- und Integralrechnung I (4); Übungen dazu; Einleitung in die höhere Algebra (4); Anwendung der elliptischen Funktionen (1); Seminar. Weinnoldt, Die Methoden der darstellenden Geometrie mit Übungen (3). Harzer, Theorie der Bahnbestimmung (3); Übungen im numerischen Rechnen (1). Kreutz, Bestimmung der definitiven Bahn von Planeten und Kometen (2); Übungen dazu (1). Großmann, Photometrie der Gestirne (2); Die neueren Ergebnisse der Astronomie (1); Übungen. Strömgren, Einführung in die Mondtheorie; Mathematische Geographie. Weber, Thermodynamik (4); Theorie physikalischer Messungsapparate; Kolloquium. Lenard, Besprechungen physikalischer Fragen. Becker, Spektralanalyse. Kobold, Niedere Geodäsie; Übungen dazu.

Marburg. Hensel, Zahlentheorie (4); Differentialgleichungen (4); Seminar. Neumann, Elliptische Funktionen (4); Fouriersche Reihen und Integrale (2); Seminar. v. Dalwigk, Analytische Geometrie der Kegelschnitte (4); Geodäsie (3); Übungen dazu; Anleitung zu Zeit- und Ortsbestimmungen. Jung, Algebraische Auflösung der Gleichungen (4). Fueter, Differentialrechnung (4); Übungen dazu. Richarz, Physikalisches Kolloquium. Feußner, Theoretische Physik I (4); Übungen dazu.

München (Universität). Lindemann, Integralrechnung (5); Theorie der Substitutionen und der höheren algebraischen Gleichungen (4); Mechanik deformierbarer Körper (2); Seminar. Voß, Elementare Einführung in die Theorie der Differentialgleichungen (4); Analytische Geometrie des Raumes (5); Seminar.

Pringsheim, Bestimmte Integrale (4); Anwendungen der elliptischen Funktionen (2). v. Weber, Determinanten mit Anwendungen auf Algebra und Geometrie (4); Differentialrechnung (4); Ergänzungen und Übungen dazu. Korn, Funktionentheorie nach Cauchy und Riemann, ihre Anwendungen in der theoretischen Physik (4). Brunn, Elemente der höheren Mathematik für Studierende aller Fakultäten, mit Übungsblättern (4). Doehlemann, Darstellende Geometrie II (Axonometrie, Perspektive) (3); Übungen dazu (2); synthetische (neuere) Geometrie II (Grundgebilde zweiter und dritter Stufe) (4); Das Imaginäre in der Geometrie (1). Hartogs, Ausgewählte Kapitel aus der Funktionentheorie (4). Röntgen, Physikalisches Kolloquium (2). Graetz, Einleitung in die theoretische Physik (4); Theorie des Lichts (4). Donle; Einführung in die neuere Elektrizitätslehre (2). v. Seeliger, Theorie der Figur der Himmelskörper (Fortsetzung) (3); praktisch-astronomische Übungen.

München (Technische Hochschule). v. Dyck, Höhere Mathematik; Seminar. Finsterwalder, Höhere Mathematik II mit Übungen; Photogrammetrie mit Übungen; Seminar. v. Braunmühl, Höhere Mathematik IV; Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie; math.-histor. Seminar. Burmester, Darstellende Geometrie mit Übungen. Schmidt, Vermessungskunde; Hauptvermessungsübungen; Kartierungsübungen. Föppl, Technische Mechanik einschließlich der Elemente der graphischen Statik und der analytischen Statik; Dynamik; Übungen dazu. Fischer, Einführung in die theoretische Physik II. Kutta, Trigonometrie mit Übungen; Hydrodynamik. Emden, Zylinderfunktionen und Anwendung derselben auf physikalische Probleme mit Übungen; Maxwellsche Theorie der Elektrizität und des Magnetismus.

Straßburg. Reye, Einleitung in die synthetische Geometrie (2); Technische Mechanik (4); Seminar. Weber, Bestimmte Integrale und Einleitung in die Funktionentheorie (4); Höhere Zahlentheorie (3); Oberseminar. Wellstein, Einleitung in die Invariantentheorie (2); Enzyklopädie der Elementarmathematik II; Geometrie (Übungen) (3); Unterseminar; Oberseminar. Timerding, Analytische Geometrie des Raumes (3); Übungen dazu (1); Einführung in die angewandte Mathematik mit Übungen (3); Wahrscheinlichkeitsrechnung (1); Oberseminar. Epstein, Elliptische Funktionen (2); Oberseminar. Simon, Geschichte der Mathematik im Mittelalter (2). Cohn, Elektrizitätslehre (4); Übungen (1). Becker, Ausgewählte Kapitel der sphärischen und praktischen Astronomie (2); Bahnbestimmung der Doppelsterne (1); Astronomisches Kolloquium. Braun, Physikalisches Kolloquium.

Tübingen. v. Brill, Mechanik (5); Die Grundlagen der Geometrie (2); Seminar. v. Stahl, Niedere Analysis (3); Allgemeine Funktionentheorie (3); Seminar. Maurer, Höhere Analysis I (3); Übungen dazu (2); Lineare Differentialgleichungen (1). Waitz, Theorie der Elektrizität und des Magnetismus (3); Übungen dazu (2); Populäre Astronomie (2). Gans, Absolutes Maßsystem und absolute Messungen (1); Die Grundlagen der elektro-magnetischen Lichttheorie.

---

4. Personalnachrichten.

Ernennungen, Auszeichnungen usw.:

Dr. W. P. Alexejewsky, ao. Professor der reinen Mathematik an der Universität Charkow, wurde zum o. Professor der angewandten Mathematik am technologischen Institut in Tomsk ernannt.

Dr. Van de Sande Bakhuysen, Direktor der Sternwarte in Leiden, wurde zum auswärtigen Mitgliede der Belgischen Akademie der Wissenschaften ernannt.

Professor Dr. K. L. Barthels wurde zum auswärtigen Mitglied der Mathematischen Gesellschaft zu Palermo ernannt.

Professor Dr. L. Burmester an der Technischen Hochschule zu München wurde von der Akademie der Wissenschaften zu München zum außerordentlichen Mitgliede erwählt.

Dr. Dulac wurde zum ao. Professor der Mathematik an der Faculté des sciences zu Grenoble ernannt.

Dr. G. De Franchis wurde zum ao. Professor der Algebra und analytischen Geometrie an der Universität Cagliari ernannt.

Dr. J. A. Gmeiner, o. Professor der Mathematik an der Deutschen Universität Prag, wurde als Nachfolger von O. Stolz zum o. Professor an der Universität Innsbruck ernannt.

A. P. Grusintzew, Magister und ao. Professor der Physik an der Universität zu Charkow, hat mit einer Dissertation über „Elektromagnetische Theorie der Leiter" die Doktorwürde erlangt.

Professor Dr. J. G. Hagen, S. J., Direktor der Georgetown Sternwarte, wurde zum Direktor der Sternwarte des Vatikans in Rom ernannt.

Dr. A. Hagenbach, ao. Professor der Physik an der Technischen Hochschule zu Aachen, wurde zum o. Professor der Physik an der Universität Basel ernannt.

Dr. A. Hasenöhrl, Privatdozent an der Universität Wien, wurde zum ao. Professor für allgemeine und technische Physik an der Technischen Hochschule zu Wien ernannt.

Professor Dr. D. Hilbert wurde zum auswärtigen Mitgliede der Dänischen Akademie der Wissenschaften in Kopenhagen und der Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiana ernannt.

Professor E. Lebon erhielt auf der internationalen Ausstellung zu Lüttich eine silberne Medaille für die Gesamtheit seiner mathematischen Veröffentlichungen.

Dr. L. A. Martin wurde zum ao. Professor der Mathematik und Mechanik am Stevens Institute of Technology ernannt.

Professor M. d'Ocagne wurde als Nachfolger von Professor Rouché zum Professor der Geometrie am Conservatoire des Arts et Métiers in Paris ernannt.

Professor Dr. F. Porro an der Universität Genua wurde zum Direktor des Observatorio Astronomico Nacional in La Plata ernannt.

Professor Dr. J. Precht, Dozent für Physik an der Technischen Hochschule in Hannover, ist zum o. Professor der Physik daselbst ernannt worden.

Dr. M. Radakowicz, ao. Professor an der Universität Innsbruck, wurde zum o. Professor der mathematischen Physik an der Universität Czernowitz ernannt.

Dr. N. N. Saltykow, ao. Professor der angewandten Mathematik an dem Polytechnischen Institut in Kiew, wurde zum ao. Professor der reinen Mathematik an der Universität in Charkow ernannt.

Professor Dr. Tiemo Schwarz wurde zum Direktor der Benediktiner-Sternwarte in Kremsmünster ernannt.

Dr. W. A. Stekloff, o. Professor der angewandten Mathematik an der Universität Charkow, ist als Nachfolger von Markoff zum o. Professor an der Universität zu St. Petersburg ernannt worden.

Dr. Robert Daublebsky von Sterneck, ao. Professor der Mathematik an der Universität Czernowitz, wurde zum o. Professor daselbst ernannt.

Privatdozent Dr. G. Wieghardt an der Technischen Hochschule zu Aachen wurde zum ao. Professor der technischen Mechanik an der Technischen Hochschule in Braunschweig ernannt.

Dr. C. v. Wisselingh in Amsterdam wurde zum Professor der Mathematik an der Universität Groningen ernannt.

Habilitationen:

Dr. C. Fredenhagen, Assistent am Institut für theoretische Physik der Universität Leipzig, habilitierte sich als Privatdozent an der Universität daselbst.

Dr. G. Z. Giambelli habilitierte sich als Privatdozent für projektive Geometrie an der Universität Genua.

Dr. Schellfisch habilitierte sich als Privatdozent für reine Mathematik an der Universität Münster.

Dr. Erhard Schmid hat sich an der Universität Bonn als Privatdozent der Mathematik habilitiert.

Ruhestand.

Geh. Hofrat Dr. A. Fuhrmann an der Technischen Hochschule in Dresden ist mit dem 1. April von seiner Tätigkeit zurückgetreten.

Dr. A. Handl, o. Professor an der Universität Czernowitz, ist in den Ruhestand getreten.

Dr. V. Knorre, erster Observator an der Sternwarte in Berlin, ist mit dem 1. April d. J. in den Ruhestand getreten.

Dr. A. A. Markoff, o. Professor der reinen Mathematik an der Universität und Mitglied der Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg, ist von seiner Stellung als Professor zurückgetreten und wird nun als Privatdozent Vorlesungen halten.

Professor Dr. E. L. Richards an der Yale Universität beabsichtigt mit Ablauf des gegenwärtigen Semesters von seiner Tätigkeit zurückzutreten.

Gestorben.

Dr. Pierre Curie, Professor der Physik an der Universität Paris, ist am 19. April d. J. gestorben.

Professor Dr. F. M. Karlinski, Direktor der Sternwarte in Krakau, ist am 21. März d. J. im Alter von 75 Jahren gestorben.

Dr. Gabriel Oltramare, Honorarprofessor der Mathematik an der Universität Genf, ist am 10. April d. J. im 90. Jahre gestorben.

Dr. K. Pape, weiland Professor der Physik an der Universität Königsberg, ist im Alter von 70 Jahren gestorben.

Professor Dr. James S. Peirce, Professor der Mathematik an der Harvard Universität, ist am 21. März d. J. im Alter von 71 Jahren gestorben.

5. Vermischtes.

Zur Reform des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts. Die Sektion Bayern des *Deutschen Vereins zur Förderung des Unterrichts in Mathematik und Naturwissenschaften* hat anfangs Oktober 1905

einen „Vorschlag" zur Umgestaltung des mathematisch-physikalischen Unterrichts am humanistischen Gymnasium an die Mitglieder herausgegeben, gleichzeitig mit einer Gegenüberstellung der gegenwärtig geltenden Lehrpläne von Preußen, Sachsen, Württemberg, Baden, Österreich und Bayern, dem Mitte Februar ein in gleicher Weise behandelter „Vorschlag" für die beschreibenden Naturwissenschaften folgte. Diese Vorschläge, die auf der diesjährigen Pfingstversammlung zu Erlangen Gegenstand der Diskussion sein werden, schließen sich, sowohl was die Leitsätze, als die Ausführung im einzelnen betrifft, möglichst enge an die von der „Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte" veröffentlichten Reformvorschläge an (Zeitschr. math. nat. Unterr. **36**, 1905, S. 533—580 u. separat), unter Rücksichtnahme auf die besonderen Verhältnisse Bayerns.

Wenn wir uns hier auf den mathematisch-physikalischen Vorschlag beschränken, so ist zunächst festzustellen, daß gegenüber sämtlichen oben angegebenen Staaten Bayern eine Minderzahl von Unterrichtsstunden hat. Dieselben sind gegenwärtig, von unten angefangen, in der Zahl 3, 3, 3, 2, 4, 4, 3 + 2, 3 + 2, 2 + 2, wobei die zweite Zahl in den drei oberen Klassen der Physik angehört. Eine Vermehrung dieser Stundenzahl erscheint *geboten* beim Vergleich des Anteils, den der math.-nat. Unterricht am bayrischen Gymnasium hat, mit dem an außerbayrischen Gymnasien (14,4% der Gesamtstundenzahl im Gegensatz zu 17% bei Preußen). Eine Vermehrung erscheint *zulässig* beim Vergleich mit der Belastung der nichtbayrischen Gymnasiasten und auch der bayrischen Studierenden technischer Unterrichtsanstalten. Es wird jedoch nur gefordert, daß die Reihenfolge der Stundenzahlen die folgende sei: 3, 3, 3, **3**, 4, 4, **4** + 2, **4** + 2, **3** + 2, was 16% der Gesamtstundenzahl ergäbe. (Die Unterrichtskommission wünscht bekanntlich einen durchgehenden 4 stündigen Mathematikunterricht, wie er in Preußen mit Ausnahme der 4. Klasse (U III) tatsächlich besteht).

Die Hauptunterschiede des bayrischen Vorschlags gegenüber den Reformvorschlägen der Unterrichtskommission bestehen, von kleineren Schiebungen abgesehen, wohl in zweierlei Dingen: 1. In dem späteren Beginn der Geometrie (4. Klasse statt 2. Klasse), offenbar bedingt durch die geringere Stundenzahl in den unteren Klassen, sowie 2. in der systematischen Einführung der Differential- und Integralrechnung in den beiden oberen Klassen. Diese Einführung soll auf Grund geometrischer und mechanischer Vorstellungen erfolgen und sich nur auf die allereinfachsten Beispiele für Differentiation und Integration erstrecken. Bis auf weiteres sollen Behandlungsweise und Ausdehnung dieses Unterrichtszweiges dem Ermessen des Fachlehrers überlassen bleiben

Weiter wird gewünscht, daß die Noten in Physik nicht mit den Mathematiknoten vereinigt werden, daß also die Physik als selbständiges Lehrfach betrachtet wird. Im übrigen sind auch für Physik die Gesichtspunkte dieselben wie die der Unterrichtskommission.

Cremona-Denkmal. Die Sammlungen für ein Cremona-Denkmal, s. Jahresbericht XIII, S. 139, haben bisher die Summe von 6850 Lire ergeben. Weitere Sendungen sind an Herrn Ingenieur Isaia Sonzogno, Segretario della Scuola d'Applicazione per gl' ingegneri in Roma, Piazza S. Pietro in Vincoli 5 zu richten. Die Ausführung des Denkmals in Marmor ist dem Bildhauer Senator Giulio Monteverde übertagen worden.

Auszeichnung für Ausstellung mathematischer Modelle. Die Verlagshandlung von Martin Schilling in Halle a. S. hat, wie erst jetzt sicher bekannt wird, für ihre Ausstellung mathematischer Modelle in St. Louis den ersten Preis, die goldene Medaille und ein Diplom, erhalten.

Literarisches.

1. Notizen und Besprechungen.

Gino Loria, Vergangene und künftige Lehrpläne. Autorisierte Übersetzung von H. Wieleitner. G. J. Göschensche Verlagshandlung. Leipzig 1906, 22 S. 8⁰.

Die vorliegende kleine Schrift ist die wortgetreue Übertragung einer Rede, die Loria zu Mailand am 22. April 1905 bei Gelegenheit der durch die Vereinigung „Mathesis" veranstalteten Bezirksversammlung von Mathematikprofessoren gehalten hat. In den Noten hat Wieleitner einige Ergänzungen hinzugefügt. Obwohl die Rede auf italienische Verhältnisse Bezug nimmt, hat sie zweifellos auch für andere Länder und in erster Linie für Deutschland großes Interesse; sie bildet ein wertvolles Glied in der Kette der überall in der Kulturwelt sich täglich mehrenden Kundgebungen für eine zeitgemäße Reform des mathematischen Unterrichts und verdient die Beachtung nicht nur aller, die an dem Reformwerk arbeiten, sondern aller Gebildeten überhaupt. Philologen, Mediziner, Juristen, Verwaltungsbeamte (insbesondere die der Unterrichtsverwaltungen) und Ingenieure werden sich bequem über die prinzipiellen Gesichtspunkte der Reformbewegung auf dem Gebiete des mathematischen Mittelschulunterrichts aus Lorias Rede unterrichten können.

F. Gomes Teixeira, Tratado de las curvas especiales notables. Memoria premiada por la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales de Madrid, y publicada por la misma Academia. IX u. 632 S. Madrid 1905.

Die Akademie zu Madrid hatte zuerst im Jahre 1892 die Preisaufgabe ausgeschrieben, alle bekannten und mit besondern Namen belegten Kurven zu katalogisieren, ihre Formen und Eigenschaften anzugeben und bibliographische Angaben hinzuzufügen, und sie hat diese Aufgabe im Jahre 1895 wiederholt. Die vorliegende umfangreiche Schrift bildet die Beantwortung der Aufgabe, die durch den Preis ausgezeichnet wurde.

Seit der Abfassung der Schrift, 1897, sind mehrere Schriften von ähnlichem Charakter erschienen, vor allem das große Werk von Loria: Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven, Leipzig 1902, mit dem die Preisschrift des Herrn Teixeira bei aller Verschiedenheit naturgemäß in mancher Beziehung viel Ähnlichkeit aufweist. Jedoch beschränkt sich die Schrift des Herrn Teixeira nicht auf die ebenen Kurven, sondern sie zieht auch Kurven doppelter Krümmung in Betracht. Ferner ist die Anordnung eine andere, wie auch die Behandlungsweise; absolute Vollständigkeit hat der Herr Verfasser nicht erstrebt.

Die Anordnung ist so getroffen, daß zunächst die bekannten Kurven dritter Ordnung, vierter Ordnung, sowie sechster und achter Ordnung be-

handelt werden. Dann folgt ein Kapitel über bekannte transzendente Kurven, ein weiteres über Spiralen, eins über Parabeln und Hyperbeln, sowie eins über zykloidische Kurven; den Abschluß der ebenen Kurven bildet ein Kapitel über verschiedene Klassen von Kurven (Perlkurven von Sluse, Rosetten von Grandi usw.). Die letzten drei Kapitel, XII—XIV, beziehen sich auf Raumkurven; im ersten werden die sphärischen Kurven, im zweiten die übrigen Raumkurven und im letzten die Polhodie und Herpolhodie behandelt. Hieran schließen sich noch einige Zusätze zu früheren Teilen, ein Verzeichnis der in dem Buche behandelten Kurven und eine Liste der angeführten Autoren.

Wie schon bemerkt, hat der Herr Verfasser größtmögliche Vollständigkeit nicht erstrebt; das geht insbesondere auch aus den bibliographischen Angaben hervor. In dieser Beziehung ist das Werk von Loria, soweit die ebenen Kurven in Frage kommen, entschieden reichhaltiger. Aber dennoch besitzt die Behandlungsweise Teixeiras manche Eigenheiten, die seinem Buche auch neben dem von Loria einen Platz sichern. Auf Einzelheiten möge hier nicht eingegangen werden.

Das außerordentlich verspätete Erscheinen der Teixeiraschen Preisschrift erklärt sich damit, daß der inzwischen verstorbene Sekretär der Madrider Akademie, Miguel Merino, infolge Kränklichkeit die ihm obliegende Überwachung des Drucks der Schrift nicht regelmäßig ausüben konnte.

Robert Haußner, Darstellende Geometrie. Erster Teil. Elemente; Ebenflächige Gebilde. Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 110 Figuren im Text. [207 S.] Leipzig 1904. G. J. Göschens Verlagshandlung.

Es war sicher ein glücklicher Gedanke, zu minimalem Preise und in konzentriertester Fassung einen Leitfaden der darstellenden Geometrie herauszugeben, welcher jedem der Schüler neben dem mündlichen Vortrage zur Hand ist, um ihm eine sichere Fixierung der grundlegenden Methoden zu bieten, und in seinen Figuren brauchbare Vorbilder für die eigenen Zeichenübungen zu liefern. Daß das vorliegende Werkchen diesen Gedanken in glücklicher Weise verwirklicht hat, beweist die Tatsache, daß schon nach 2 Jahren eine zweite Auflage erforderlich war, welche als eine vielfach vermehrte und verbesserte in die Öffentlichkeit tritt. Die Zusätze betreffen hauptsächlich den I. Abschnitt, in welchem die konstruktive Behandlung der Ellipse gelehrt wird. Das erste Viertel des Buches ist der schiefen Parallelprojektion, der Lehre von der Affinität, sowie der Darstellung der einfachsten räumlichen und ebenen Gestalten im Schrägbilde gewidmet. Dann folgt eine ausführliche Behandlung der grundlegenden Methoden der orthogonalen Projektion auf 2 zu einander senkrechten Tafeln. Der letzte Abschnitt behandelt die Darstellung ebenflächiger Gebilde, ihrer ebenen Schnitte und gegenseitigen Durchdringungen. Hier wäre es wohl angebracht gewesen, auf die nach analogen Prinzipien sich vollziehende Behandlung von Kegel, Zylinder und Kugel einzugehen, zumal die Darstellung dieser Körper im Schrägbilde schon im ersten Teile angedeutet ist. — Den Text begleiten zahlreiche zwar in kleinem Maßstabe, aber sauber und exakt gezeichnete Figuren. Die Darstellung ist knapp und klar, und trotz ihrer Kürze von ausreichender Vollständigkeit. Es ist lebhaft zu wünschen,

daß der Herr Verfasser den schon längst angekündigten zweiten Teil, welcher Kegelschnitte, krumme Flächen, Zentralprojektion, Axonometrie, Schattenkonstruktionen und Beleuchtungslehre behandeln soll, recht bald folgen lasse.

Bonn, März 1906. F. London.

Rudolf Schüßler, Orthogonale Axonometrie. Ein Lehrbuch zum Selbststudium. Mit 29 Figurentafeln in besonderem Heft. [VIII u. 170 S.] Leipzig 1905. B. G. Teubner.

Der Zweck vorliegender Schrift ist, die Bedeutung der orthogonalen Axonometrie als selbständige Darstellungsmethode darzutun, und zu zeigen, wie man mit ihr alle Konstruktionen der darstellenden Geometrie, unabhängig vom Grund- und Aufrißverfahren, in einfacher und übersichtlicher Weise zur Ausführung bringen kann. Der unbestreitbare Nutzen der Axonometrie vor dem Zweitafelverfahren besteht einmal darin, daß man es nur mit einer einzigen Projektionsebene und mit nur einer Abbildung zu tun hat, dann aber und vor allem in der großen Anschaulichkeit und Bildlichkeit, mit der axonometrische Darstellungen wirken und welche nicht nur bei der Herstellung der Bilder, sondern auch bei der Durchführung aller einzelnen Konstruktionen sich überaus angenehm bemerkbar macht. Demgegenüber besteht der nicht aus der Welt zu schaffende Nachteil, daß für die wirkliche Entnahme der Maßzahlen von Längen und Winkeln doch das Grund- und Aufrißverfahren einfachere und schnellere Methoden an die Hand gibt, obzwar alle diese Aufgaben auch in der Axonometrie schöne und elegante Lösungen finden.

Vor allem sind es die fein durchdachten Methoden von Pelz, welche die leichte Bewältigung metrischer Probleme gestatten, und die auch in dem vorliegenden Lehrbuch sich im Mittelpunkte der Darstellung befinden. Der Verfasser hat mit unbestreitbarem Erfolge den Versuch gemacht, die einfachen Resultate, welche in den Abhandlungen von Pelz enthalten sind, bisher aber sich auf die Methoden der projektiven Geometrie stützten, auf durchaus elementarem Wege in durchsichtiger und leichtfaßlicher Weise herzuleiten, so daß ein jeder auch ohne Vorkenntnisse in der darstellenden und projektiven Geometrie durch dieses Lehrbuch in die orthogonale Axonometrie eingeführt werden kann. Der Inhalt des Buches bildet daher einen vollständigen Lehrgang der darstellenden Geometrie für das in Rede stehende Darstellungsverfahren. Nach Auseinandersetzung der in Frage kommenden Begriffe und Methoden behandelt der Verfasser zunächst die Darstellung der reinen Lagenbeziehungen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen, um dann dem Normalenproblem und den metrischen Aufgaben mittels der Pelzschen Methoden in besonders liebevoller und eleganter Darstellung sich zuzuwenden; dabei ist hervorzuheben, daß sich die Konstruktionen ohne Benutzung der früher vielfach verwendeten Reduktionskoeffizienten durchführen lassen, und so von der in älteren Darstellungen fühlbaren Gebundenheit an bestimmte Verhältnisse befreit sind. Es folgt sodann eine ausführliche und keine besonderen Vorkenntnisse voraussetzende Behandlung der Kegelschnittslehre; die letzten Abschnitte des Buches beschäftigen sich mit der Darstellung und Untersuchung der Zylinder-, Kegel-, Rotationsflächen. Besonders sorgfältige Berücksichtigung finden von Anfang an die Schattenkonstruktionen;

es werden für dieselben zahlreiche geschickte Methoden und nützliche Kunstgriffe angegeben, und nicht nur auf die theoretisch wichtigen Gebilde angewendet, sondern auch an zahlreichen praktischen Gegenständen, wie Treppen, Balkenverbindungen u. dergl. dargelegt. Auf 29 besonderen Tafeln sind vom Verfasser selbst entworfene und klar ausgeführte Figuren beigegeben, die das Eindringen in die vorgetragenen Lehren erleichtern und zur selbstständigen Ausführung axonometrischer Zeichnungen anleiten; vielleicht wäre es für die Durchsichtigkeit mancher Zeichnungen nützlicher gewesen, wenn an ein und derselben Figur nicht zu vieles demonstriert worden wäre. Da auch eine reiche Anzahl von Aufgaben beigegeben ist, die Darstellung überall klar und leicht faßlich, dabei aber auch ausreichend korrekt ist, so wird das Buch seinem Zwecke, zum Selbststudium zu dienen, vollkommen gerecht werden. Dem Kenner der darstellenden Geometrie und dem fortgeschrittenen Schüler wird es sicher von Interesse sein, zu verfolgen, wie der gesamte Lehrstoff dieser Disziplin hier eine eigenartige, von der gewöhnlichen Orthogonalprojektion unabhängige und von ihr völlig abweichende Darstellung findet.

Bonn, März 1906. F. London.

Oskar Wend, Cayleysche Lösungen mathematischer Elementaraufgaben. Wissenschaftliche Beigabe zu dem Jahresbericht der Technischen Staatslehranstalten in Chemnitz. Chemnitz 1906. 42 S. 4⁰.

In dem Vortrage über „Die Notwendigkeit regelmäßiger Vorlesungen über Elementar-Mathematik an den Universitäten", den ich im August 1904 auf dem dritten internationalen Mathematikerkongreß zu Heidelberg gehalten habe, hatte ich als eine unentbehrliche Ergänzung zu diesen Vorlesungen Übungen bezeichnet, in denen die Lösung von Aufgaben behandelt wird, und darauf hingewiesen, daß Cayleys Werke eine Fülle schöner Lösungen elementarer Aufgaben enthalten, die in Auswahl herauszugeben ein dankenswertes Unternehmen sein würde. Diese Anregung hat den Verfasser veranlaßt, 15 Aufgaben herauszusuchen, die sich für den Unterricht auf der Oberstufe eignen, die aber auch sehr wohl bei den von mir vorgeschlagenen Übungen Verwendung finden können. Er gibt mit Recht keine bloße Übersetzung, sondern eine den deutschen Verhältnissen angepaßte ausführliche Bearbeitung, bei der die Zusätze und Erläuterungen in Anmerkungen verwiesen sind. Die ersten sieben Aufgaben sind analytischer Natur; drei betreffen algebraische Fragen, drei die Herleitung algebraisch-trigonometrischer Identitäten, die letzte ein Problem der Zahlentheorie. Die folgenden acht Aufgaben gehören der Geometrie an; im besonderen handelt es sich um den kleinsten Kreis, der drei gegebene Punkte einschließt, die Anzahl der Abteilungen, in die der Raum durch n Ebenen allgemeiner Lage zerlegt wird, die beiden Gleichungen zwischen den sechs Verbindungsstrecken von vier auf einem Kreise liegenden Punkten, Eigenschaften der Tetraeder mit gleichen Gegenkanten, Erzeugung der Ellipse als Enveloppe einer Schar von Kreisen, Fragen aus der Perspektive usw. Die Auswahl ist als eine recht glückliche zu bezeichnen, und es wäre zu wünschen, daß der Verfasser noch mehr dieser Cayleyschen Lösungen den deutschen Mathematikern zugänglich machte.

Hannover, April 1906. Paul Stäckel.

Franz Neumanns Gesammelte Werke, herausgegeben von seinen Schülern. In 3 Bänden. II. Band. Mit einem Bild von F. Neumann in Heliogravüre. [XVI u. 620 S.] 4. Leipzig 1906, B. G. Teubner. *M.* 36.—.

Diese Gesamtausgabe der von Franz Neumann teils in den Schriften der Berliner Akademie, teils in Poggendorffs Annalen, teils in anderen Zeitschriften publizierten Abhandlungen ist im ganzen auf drei Bände berechnet. — Der hier zunächst erscheinende zweite Band enthält hauptsächlich Untersuchungen über Wärme und Licht. An der Redaktion dieses Bandes sind beteiligt gewesen die Herren: E. Dorn (Halle), O. E. Meyer (Breslau), C. Neumann (Leipzig), K. Pape (früher in Königsberg, jetzt in Steglitz), L. Saalschütz (Königsberg), W. Voigt (Göttingen), P. Volkmann (Königsberg), K. von der Mühll (Basel), A. Wangerin (Halle), H. Weber (Straßburg). — In nicht allzu langer Zeit wird hoffentlich der dritte Band erscheinen können, der eine große optische Abhandlung (von 1841), sodann aber elektrische und magnetische Untersuchungen, sowie auch eine Abhandlung über die Laplaceschen Ypsilons und deren Anwendung zu Interpolationszwecken enthalten wird. — Zuletzt wird dann der erste Band erscheinen, der Neumanns geometrische und kristallographische Untersuchungen enthalten wird.

Leipzig, im März 1906. C. N.

Max Simon, Über die Entwicklung der Elementar-Geometrie im XIX. Jahrhundert. Referat der Deutschen Mathematiker-Vereinigung erstattet. Mit 28 Figuren im Text. Auch unter dem Titel: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung; der Ergänzungsbände I. Band. [VIII u. 278 S.] gr. 8. Leipzig 1906, B. G. Teubner. *M.* 8.—; geb. *M.* 9.—.

Der vorliegende Bericht über Elementargeometrie war ursprünglich für die Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften bestimmt, und nur im Interesse der Sache hatte ich die Arbeit, deren Mühe ich voraussah, übernommen. Seit vier Jahren ist sie den Leitern der Encyklopädie übergeben, doch waren immer wieder Formalien zu erledigen, da die Eigenart des Referenten sich nicht mit der des Redakteurs deckte. Wenn schließlich Herr Klein das Referat in der vorliegenden Form ablehnte, so geschah es vorzugsweise, weil ihm keine Hilfskräfte zu Gebote standen, die sämtlichen Zitate mit bibliographischer Treue, und zwar jedesmal, wenn ein Werk genannt wurde, abfassen zu lassen. In der Tat war durch den Zustand der Zettel eine zeitraubende Korrektur nötig. Ich habe nur die allerwichtigsten Werke bibliographisch genau zitiert, und die andern so, daß sie, mit verschwindenden Ausnahmen, jeder Interessent nach meinem Zitat sofort auffinden kann. Außerdem habe ich meistens die Zeitschriften nach ihren Begründern genannt. — Um die Arbeit weiteren Kreisen zugänglich zu machen, regte Herr Klein an, sie als einen besonderen Bericht in einem Ergänzungsbande des Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung erscheinen zu lassen, eine Anregung, die der Vorstand der Vereinigung willkommen hieß, und der ich gefolgt bin. — Zum größten Danke bin ich meinem Jugendfreund E. Lampe für die überaus mühevolle Korrektur verpflichtet, die er gelegentlich mit Zusätzen aus dem so reichen Schatz seiner Literaturkenntnis begleitete.

Straßburg i. E. M. Simon.

Mittag-Lefflers Bibliothek. Bei der Feier seines 60. Geburtstages am 16. März d. J. hat Professor G. Mittag-Leffler erklärt, daß er seine mathematische Bibliothek, die größte dieser Art in Privatbesitz, der Uuiversität zu Stockholm vermachen werde.

2. Bücherschau.

Bohler, O., Über die Picardschen Gruppen aus dem Zahlkörper der 3. und der 4. Einheitswurzeln. III, 102 S. Dissert. Zürich 1905. *M* 2. —

Chollet, T., Traité de géométrie descriptive. Première partie, à l'usage des élèves des classes de première *C* et *D*. 3e éd. 188 p. 8° avec fig. Paris 1906. Frs. 2.—.

—, Traité de géométrie descriptive et compléments de géométrie. Deuxième partie, à l'usage des élèves de mathématiques *A* et *B* et des candidats de Saint-Cyr. 2e édition. 204 p. 8° avec fig. et planches. Paris 1906. Frs. 2.50.

Ewerding, G., Lehrbuch der Graphostatik. VIII, 186 S. m. 282 Fig. Stuttgart 1906. *M* 4,40.

Faber, G., Über die zusammengehörigen Konvergenzradien von Potenzreihen mehrerer Veränderlicher. 36 S. Habilitationsschrift. Karlsruhe 1906.

Guichard, C., Traité de mécanique. Première partie: Cinématique, à l'usage des élèves des classes de première *C* et *D*. 4e éd. 114 pag. avec fig. Paris 1906. Frs. 1.50.

—, Deuxième partie: Cinématique, Statique, Dynamique, à l'usage des élèves des classes de mathématiques *A* et *B*. 2e éd. 196 p. avec fig. Paris 1906. Frs. 2.50.

Heß, A., Stetige Abbildung einer Linie auf ein Quadrat. 45 S. Zürich 1905. *M* 2,—

Küttner, W., Das Risiko der Lebensversicherungsanstalten und Unterstützungskassen. 95 S. Berlin 1906. *M* 4,—

Lauenstein, R., Die Festigkeitslehre. Elementares Lehrbuch für den Schul- und Selbstunterricht, sowie zum Gebrauch in der Praxis, nebst einem Anhang enthaltend Tabellen der Potenzen, Wurzeln, Kreisumfänge und Kreisinhalte 9. Auflage. Bearbeitet von C. Ahrens. VI, 205 S. m. 132 Abbild. Stuttgart 1906. *M* 5,—

Mattson, R., Contributions à la théorie des fonctions entières. Thèse pour le doctorat. 27 S. Upsala.

Mauderli, S., Die Interpolation und ihre Verwendung bei der Benutzung und Herstellung mathematischer Tabellen. 147 S. Solothurn 1906. *M* 3,60.

Mayer, J. E., Mathematik für Techniker. Gemeinverständliches Lehrbuch für Mittelschüler sowie besonders für den Selbstunterricht 1. Bd. Leipzig 1906. *M* 1,60.

Poincaré, H., Wissenschaft und Hypothese. Autorisierte deutsche Ausgabe mit erläuternden Anmerkungen von F. und L. Lindemann. 2. verbesserte Auflage. XVI, 346 S. 8°. Leipzig 1906.

Quitmann, E., Über Minimallagen in ebenen Gebieten. 45 S. mit 1 Tafel. Dissert. Münster 1906.

Sohnckes Sammlung von Aufgaben aus der Differential- und Integralrechnung. II. 6. verbesserte Auflage. Bearbeitet und herausgegeben von M. Lindow. VI, 224 S. m. 151 Fig. Jena 1906. *M* 4,—

Wachtel, A., Anwendungen der Graphostatik im Maschinenbau mit besonderer Berücksichtigung der statisch bestimmten Achsen und Wellen. Elementares Lehrbuch für technische Unterrichtsanstalten, zum Selbststudium und zum Gebrauch in der Praxis. VII, 146 S. m. 194 Abbild. Hannover 1906. *M* 5,20.

3. Zeitschriftenschau.

(Von dem Inhalt der Zeitschriften werden nur die Aufsätze erwähnt, welche dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften angehören.)

Mathematische Annalen. 62. Band. 2. Heft.

Johansson, Ein Satz über die konforme Abbildung einfach zusammenhängender Riemannscher Flächen auf den Einheitskreis. Johansson, Beweis der Existenz linear-polymorpher Funktionen vom Grenzkreistypus auf Riemannschen Flächen. Severi, Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica. Spieß, Theorie der linearen Iterationsgleichung mit konstanten Koeffizienten. S. Bernstein, Sur la généralisation du problème de Dirichlet. Landau, Über die Darstellung definiter Funktionen durch Quadrate. Schoenflies, Beiträge zur Theorie der Punktmengen. III.

Archiv der Mathematik und Physik. 10. Band 2. Heft

Schaefer, Über Absorption und Dispersion elektrischer Wellen. Thieme, Rein geometrische Theorie der binären Formen 2. Ordnung. Wallenberg, Über Beziehungen zwischen den Integralen einer homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung und ihren ersten Ableitungen. Schultz, Die überzähligen willkürlichen Konstanten in der Lösung der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung. Rezensionen. Vermischte Mitteilungen.

Bibliotheca Mathematica. 3. Folge. 6. Band. 4. Heft.

Haas, Über die Originalität der physikalischen Lehren des Johannes Philoponus. Loria, Sopra una trasformazione di contatto ideata da Fermat. Hayashi, Die magischen Kreise in der japanischen Mathematik. Jourdain, On two differential equations in Lagrange's Mécanique analytique. Rudio, Wilhelm Schmidt (1862—1905). Amodeo, Sul corso di storia delle science matematiche nella R. Università di Napoli. Eneström; Grönbland, Kleine Bemerkungen zur zweiten Auflage von Cantors Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Vermischte historische Notizen.

Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 131. Heft 1.

Gundelfinger, Drei Briefe von C. F. Gauß an Joh. von Müller. Thomé, Über simultane lineare Differentialgleichungen. Schwering, Anwendung der elliptischen Funktionen auf eine geometrische Aufgabe. Mandl, Über die Zerlegung von Funktionen mehrerer Variabeln in irreduzible Faktoren. Rados: Die Diskriminante der allgemeinen Kreisteilungsgleichung. Ermakoff, Equations différentielles du premier ordre ayant des multiplicateurs de la forme $(y-u_1)^{\alpha_1}, (y-u_2)^{\alpha_2} \ldots (y-u_n)^{\alpha_n}$. Teixeira, Sur quelques applications des séries ordonnées suivant les puissances du sinus.

Monatshefte für Mathematik und Physik. 17. Jahrgang 1906. 2. Vierteljahr.

Grünwald, Über duale Zahlen und ihre Anwendung in der Geometrie. Berger, Über die zur dritten Stufe gehörigen hypergeometrischen Integrale am elliptischen Gebilde. Literaturberichte.

Zeitschrift für Mathematik und Physik. 53. Band. 2. Heft.

Wieghardt, Über die Nebenspannungen gewisser hochgradig statisch unbestimmter Fachwerke. Leon, Spannungen und Formänderungen rotierender Kugelschalen. Lerch, Über die Berechnung der Summen diskontierter Zahlen für eine nach dem Makehamschen Gesetz fortschreitende Sterbetafel. Wellisch, Die Gewölbetheorie im Lichte der Theorie der kleinsten Produkte. Girtler, Über die kubische Dilation und ihre Beziehung zur Beanspruchung isotroper elastischer Körper. Kleinere Mitteilungen.

Annali di Matematica pura ed applicata. Serie III^a. Tomo XII^o. Fasc. 3^o. 4^o.

Dini, Studii sulle equazioni differenziali lineari. Loro integrali normali. Bianchi, Teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sui paraboloidi Fubini, Sulla costruzione dei campi fondamentali di un gruppo discontinuo.

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Tomo XX. Fasc. II.

Levi-Civita, Sopra un problema di elettrostatica che si è presentato nella costruzione dei cavi. — Berzolari, Sui sistemi di $n+1$ rette dello spazio ad n dimensioni, situate in posizione di Schläfli. — Brusotti, Teoremi sulle piramidi di $n+1$ vertici dello spazio ad n dimensioni. — Burgatti, Sugli integrali singolari delle equazioni a derivate ordinarie del second' ordine. — Gebbia, Sulla integrabilità delle condizioni di rotolamento di un corpo solido sopra un altro, e su qualche questione geometrica che vi è connessa. — Aguglia, Sulla superficie luogo di un punto in cui le superficie di tre fasci toccano una medesima retta. — De Franchis, Sugl'integrali di Picard relativi ad una superficie doppia. — Barbieri, Alcuni teoremi sulle funzioni semicontinue, e sulle funzioni di una variabile, limiti di funzioni di due variabili independenti. — Pisati, Sulla estensione del metodo di Laplace alle equazioni differenziali lineari di ordine qualunque con due variabili independenti.

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Tomo XXI. Fascicolo I. Anno 1906.

Sbrana, Sui sistemi ciclici. Almansi, Sulla flessione dei cilindri. Marletta, Sulle quintiche gobbe razionali. Torelli, Dimostrazione di una formula di de Jonquières e suo significato geometrico. Guldberg, Sur une classification des problèmes du calcul des variations. Sinigallia, Sul sistema di tre forme cubiche binarie. Silla, sopra alcune quistioni di statica. Forsyth, Differential invariants of a plane and of curves in the plane. Young, A note on sets of overlapping intervalls. Poincaré, Sur la dynamique de l'électron.

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Tomo XXI. Fascicolo II.

Fubini, Nuove ricerche intorno ad alcune classi di gruppi discontinui. De Donder, Sur les invariants différentiels. Marletta, Contributo alla teoria delle curve razionali. Mineo, Sul luogo dei punti parabolici delle superficie d'un fascio. Chini, Sulle superficie W applicabili sopra una superficie di rotazione. Sannia, Deformazioni infinitesime delle curve inestensibili e corrispondenza per ortogonalità di elementi. Severi, Intorno al teorema d'Abel sulle superficie algebriche ed alla riduzione a forma normale degl'integrali di Picard. Boggio, Risoluzione del problema dei valori al contorno per alcune classi di equazioni alle derivate parziali.

Jornal de Sciencias Matematicas e Astronomicas. Vol. XV.

d'Almeida Arez, Duas classes de numeros. Vollù, Application des lois générales de la formation des mondes à la génération spéciale du nôtre. Barisien, Note sur certaines courbes dérivées de la cycloide. Siberiani, Un teorema delle teorie delle serie di potenze. Lerch, Sur la cinquième démonstration de Gauss de la loi de réciprocité de Legendre. Ferreira, Sobre a teoria das raizes conjugadas. Pirondini, Sur les pseudo-spirales. Pirondini, Deux problèmes relatifs aux lignes tracées sur une surface de révolution.

Annaes Scientificos da Academia Polytechnica do Porto. Vol I. No. 2.

Jahnke, Sur une transformation d'une classe d'équations différentielles binômes. D'Almeida Arez, Nota sobre os coefficientes das formulas de Waring. Schoute, Application d'un théorème connu sur la multiplication de deux matrices à la géométrie polydimensionale.

Sitzungsberichte („Rad") der südslavischen Akademie der Wissenschaften und Künste (Agram). Mathem.-naturw. Klasse, Bd. 161 und 163 (1905).

K. Karamata, Über anliegende sphärische Dreiecke. G. Majcen, Eine Art der Abbildung einer allgemeinen Fläche 3. Ordnung auf eine Fläche 2. Ordnung. K. Stojanović, Verallgemeinerung des Greenschen Theorems und der Poissonschen Gleichung. S. Bohniček, Zur Theorie des relativbiquadratischen Zahlkörpers.

Transactions of the American Mathematical Society. Vol. 7. Nr. 2. April 1906.
Stromquist, On geometries in which circles are the shortest lines. Bliss, A generalisation of the notion of angle. Veblen, The square root and relations of order. Kasner, The problem of partial geodesic representation. Stephens, On the pentadeltoid. Miller, The groups of order p^m which contain exactly p cyclic subgroups of order p. Manning, Groups in which a large number of operators may correspond to their inverses. Bussey, Finite projective geometries. Ford, On the analytic extension of functions defined by double power series. Dickson, On quadratic, hermitian and bilinear forms. Stäckel, Die kinematische Erzeugung von Minimalflächen. Polza, A fifth necessary condition for a strong extremum of the integral $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$. Bliss and Mason, A problem in the calculus of variations in which the integrand is continuous.

Proceedings of the London Mathematical Society. Series 2. Vol. 4. Part. 1.
Burnside, On the arithmetical nature of the coefficients in a group of linear substitutions of finite order. Hardy, The continuum and the sesond number class. Dixon, On „well-ordered" aggregates. Hobson, On the arithmetic continuum. Russell, On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types. Burnside, On the Hessian configuration and its connection with the group of 360 plane collineations. Rogers, On the representation of certain asymptotic series as convergent continued fractions.

4. Kataloge.

Theodor Ackermann, München, Promenadenplatz 10. Antiquariats-Katalog Nr. 550. Mathematik und Physik. Philosophie. Eine Sammlung hervorragender Werke aus dem Nachlaß des † Prof. Dr. Gust. Ferd. Meyer in München.

Mayer & Müller, Berlin NW., Prinz Louis Ferdinandstr. 2. Katalog 220. Mathematik.

B. G. Teubner, Leipzig, Poststr. 3. Mitteilungen Nr. 1 [1]. 39. Jahrgang. 1906.

5. Bei der Redaktion eingegangene Schriften.

[Titel, Preis usw. der eingesandten Schriften werden hier regelmäßig veröffentlicht. Besprechungen geeigneter Bücher bleiben vorbehalten. Eine Rücksendung der eingegangenen Schriften kann nicht erfolgen.]

M. l'Abbé, Issaly, Principes fondamentaux de la théorie des pseudosurfaces. A. Hermann, Paris 1902.

Annuaire de l'Université de Sophia. I. 1904—1905.

C. Block, Lehr- und Übungsbuch für den planimetrischen Unterricht an höheren Schulen. Zweiter Teil: Untertertia. B. G. Teubner, Leipzig 1906. M —,80.

W. Büchel, Über die durch gewöhnliche Differentialgleichungen definierten Kurven. Programm der Realschule in Eppendorf zu Hamburg, 1906.

L. Burgerstein, Schulhygiene. Mit einem Bildnisse und 33 Figuren im Text. B. G. Teubner, Leipzig 1906. M 1,—; geb. M 1,25.

image
not
available

Neumann, Franz, gesammelte Werke. In 3 Bänden. II. Band. Bei der Herausgabe dieses Bandes sind tätig gewesen die Herren: E. Dorn (Halle), O. E. Meyer (Breslau), C. Neumann (Leipzig), C. Pape (früher in Königsberg), L. Saalschütz (Königsberg), K. Von der Mühll (Basel) A. Wangerin (Halle), H. Weber (Straßburg). Mit einem Bildnis Franz Neumanns aus dem 86. Lebensjahre in Heliogravüre. [XVI u. 620 S.] gr. 4. 1906. geh. n. ℳ 36.—

Nielsen, Dr. Niels, Dozent der reinen Mathematik an der Universität Kopenhagen, Inspektor des mathematischen Unterrichts an den Gymnasien Dänemarks, Handbuch der Theorie der Gammafunktion. [X u. 326 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. ℳ 12.—

——— Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen. [XIV u. 408 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. geb. n. ℳ 14.—

Osgood, Dr. W. F., Professor an der Harvard-Universität, Cambridge, Mass., V. St. A., Lehrbuch der Funktionentheorie. In 2 Bänden. I. Band. 1. Hälfte Mit zahlreichen Figuren im Text [306 S.] gr. 8. 1906. geh. n. ℳ 7.—
[Die 2. Hälfte des I. Bandes wird im Herbst 1906 erscheinen.]

Pockels, Dr. F., Professor an der Universität Heidelberg, Lehrbuch der Kristalloptik. Mit 168 Figuren im Text und 6 Doppeltafeln. [X u. 519 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. ℳ 16.—

Poincaré, Henri, Membre de l'Institut, Wissenschaft und Hypothese. Autorisierte deutsche Ausgabe mit erläuternden Anmerkungen von F. und L. Lindemann. 2., verbesserte Auflage. [XVI u. 346 S.] 8. 1906. In Leinw. geb. n. ℳ 4.80.

——— der Wert der Wissenschaft. Mit Genehmigung des Verfassers ins Deutsche übertragen von E. Weber. Mit Anmerkungen und Zusätzen von H. Weber, Professor in Straßburg i. E., und einem Bildnis des Verfassers. [V u. 252 S.] 8. 1906. In Leinw. geb. n. ℳ 3.60.

Reformvorschläge für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Entworfen von der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte. Nebst einem allgemeinen Bericht über die bisherige Tätigkeit der Kommission von Professor A. Gutzmer in Halle a. S. [IV u. 48 S.] gr. 8. 1905. geh. n. ℳ 1.—

Rogel, Fr., Dozent am Technikum in Limbach i. S., das Rechnen mit Vorteil Eine gemeinfaßliche durch zahlreiche Beispiele erläuterte Darstellung empfehlenswerter Vorteile und abkürzender Verfahren. [IV u. 38 S.] gr. 8. 1905. geh. n. ℳ —.80.

Schüssler, Dr. Rudolf, Professor an der Technischen Hochschule zu Graz, orthogonale Axonometrie. Ein Lehrbuch zum Selbststudium. Mit 29 Figurentafeln in besonderem Hefte. [VIII u. 170 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. ℳ 7.—

Serret-Harnack, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. 3 Bände. gr. 8. [Von der 3. Aufl. an hat Prof. G. Scheffers in Darmstadt die Neubearbeitung übernommen.]

Einzeln:

I. Band: Differentialrechnung. 3. Aufl. besorgt von Dr. G. Scheffers, Professor an der Technischen Hochschule zu Darmstadt. Mit Figuren im Text. [ca. 600 S.] geh. ca. n. ℳ 10.—, in Leinw. geb. ca. n. ℳ 11.— [Erscheint im Sommer 1906.]

II. Band: Integralrechnung. 2. durchgesehene Auflage, mit Unterstützung von H. Liebmann und E. Zermelo, herausgegeben von Dr. G. Bohlmann, Professor in Berlin. [XII u. 428 S.] 1899. geh. n. ℳ 8.—, in Leinw. geb. n. ℳ 9.—

III. Band: Differentialgleichungen und Variationsrechnung. 2. durchgesehene Auflage von Dr. G. Bohlmann, Professor in Berlin, und E. Zermelo, Professor an der Universität Göttingen. Mit 33 Fig. im Text. [XII u. 480 S.] 1904. geh. n. ℳ 9.—, in Leinw. geb. n. ℳ 10.—

Simon, Dr. Max, Professor an der Universität Straßburg i. E., über die Entwicklung der Elementar-Geometrie im XIX. Jahrhundert. Bericht erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. A. u. d. T.: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Ergänzungsband I. Mit 28 Figuren im Text. [VIII u. 278 S.] gr. 8. 1906. geh. n. ℳ 8.—, in Leinw. geb. n. ℳ 9.—

——— Methodik der elementaren Arithmetik in Verbindung mit algebraischer Analysis. Mit 9 Textfiguren. [VI u. 108 S.] gr. 8. 1906. geb. n. ℳ 3.20.

p…
u. 29…

Hier…

JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN

MATHEMATIKER-VEREINIGUNG

IN MONATSHEFTEN HERAUSGEGEBEN VON

A. GUTZMER

IN HALLE A. S.

15. BAND. 6. HEFT. JUNI.

MIT DEM IN DEN TEXT GEDRUCKTEN BILDNIS VON OTTO STOLZ.

AUSGEGEBEN AM 30. JUNI 1906.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1906.

JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG.

IN MONATSHEFTEN HERAUSGEGEBEN VON A. GUTZMER IN HALLE A. S.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

☛ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Bücher usw.) sind an

Prof. Dr. A. Gutzmer in Halle a. S., Martinsberg 8,

zu richten.

☛ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich: von größeren Aufsätzen 25 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen und Mitteilungen 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☛ Jeder Band des Jahresberichts in Monatsheften umfaßt vom 12. Bande ab 38 Bogen (= 608 Druckseiten) und kostet für Mitglieder der Vereinigung, Porto inbegriffen, Mark 14.70, für Nichtmitglieder Mark 18.—. Mitglieder haben ihr Abonnement bei der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig, Poststraße 3, aufzugeben, Nichtmitglieder dagegen bei einer Sortimentsbuchhandlung.

☛ Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung zählt z. Zt. über 660 Mitglieder. Der jährliche Mitgliedsbeitrag beträgt 2 Mark, kann aber auch durch einmalige Zahlung von 30 Mark abgelöst werden. Beitrittserklärungen nimmt der Schriftführer der Vereinigung, Prof. Dr. A. Krazer, Karlsruhe in Baden, Westendstraße 57, oder die oben genannte Verlagsbuchhandlung entgegen. Die Ablösungssumme bezw. der Jahresbeitrag ist an die Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig einzusenden.

INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.

Über die Grundlagen der Geometrie.

Von G. Frege in Jena.

I.

Es kann mir nur erwünscht sein, mit Männern in lebendige Wechselwirkung zu treten, die ihr Nachdenken auf dieselben Fragen wie ich gerichtet haben. Und so ist mir der Aufsatz des Herrn Korselt Über die Grundlagen der Geometrie (diese Jahresberichte 12. Bd., S. 402) zunächst willkommen erschienen. Und ich habe auch die Freude gehabt, einige Berührungspunkte zu entdecken. Diese mögen zuerst hervorgehoben werden. Herr Korselt gebraucht meine Ausdrücke „Wahrheitswert“, „das Wahre“, „das Falsche“ und, wie es scheint, in meinem Sinne. Nur möchte ich bitten, statt „der Wahrheitswert von *a*“ zu sagen „der Wahrheitswert *a*“. Die Erklärung, die Herr Korselt von der Zeichenverbindung »*a* ⋹ *b*« gibt, stimmt fast mit meiner überein für das Entsprechende in meiner Begriffsschrift und ist besser als die von E. Schröder, der dies Zeichen wohl eingeführt hat, und als die des Herrn Peano für sein »Ɔ«.

Im übrigen freilich bin ich durch die Korseltsche Kritik enttäuscht worden. Sie bietet für eine Verständigung und förderliche Weiterbildung keine so günstige Grundlage, als ich gewünscht hatte.

Wenn Herr Korselt meine Bedenken gegen die Hilbertsche Darstellung als unberechtigt nachweisen wollte, mußte er meine Gegengründe sämtlich prüfen. Das hat er nicht getan. Und doch kann ein einziger unwiderlegbarer Einwand die ganze Theorie zu Falle bringen.

Die Lehrsätze des Herrn Hilbert handeln von den Axiomen, deren Unabhängigkeit und Widerspruchsfreiheit. Es ist also geboten, über den Sinn des Wortes „Axiom“ keinen Zweifel zu lassen. Und deshalb ist es ein Fehler der Hilbertschen Schrift, daß sie diesen ihren Grundbegriff ganz im Nebel läßt. Ich habe mich bemüht, scharfe Grenzlinien zu ziehen; Herr Korselt scheint sie geflissentlich wieder zu verwischen. Wie ist das zu erklären? Vielleicht durch einen Selbsterhaltungstrieb der Hilbertschen Lehre, zu deren Lebensbe-

dingungen eine Trübung gehören mag. Ist dies richtig, so muß freilich ein Retter dieser Lehre die Klärung zu verhindern suchen. Ich glaube nicht, daß Herr Korselt dies mit Absicht getan habe; aber er hat mir durch sein Verfahren die Beantwortung seines Aufsatzes außerordentlich erschwert. Herr Hilbert setzt sich mit meinen Gründen, so weit mir bekannt ist, überhaupt nicht auseinander. Vielleicht ist auch in ihm eine geheime, von tiefer Dämmerung umgebene Furcht wirksam, durch näheres Eingehen auf meine Gründe könnte sein Bau gefährdet werden. Auf der Oberfläche freilich wird wohl die Meinung schwimmen, daß meine Gründe einer genauern Betrachtung überhaupt unwürdig seien. Sollte Herr Hilbert einmal dazu kommen, mit dem Lichte seines Bewußtseins die tieferen Untergründe zu beleuchten, so wird er vielleicht der Erwägung Raum geben, daß das Falsche in seiner Lehre auf die Dauer doch nicht zu halten sein wird, daß es aber nützlich und ehrenvoll ist, dieses abzustoßen, damit das Wahre und Wertvolle desto klarer und unanfechtbarer hervortrete.

Es war meiner Meinung nach die Aufgabe eines Kritikers, zu meinen Ausgangssätzen Stellung zu nehmen. Damit wäre gleich die Frage an der Wurzel gefaßt und alles Folgende in scharfe Beleuchtung gerückt worden. Ich habe es in meinem ersten Aufsatze über diesen Gegenstand für nötig gehalten, mich weitläufig über Axiom und Definition auszusprechen, weil mir durch Herrn Hilberts Festschrift eine große Verwirrung zu drohen schien. Mit diesen meinen Ausführungen hätte sich Herr Korselt zunächst auseinander setzen müssen; denn hiervon gehe ich aus, und hiermit hängt alles Folgende eng zusammen. Ich habe die Definitionen, die etwas festsetzen, den Grundsätzen und Lehrsätzen gegenüber gestellt, die etwas behaupten. Jene enthalten ein Zeichen (Wort, Ausdruck), das erst durch sie eine Bedeutung bekommen soll; diese enthalten kein solches Zeiches. Erkennt Herr Korselt den wesentlichen Unterschied zwischen beiden Arten von Sätzen nicht an? Warum nicht? Er spricht weiter von Axiomen, die etwas definieren, als ob das gar keine Schwierigkeit hätte. Was soll denn eigentlich ein Axiom? Soll es etwas behaupten, oder soll es etwas festsetzen? Wozu hat man zwei Wörter „Axiom“ und „Definition“, wenn auch die Axiome definieren sollen? Nur der größeren Dunkelheit wegen?

Auch bei Herrn Hilbert definieren die Axiome in der zweiten Auflage lustig weiter, als ob nichts geschehen wäre. Offenbar weiß Herr Hilbert selber nicht, was er mit dem Worte „Axiom“ meint, und damit wird es auch zweifelhaft, ob er wisse, welche Gedanken er mit seinen Sätzen verbinde, und noch zweifelhafter, ob Herr Korselt es wisse. Oder halten vielleicht beide Herrn einen Gedankeninhalt der

Sätze für entbehrlich? Worte! Worte! Worte! Ich habe auf eine Verwirrung des Sprachgebrauchs in der Hilbertschen Festschrift hinsichtlich des Wortes „Axiom“ hingewiesen. Erkennt Herr Korselt diese Zwiespältigkeit an, oder glaubt er sie ausgleichen zu können? Darüber hätte er sich gleich zuerst deutlich aussprechen müssen.

Im Anfange meines zweiten Aufsatzes mache ich darauf aufmerksam, daß die Erklärungen und Definitionen des Herrn Hilbert zweierlei Art zu sein scheinen. Als Beispiele der ersten Art führe ich die Erklärungen dafür an, daß Punkte einer Geraden auf derselben Seite eines Punktes liegen und daß Punkte einer Geraden auf verschiedenen Seiten eines Punktes liegen. Zu dieser Art gehört auch die Gaußsche Definition der Zahlenkongruenz. Als Beispiel einer Erklärung der andern Art führe ich die des Wortes „zwischen“ an. Nach dem Muster dieser bilde ich eine andere Definition der Zahlenkongruenz. Wenn nun Herr Korselt in förderlicher Weise streiten wollte, so mußte er hierzu Stellung nehmen. Erkennt er an, daß die Erklärungen und Definitionen des Herrn Hilbert zweierlei Art sind? Wodurch ist es gerechtfertigt, daß für beide dasselbe Wort„ Definition“ oder „Erklärung“ gewählt ist? Oder ist es nur der größern Dunkelheit halber geschehen? Sieht Herr Korselt den ungeheuren Unterschied zwischen der Gaußschen Definition der Zahlenkongruenz und derjenigen, die ich nach Hilbertschen Mustern gebildet habe? Dies mußte festgestellt werden; sonst fehlt der feste Boden für eine fruchtbare Wechselwirkung.

Ich glaube mit meinen Ausführungen über den Gebrauch der Wörter „Axiom“ und „Definition“ mich im Gleise des Althergebrachten zu bewegen und mit Recht verlangen zu können, daß man nicht durch einen ganz neuen Gebrauch Verwirrung stifte. Ich lasse mich aber selbst herbei, auf einen ganz neuen Gebrauch dieser Wörter einzugehen; nur muß ich verlangen, daß er einheitlich sei und vor dem Eingehen auf Einzelfragen verständlich und eindeutig dargelegt werde. Dies vermisse ich in den Ausführungen des Herrn Korselt.

Dennoch erkenne ich seiner Abhandlung einen Wert zu, der es rätlich erscheinen läßt, auf ihren Inhalt näher einzugehen. Herr Korselt scheint mir nämlich Herrn Hilberts Lehre eine besondere Wendung geben zu wollen, indem er sie als formale Theorie, als reinen Lehrbegriff faßt. Ob diese Ausprägung ganz im Sinne des Herrn Hilbert ist, mag dahingestellt bleiben; immerhin spricht vieles dafür.

Indem ich mich nun einer genaueren Prüfung der Korseltschen Abhandlung zuwende, stelle ich zunächst zusammen, was sich in ihr zerstreut über Axiom, Definition und Bedeutung vorfindet.

Wir lesen da den Satz:

„Nennt man Axiom einen wahren, aber logisch nicht beweisbaren Gedanken, so sind „Definitionen“ (Nominaldefinitionen, Namengebungen) keine Axiome.“

Was Herr Korselt hier im Bedingungssatze als Bedeutung des Wortes „Axiom“ angibt, kann man wohl die althergebrachte, die Euklidische Bedeutung nennen. Durch die Unbeweisbarkeit unterscheiden sich die Axiome von den Theoremen. Die Gründe, die Herr Korselt für seine Behauptung angibt, nähern sich den von mir angegebenen und zeigen, daß auch umgekehrt kein Axiom etwas definieren kann. Wenn das Wort „Axiom“ in diesem Sinne genommen wird, darf der Ausdruck eines solchen kein unbekanntes Zeichen enthalten, weil er sonst überhaupt keinen Gedanken ausdrückte. Buchstaben, die dazu dienen sollen, dem Grundsatze Allgemeinheit des Inhalts zu verleihen, dürfen gewiß darin vorkommen, weil es bekannt ist, wie sie zum Gedankenausdrucke beitragen, obwohl sie nichts bezeichnen. Hiermit beantwortet sich die Korseltsche Frage „Warum sollen die Axiome keine Zeichen enthalten, deren Bedeutung nicht vorher feststeht?“

Es scheint zunächst, daß Herr Korselt diese Euklidische Bedeutung annehme, und er verwirft sie auch nirgends ausdrücklich; aber fast alle seine spätern Aussagen stehen hiermit im Widerspruche. So erkennt er z. B. die Möglichkeit von ungültigen Axiomen an. Wenn er klar schreiben wollte, mußte er etwa sagen: „Diesen althergebrachten Sinn des Wortes 'Axiom' nehme ich jedoch nicht an, sondern gebrauche dies Wort in folgendem Sinne“. Und nun mußte er diesen möglichst verständlich darlegen.

Herr Korselt nimmt im Widerspruch mit der Euklidischen Bedeutung an, daß Axiome bis dahin unbekannte Zeichen enthalten und einen Begriff definieren oder bestimmen. Die von ihm selbst anfangs hervorgehobene Grundverschiedenheit der Axiome von den Definitionen macht es ja unmöglich, daß Axiome etwas definieren. Man muß sich darüber klar sein: soll ein Grundsatz etwas festsetzen, oder soll er einen Gedanken ausdrücken und als wahr behaupten? und an dem, wofür man sich entschieden hat, muß man dann auch festhalten und nicht immer zwischen verschiedenen Auffassungen hin- und hertaumeln.

Nun hat Herr Korselt noch den unglücklichen Gedanken, die Heinesche formale Theorie der Arithmetik mit der Hilbertschen Lehre zu vermengen und ein Axiom als eine Regel aufzufassen für den Gebrauch darin vorkommender Zeichen. Das ist eine dritte Auffassung der Axiome.

Indem Herr Korselt sagt, die moderne[1]) Mathematik bezeichne mit ihren Axiomen nicht mehr bestimmte Erfahrungstatsachen, sondern deute sie höchstens an, bringt er die Axiome der modernen Mathematik in Gegensatz zu denen der Euklidischen, und man kann wohl annehmen, daß er sich selbst zu den modernen Mathematikern rechnet. Offenbar rechnet er auch Herrn Hilbert dazu und glaubt in diesem Satze dessen Gebrauchsweise des Wortes „Axiom" getroffen zu haben. Wenn dies richtig ist, so ist es ein grober Irrturm zu meinen, daß Herr Hilbert irgend etwas über Abhängigkeit oder Unabhängigkeit der Euklidischen Axiome ausgemacht habe, und daß, wenn er vom Parallelenaxiome spricht, dies das Euklidische Axiom sei. Wir müssen hiernach unter einem Axiome wohl etwas verstehen, was wie ein Satz aussieht, der einen Gedanken ausdrücken soll, in Wahrheit aber kein eigentlicher Satz ist, weil er einen Gedanken nicht ausdrückt, sondern nur andeutet, wie etwa der Buchstabe »*a*« in der Arithmetik kein Zahlzeichen ist, weil er keine Zahl bezeichnet, sondern eine solche nur andeutet. Dies ist eine vierte Auffassung der Axiome; es ist noch nicht die letzte; denn die Axiome beschreiben nach Herr Korselt auch die Art, wie sich Erfahrungsgegenstände verbinden lassen. Wie sich nun diese Auffassungen miteinander in Einklang bringen lassen, in welchen Beziehungen sie etwa zueinander stehen, darüber schwebt geheimnisvolles Dunkel. Und nun erwäge man, daß auf das Verständnis des Wortes „Axiom" alles ankommt, wenn man die Hilbertsche Sätze über die Unabhängigkeit der Axiome voneinander verstehen will. Klarheit! Klarheit! Klarkeit! Meint Herr Korselt, daß es ein Vergnügen sei, sich von ihm durch diese verworrenen Dickichte führen zu lassen?

Mit einem Gleichnisse kann man die Sachlage wohl so kennzeichnen. Herr Hilbert hackt Definition und Axiom beide ganz fein, mengt sie sorgfältig durcheinander und macht eine Wurst daraus. Herrn Korselt genügt diese Mischung nicht; er hackt auch noch die Thomaeschen Regeln über den Gebrauch der Zeichen klein, gibt eine Messerspitze meines Andeutens dazu und fügt aus eignen Mitteln die Beschreibung der Art hinzu, wie sich Erfahrungsgegenstände verbinden lassen, mengt alles gut durcheinander und macht eine Wurst daraus. An Mannigfaltigkeit der Zutaten fehlt es wenigstens nicht, und ich zweifele nicht, daß für den Liebhaber etwas Gutes herauskommt.

Nehmen wir ein Beispiel!

„Jedes Anej bazet wenigstens zwei Ellah".

---

1) Sind wir denn noch immer nicht aus dieser gräßlichen modernen Zeit heraus?

„Wie kann jemand solchen haarsträubenden Unsinn schreiben! Was ist ein Anej? Was ist ein Ellah?“ So höre ich mit Entrüstung fragen. Bitte sehr! Das ist ein Axiom, nicht von der alten Euklidischen, sondern von der modernen Art. Es definiert den Begriff Anej. Was ein Anej sei, ist eine ganz ungehörige Frage. Erst wäre zu erörtern, unter welchen Umständen eine Antwort genügen würde. Wenn man keinen Gedanken in diesem Axiome findet, so schadet das nichts. Der Satz will gar keine Beschreibung bekannter Tatsachen sein, er deutet solche höchstens an, und zwar sehr fein, z. B. die bekannte Erfahrungstatsache, daß jede Wurst wenigstens zwei Enden hat, oder daß jedes Kind wenigstens zwei Fähnchen schwang. Dies ist offenbar die Beschreibung einer Art, wie die Erfahrungsgegenstände — die Fähnchen — sich miteinander verbinden lassen. Das Anwendungsgebiet dieses Axioms reicht genau so weit, als ihm Erfahrungsgegenstände zugewiesen werden können.

Herr Korselt bespricht das Wort „Bedeutung“, indem er meinen Satz angreift, daß axiomatische Sätze keinen Eigennamen, kein Begriffswort, kein Beziehungswort enthalten dürfen, dessen Bedeutung nicht vorher feststände. Hierbei gebrauche ich das Wort „Axiom“ im alten Euklidischen Sinne, Herr Korselt dagegen in einem modernen. Folglich liegt hierbei zwischen uns gar kein Widerstreit vor, indem das was Herr Korselt verneint, ganz verschieden ist von dem, was ich behaupte. Aber hierbei tritt aufs neue eine Abweichung hervor. Ich hatte mir die Sache viel einfacher gedacht, nämlich so: ein Eigenname hat im wissenschaftlichen Gebrauche den Zweck, einen Gegenstand zu bezeichnen, und dieser Gegenstand ist, falls der Zweck erreicht wird, die Bedeutung des Eigennamens. Entsprechend ist es bei den Begriffszeichen, den Beziehungszeichen, den Funktionszeichen. Sie bezeichnen beziehungsweise Begriffe, Beziehungen, Funktionen, und das, was sie bezeichnen, ist dann ihre Bedeutung. Indessen so einfach ist die Sache nach Herrn Korselt nicht. Nach ihm bedeutet die Aussage, daß die Bedeutung eines Zeichens feststehe, entweder: daß man dies Zeichen vorkommendenfalls als dasselbe Zeichen für denselben Gegenstand wiedererkennt, oder daß man alle oder doch gewisse einfache das Zeichen benutzende Sätze immer als wahre, falsche oder als Definition wiedererkennt. Fragen wir, ob hiernach die Bedeutung des Wortes „Anej“ feststehe. Zur Zeit ist nur ein dieses Wort benutzender Satz bekannt, nämlich das oben angeführte Axiom. Ist dieses nun wahr, falsch oder Definition? Wahr? das will nicht recht scheinen; Falsch? ebensowenig; aber Definition! das stimmt: es ist ein definierendes Axiom, und wir dürfen uns wohl zutrauen, daß wir es als solches immer wiedererkennen werden. also steht die Bedeutung des Wortes „Anej“ fest.

Nach Herrn Korselt haben für einen reinen Lehrbegriff die Wörter „Grundsatz“ „Axiom“ „Definition“ dieselbe Bedeutung, nämlich von unmittelbaren Gegenständen (Sätzen), und ihnen stehen die mittelbaren Gegenstände (Sätze) gegenüber. Hieraus erhellt die nahe Verwandtschaft, die zwischen Axiomen nnd Definitionen nach seinem Sprachgebrauche besteht. Ein Unterschied ist nicht angegeben; wahrscheinlich bestehen wie bei Herrn Hilbert die Definitionen aus Axiomen, womit nicht ausgeschlossen ist, daß eine Definition nur ein einziges Axiom enthalten kann.

Welche Beschaffenheit ein Satz haben müsse, um ein Axiom, eine Definition, eine Regel über den Gebrauch von Zeichen zu sein, darüber erfahren wir wenig, eigentlich weiter nichts, als daß er unbekannte Zeichen enthalten müsse. Freilich findet sich noch der rätselhafte Ausspruch:

„Diejenigen Deutungen der Zeichen eines reinen Lehrbegriffes, welche Aussagen sind, dürfen nicht auf Widersprüche mit anerkannten Sätzen führen. Sonst hat man im günstigsten Falle nicht die gewünschten, sondern andere Begriffe definiert“.

Hierin ist mir eigentlich alles unverständlich. Zuerst scheinen die Deutungen dadurch beschränkt werden zu sollen; zuletzt sieht es wie eine Regel für das Definieren aus. Ich sehe nicht ein, wie der Umstand, daß der definierte Begriff ein gewünschter ist, vor einem Widerspruch bewahren kann, der hervorträte, wenn der Begriff nicht gewünscht wäre. Auch das Beispiel klärt die Sache für mich nicht auf. Was ist da die Definition? Wo ist der gewünschte Begriff? Welche Deutung haben wir? Mit welchen anerkannten Sätzen findet ein Widerspruch statt? Kann man ihn nicht durch eine andere Deutung vermeiden? Liegt der Fehler in der Deutung, oder in der Definition?

Beim Definieren findet Herr Korselt eine Schwierigkeit. Die Antwort auf die Frage, was etwas sei, sagt Herr Korselt, müsse immer in Worten gegeben werden, nach deren Bedeutung wieder gefragt werden könne, und so wäre des Fragens kein Ende. Und ähnlich sagt er weiterhin: „Von irgendwelchen einfachen nicht mehr zerlegbaren Begriffen muß doch die Untersuchung ausgehen.“ Nun gut! aber was soll damit bewiesen werden? Es zeigt doch zunächst nur, daß es unvernünftig ist, alles definieren zu wollen; aber fast sieht es so aus, als ob damit der Frage nach der Bedeutung überbaupt die Berechtigung abgesprochen und das Definieren oder doch eine gewisse Art des Definierens als wertlos hingestellt werden solle. Daß nur eine besondere Art des Definierens dadurch getroffen werde, kann nicht zugegeben werden: denn welcher Art eine Definition auch sei, sie wird immer gewisse Wörter oder

Zeichen als bekannt voraussetzen müssen. Zunächst kann man denken, Herr Korselt wolle bei den einfachen, nicht weiter zerlegbaren Begriffen Halt machen mit Definieren, weil sonst des Definierens kein Ende wäre; aber er fährt fort:

„Die zugrunde gelegten einfachen Begriffe können nur durch Sätze bestimmt werden, in denen ein solcher Begriff mehrmals oder mehrere solcher Begriffe gleichzeitig auftreten."

Also die einfachen Begriffe sollen auch bestimmt werden; und ist dies keine Definition? Ist des Definierens dann ein Ende? Später kommt freilich heraus, daß solche Sätze die Begriffe nicht bestimmen: „Die Forderung an eine formale Theorie, daß sie ihren nach Art von Eigennamen oder Begriffsnamen gebildeten »Figuren« (Namen), z. B. „Punkt", eine bestimmte Bedeutung gebe, ist unzweckmäßig und unbillig."

Herr Korselt sagt:

„Das obige Beispiel des Euklidischen Punktes zeigt, daß man nicht mit Herrn Frege die Auflösbarkeit jedes Systems von Grundsätzen nach den in ihnen vorkommenden Unbekannten (Grundbegriffen) fordern darf, vollends nicht die eindeutige Auflösung; das liefe auf unbeschränktes Definieren hinaus".

Die Gefahr ins Unendliche weiter definieren zu müssen, tritt nur dann und immer dann ein, wenn man verlangt, daß alles definiert werden müsse; aber wer zwingt dazu? Dagegen hat diese Gefahr mit der Forderung der eindeutigen Auflösbarkeit eines Systems von Grundsätzen nichts zu tun. Diese meine Forderung gilt nur für den Fall, daß dieses System eine Definition sein soll, durch die gewisse Begriffe oder Beziehungen bestimmt werden sollen. Ohne die eindeutige Auflösbarkeit haben wir eben keine Bestimmung. Wenn meine aus der Natur der Sache fließende Forderung nicht erfüllbar ist, so folgt daraus nicht, daß man sie fallen lassen müsse, sondern daß in dieser Weise die Begriffe und Beziehungen nicht bestimmt werden können, daß also die sogenannten Definitionen des Herrn Hilbert, die von dieser Art sind, den Anforderungen nicht genügen, die man an Definitionen stellen muß. Wenn Herr Korselt nachweist, daß bei der Definition des Punktes die Anforderungen nicht erfüllt werden können, denen eine Definition genügen muß — ich will mich auf die Prüfung dieses Nachweises nicht einlassen —, so folgt daraus, daß man die Definition unterlassen solle, nicht aber daß man irgend etwas Beliebiges tun solle und dies Definition des Punktes nennen könne. Wenn nachgewiesen ist, daß der Sprung über einen gegebenen Graben unmöglich ist, so folgt daraus, daß man ihn lieber gar nicht versuchen solle, nicht aber, daß man hinken solle und dies Hinken

einen Sprung über den Graben nennen möge. Wer willkürlich von dem hergebrachten Sinne eines Wortes abweicht und nicht angibt, in welchem Sinne er es gebrauchen wolle, wer plötzlich anfängt, das rot zu nennen, was sonst grün genannt wird, der wundere sich nicht, daß er Verwirrung anrichtet. Und solches ist, wenn es absichtlich in der Wissenschaft geschieht, eine Versündigung an der Wissenschaft.

Was ist denn eigentlich der Zweck und das Wesen des Hilbertschen Definierens? Und welchen Gesetzen ist es unterworfen? Denn daß jedes System von Sätzen, die gewisse unbekannte Wörter wie „Anej" „bazen" enthalten, eine Erklärung dieser Wörter sei, glaubt doch Herr Korselt selber nicht. Wir sind darüber einverstanden, daß eine Erklärung oder Definition im allgemeinen nicht auf eine Wahrnehmung, ein Modell hinzuweisen braucht; aber wir müssen uns nicht nur darüber verständigen, was eine Erklärung nicht zu leisten braucht, sondern hauptsächlich darüber, was wir von ihr verlangen müssen.

Meine Meinung ist diese. Wir müssen logische Urelemente anerkennen, die nicht definierbar sind. Auch hierbei stellt sich das Bedürfnis ein, sicher zu stellen, daß man mit demselben Zeichen (Worte) dasselbe bezeichnet. Wenn sich die Forscher über diese Urelemente und ihre Bezeichnungen verständigt haben, ist das Einverständnis über das logisch Zusammengesetzte durch Definition leicht erreichbar. Da bei den Urelementen diese nicht möglich sind, muß hier etwas anderes eintreten; ich nenne es Erläuterung. Diese dient also den Zwecken der Verständigung der Forscher untereinander und der Mitteilung der Wissenschaft. Man kann sie einer Propädeutik zuweisen. Im System der Wissenschaft hat sie keine Stelle; in diesem wird kein Schluß auf sie gegründet. Jemand, der nur für sich forschte, brauchte sie nicht. Der Zweck der Erläuterungen ist ein praktischer, und wenn dieser erreicht ist, muß man mit ihnen zufrieden sein. Dabei muß auf etwas guten Willen, auf entgegenkommendes Verständnis, auf Erraten gerechnet werden können; denn ohne eine Bildlichkeit des Ausdrucks wird oft nicht auszukommen sein. Aber von dem Urheber einer Erläuterung kann man immerhin verlangen, daß er selbst bestimmt wisse, was er meine, daß er mit sich selbst im Einklange bleibe und daß er, wenn sich die Möglichkeit eines Mißverstehens auch bei gutem Willen ergibt, bereit sei, seine Erläuterung zu vervollständigen und zu verbessern.

Da ohne gegenseitiges Verständnis der Forscher ein Zusammenarbeiten an der Wissenschaft nicht möglich ist, muß man das Vertrauen haben, daß ein solches Verständnis durch Erläuterungen erreicht werden kann, obwohl theoretisch das Gegenteil nicht ausgeschlossen ist.

Sind nun die Hilbertschen Definitionen Erläuterungen? Solche werden im allgemeinen Sätze sein, die den fraglichen Ausdruck, vielleicht auch mehrere solche, enthalten, und stimmen hierin überein mit dem, was Herr Korselt mit den Worten angibt: „Die zugrunde gelegten einfachen Begriffe können nur durch Sätze bestimmt werden, in denen ein solcher Begriff mehrmals oder mehrere solche Begriffe gleichzeitig auftreten.“ Wenn die Hilbertschen Definitionen nur der Verständigung der Forscher und der Mitteilung der Wissenschaft dienen wollten, nicht ihrem Aufbaue, so würden wir sie als Erläuterungen in dem oben angegebenen Sinne betrachten und ihnen alle die Nachsicht bewilligen können, auf die sie als solche Anspruch machen können. Aber sie wollen mehr. Sie wollen nicht der Propädeutik angehören, sondern als Grundsteine der Wissenschaft, als Prämissen von Schlüssen dienen. Und bei diesen Ansprüchen kann ihnen die Milde der Beurteilung nicht gewährt werden, die sie als Erläuterungen verlangen könnten. Übrigens verfehlen sie auch als Erläuterungen ihren Zweck, nämlich sicher zu stellen, daß alle, die sich ihrer bedienen, nun auch mit den erläuterten Wörtern denselben Sinn verbinden. Man läßt sich leicht dadurch täuschen, daß die Wörter „Punkt“, „Gerade“ usw. schon seit langer Zeit im Gebrauche sind. Man denke sich aber einmal statt dieser ganz neue, eigens zu diesem Zwecke erfundene Wörter gesetzt, mit denen noch kein Sinn verbunden ist, und frage sich nun: würde jemand die Hilbertschen Axiome und Definitionen in dieser Form verstehen? Es käme dabei auf bloßes Raten hinaus. Einige würden vielleicht gar nichts raten können, einige dies raten, andere das.

Wenden wir uns den eigentlichen Definitionen zu! Auch sie dienen der gegenseitigen Verständigung, aber sie erreichen diese in viel vollkommenerer Weise als die Erläuterungen, indem sie nichts dem Erraten überlassen,, auf entgegenkommendes Verständnis, auf guten Willen nicht zu rechnen brauchen. Sie setzen natürlich die Kenntnis gewisser Urelemente und ihrer Zeichen voraus. Aus solchen Zeichen setzt die Definition eine Gruppe von Zeichen rechtmäßig zusammen, sodaß die Bedeutung dieser Gruppe durch die Bedeutungen der benutzten Zeichen bestimmt ist. Rein theoretisch angesehen könnte dies genügen; aber solche Zeichengruppen werden oft zu unhandlich, zu zeitraubend auszusprechen oder hinzuschreiben. Man bedarf für sie eines einfachen Zeichens. Und dieses neue Zeichen dem durch die bekannten Zeichen bestimmten Inhalte beizulegen, ist die Aufgabe der Definition. Nun kann es vorkommen, daß dies Zeichen (Wort) nicht durchaus neu ist, sondern in der Sprache des Lebens oder einer der eigentlich systematischen vorhergehenden wissenschaftlichen Behandlung schon

gebraucht worden ist. In der Regel ist dieser Sprachgebrauch für die strenge Wissenschaft zu schwankend. Aber nehmen wir einmal an, er genüge in einem gegebenen Falle den strengsten Anforderungen, so könnte man denken, daß dann eine Definition unnötig wäre. Und wenn die Definition gleich der Erläuterung nur der gegenseitigen Verständigung und der Mitteilung der Wissenschaft dienen sollte, so wäre sie in diesem Falle in der Tat überflüssig; aber jenes ist nur ein beiläufig gewonnener Vorteil. Die eigentliche Bedeutsamkeit der Definition liegt in dem logischen Aufbau aus den Urelementen. Und deshalb würde man auf sie auch in einem solchen Falle nicht verzichten. Die Einsicht in den logischen Bau, die sie gewährt, ist nicht nur an sich wertvoll, sondern auch Bedingung für die Einsicht in die logische Verkettung der Wahrheiten. Die Definition ist ein Bestandteil des Systems der Wissenschaft. Sobald die in ihr getroffene Festsetzung angenommen ist, wird das erklärte Zeichen ein bekanntes, und geht der erklärende Satz in einen behauptenden über. Die in diesem enthaltene selbstverständliche Wahrheit wird nun im System als Prämisse von Schlüssen auftreten.

Die geistigen Tätigkeiten, die zur Aufstellung einer Definition führen, können doppelter Art sein; zerlegend oder aufbauend, ähnlich der Tätigkeit des Chemikers, der entweder einen gegebenen Stoff in seine Elemente zerlegt, oder gegebene Elemente sich zu einem neuen Stoffe verbinden läßt. In beiden Fällen erfährt man die Zusammensetzung eines Stoffes. So kann man auch hier durch logischen Aufbau etwas Neues gewinnen und für dieses ein Zeichen festsetzen.

Aber die geistige Arbeit, die der Aufstellung einer Definition vorhergeht, erscheint nicht im systematischen Aufbau der Mathematik, sondern nur ihr Ergebnis: die Definition. Und so ist es für das System der Mathematik auch einerlei, ob diese vorausgehende Tätigkeit zerlegender oder aufbauender Art war, ob das zu Definierende schon vorher irgendwie gegeben war, oder ob es neu gewonnen wurde. Denn im System erscheint kein Zeichen (Wort) vor der Definition, die es einführt. So ist für das System jede Definition eine Namengebung, einerlei auf welchem Wege man zu ihr gelangt ist.

Es ist selbstverständlich, daß dasjenige, dem ein Name (Zeichen) gegeben wird, durch die Definition bestimmt sein muß. Ein Wort ohne bestimmte Bedeutung hat für die Mathematik keine Bedeutung.

Ich habe nun in meinem zweiten Aufsatze gezeigt, daß die Definitionen des Herrn Hilbert ihr Ziel größtenteils verfehlen, wenn man wenigstens annimmt, daß sie den Wörtern „Punkt“, „Gerade“, „zwischen“

Bedeutungen zuweisen sollen. Herr Korselt ist im Grunde meiner Meinung; denn er sagt:

„Die Zeichen einer formalen Theorie haben überhaupt keine Bedeutung“.

Nun hält er offenbar die Hilbertsche Theorie für eine formale. Also kann es in ihr keine Erklärungen der Zeichen geben, durch die diesen Zeichen Bedeutungen gegeben würden. Wenn es demnach, wie ich sage, keinen Begriff gibt, der durch die Hilbertsche Definition dem Worte „Punkt“ als Bedeutung gegeben wird, so ist das ganz im Einklange damit, daß dem Worte „Punkt“ nach Herrn Korselt in einer formalen Theorie überhaupt keine Bedeutung zukommt und nach dem Wesen einer formalen Theorie auch nicht zukommen kann. Im Einklange hiermit sagt Herr Korselt:

„Die Forderung an eine formale Theorie, daß sie ihren nach Art von Eigennamen oder Begriffsnamen gebildeten »Figuren« (Namen), z. B. »Punkt«, eine bestimmte Bedeutung gebe, ist unzweckmäßig und unbillig“.

Hiermit scheint etwas weniger gesagt zu sein, als in der vorhin erwähnten Stelle; in Wahrheit aber ist es dasselbe; denn ein Zeichen ohne bestimmte Bedeutung ist ein Zeichen ohne Bedeutung. Also vollkommenes Einverständnis! Warum streitet Herr Korselt denn aber gegen mich, z. B. gegen mein Taschenuhrbeispiel? Wenn das Wort „Punkt“ bei Herrn Hilbert keinen Begriff bezeichnet, ist es selbstverständlich, daß die Frage, ob meine Taschenuhr ein Punkt sei, nicht beantwortbar ist. Herr Korselt hätte einfach darauf hinweisen können, daß es im Sinne der formalen Theorie auch garnicht der Zweck des Wortes „Punkt“ sei, etwas zu bedeuten. Dann hätte er freilich sagen müssen, was denn eigentlich der Zweck der Hilbertschen Erklärungen und Definitionen sei, da es der, dem Zeichen eine Bedeutung zu geben, nicht sein kann. Daß die Hilbertschen Pseudodefinitionen den scheinbar erklärten Wörtern „Punkt“, „Gerade“, „zwischen“ usw. keine Bedeutungen geben, dies kann nun wohl als endgültig festgestellt gelten, und damit ist wenigstens eins der von mir verfolgten Ziele erreicht. Indem er mir in diesem Endergebnis zustimmt, scheint Herr Korselt gegen den Weg, auf dem ich es erreicht habe, Einwendungen zu machen. Dies mag belanglos scheinen; dennoch wird es nicht überflüssig sein, dies näher zu beleuchten.

Ich verlange von einer Definition des Punktes, daß danach müsse beurteilt werden können, ob ein beliebiger Gegenstand, z. B. meine Taschenuhr, ein Punkt sei. Herr Korselt mißversteht das nun so, als ob ich verlangte, die Frage müsse aus der Definition allein ohne

Hilfe von Wahrnehmungen beantwortet werden, und behauptet, daß dies nicht möglich sei. Ganz recht! Ob ein gegebener Stein ein Diamant sei, kann durch die bloße Erklärung des Wortes „Diamant" nicht beantwortet werden. Aber man kann von der Erklärung verlangen, daß sie objektiv die Frage entscheide, sodaß jeder, der den vorgelegten Stein genau kennt, danach bestimmen könne, ob er ein Diamant sei. Wenn es also nur an unserer unvollkommenen Kenntnis des Gegenstandes liegt, daß wir die Frage nicht beantworten können, so hat die Erklärung keine Schuld. Wenn aber bei noch so vollkommener Kenntnis die Frage unbeantwortet bleiben muß, ist die Erklärung fehlerhaft, und das ist unser Fall. Dieselbe Schwierigkeit, die bei der Frage entsteht, ob meine Taschenuhr ein Punkt sei, erhebt sich bei jedem Gegenstande, mag dieser nun sinnlich wahrnehmbar sein, oder nicht. Nehmen wir z. B. die Zahl 2 oder selbst einen Euklidischen Punkt, wir stoßen immer auf dasselbe Hindernis, daß wir nämlich schon von einem andern Gegenstande wissen müßten, daß er ein Punkt sei, ehe wir auch nur beurteilen könnten, ob die Aussage des ersten Hilbertschen Axioms zuträfe. Und über dies Hindernis hilft keine noch so vollkommene Kenntnis des vorgelegten Gegenstandes hinweg. Wenn ich demnach auch mit Herrn Korselt darin übereinstimme, daß die bloße Definition zur Beantwortung der Frage nicht genügt, ob ein Gegenstand unter den definierten Begriff falle, sondern daß dazu noch eine irgendwoher gewonnene genügende Kenntnis des Gegenstandes gehört, so muß ich andrerseits betonen, daß die vollkommene Kenntnis des Gegenstandes mit der Definition zusammen dazu genügen muß. In unserm Falle nützt die Reparatur der Uhr nichts; denn der Fehler liegt nicht in ihr, sondern in der Hilbertschen Definition, die dem grammatischen Prädikate „ist ein Punkt" weder einen Sinn, noch eine Bedeutung verleiht, sodaß jeder Satz sinnlos ist, der dies Prädikat hat, einerlei was das Subjekt ist.

Ebenso liegt die Sache beim zahlentheoretischen Beispiele. Die Gaußische Definition der Zahlenkongruenz erfüllt ihren Zweck, weil sie die Bedeutung des Wortes „kongruent" auf die bekannten Bedeutungen der Ausdrücke „Differenz" und „eine Zahl geht in einer Zahl auf" zurückführt, sie aus bekannten Bausteinen logisch aufbaut. Was ich nun an der Hilbertschen Erklärung des Wortes „zwischen" z. B. vermisse, ist keineswegs der Hinweis auf ein Modell, eine Wahrnehmung, sondern der logische Aufbau. „Eine Zurückführung auf Bekanntes ist hier nicht möglich" höre ich antworten. Nun, dann ist eine Definition nicht möglich. Man wird hier dann ein Urelement anerkennen und sich mit einer Erläuterung begnügen müssen, die aber

im System nicht erscheinen darf, sondern ihm vorhergehen muß. Im System wird man dann das Wort „zwischen" einfach als bekannt voraussetzen müssen, wie man denn überhaupt um die Notwendigkeit nicht herumkommt, Wörter als bekannt vorauszusetzen.

Wenn eine Beziehung richtig definiert ist, so muß diese Definition zusammen mit hinlänglicher Kenntnis gegebener Gegenstände genügen zu entscheiden, ob diese Gegenstände in der definierten Beziehung zueinander stehen. Diese Kenntnis spricht sich natürlich in Sätzen aus, welche die Bekanntschaft mit dem fraglichen Beziehungszeichen nicht voraussetzen, also weder es selbst noch einen Ausdruck enthalten, der mit ihm zu erklären wäre. Daß aus der Definition allein die Entscheidung zu entnehmen sei ohne Zuziehung anderer Sätze, habe ich nie verlangt. Wenn Herr Korselt mich widerlegen will, hat er einfach aus meiner Hilbertschen Mustern nachgebildeten Definition der Zahlenkongruenz abzuleiten, daß 2 der 8 nach 3 kongruent ist, und dabei kann er alle Sätze der Arithmetik benutzen, zu deren Verständnis die Kenntnis des Wortes „kongruent" nicht nötig ist. Er mag es versuchen, und er wird sehen, daß es nicht geht. Möge Herr Korselt Sätze über Punkte auf einer Geraden nehmen, welche er wolle, wenn sie nur die Kenntnis des Wortes „zwischen" nicht voraussetzen, und er wird nicht imstande sein, aus der Hilbertschen Definition des Zwischenliegens mit diesen Sätzen zu beweisen, daß dieser oder jener von drei Punkten einer Geraden zwischen den beiden andern liege.

Legen wir dagegen die Gaußsche Definition der Zahlenkongruenz zugrunde, so bedürfen wir nur der Sätze

»$8 - 2 = 3 + 3$« und »3 geht in $3 + 3$ auf«,

die das Zeichen der Kongruenz nicht enthalten, noch auch seine Kenntnis voraussetzen, um zu erkennen, daß 2 nach dem Modul 3 der 8 kongruent ist.

Wir sahen, daß eine Definition, die einem Worte eine Bedeutung zuweisen will, diese bestimmen muß. Das leistet die Hilbertsche Pseudodefinition nicht. Es gibt keine Beziehung, die nach ihr durch das Wort „zwischen" zu bezeichnen wäre. Und hier befinden wir uns wieder ganz im Einklange mit Herrn Korselt, der in einer formalen Theorie diesem Worte überhaupt keine Bedeutung zuerkennen will. Oder kann es vielleicht verschiedene Bedeutungen haben?

Hiermit kommen wir auf die Forderung der Eindeutigkeit der Zeichen zu sprechen, die, wie es scheint, von manchen neueren Mathematikern mißachtet wird, im Widerspruch zum alten Goethe, der zwar

kein Mathematiker, aber doch nicht ohne Verstand war. Dieser sagt im neunten Buche seiner Dichtung und Wahrheit:

„Wie sich denn alles behaupten läßt, wenn man sich erlaubt, die Worte ganz unbestimmt bald in weiterm, bald in engerm, in einem näher oder ferner verwandten Sinne zu gebrauchen und anzuwenden."

In der Tat, wenn es sich darum handelte, sich und andere zu täuschen, so gäbe es kein besseres Mittel dazu, als vieldeutige Zeichen.

Herr Korselt erklärt es für unbedenklich von „dem Satz a" (z. B. dem Parallelenaxiom) zu sprechen, wenn a in allen Geometrien denselben oder ähnlichen Wortlaut habe, als ob es auf den Sinn garnicht ankäme. Ich hatte Gründe für das Gegenteil angegeben; Herr Korselt kümmert sich nicht um sie, sondern stellt ihnen einfach seine Autorität entgegen. Ob diese genügt? Nun, praktisch ist seine Redeweise freilich, wenn es gilt, sich einzubilden, das gelte auch von den Axiomen im Euklidischen Sinne, was man von den Axiomen in einem modernen Sinne bewiesen habe.

Im allgemeinen bewegen sich denn auch die Wissenschaften in entgegengesetzter Richtung. Sie suchen ihre Sprache immer genauer zu machen, indem sie Kunstausdrücke mit möglichster Schärfe ausprägen, um den Schwankungen des gemeinen Sprachgebrauchs zu entgehen. Nur die modernen Mathematiker scheinen manchmal in der Vieldeutigkeit ihre Stärke zu suchen; und bequem ist sie ja auch entschieden, zu genialem Fluge einladend. Und doch sind die Gefahren nicht zu verkennen, die mit ihr für die Sicherheit der Beweisführung verbunden sind. Sind sie so für nichts zu achten? Man sollte denken, daß die Freunde der Vieldeutigkeit der Zeichen zunächst Vorsichtsmaßregeln angäben und ausführlich begründeten, die den aus der Vieldeutigkeit entspringenden Gefahren sicher vorbeugen könnten. Meines Wissens ist das nicht geschehen und wäre auch eine unnütze Arbeit; denn der Schein, daß eine Vieldeutigkeit der Zeichen notwendig sei, entsteht aus unklarem Denken und mangelhafter logischer Einsicht.

Zunächst kann man an den Gebrauch der Buchstaben in der Mathematik denken, wenn man die Vieldeutigkeit der Zeichen verteidigen will. Aber die Buchstaben sind ganz anderer Art als die Zahlzeichen »2« »3« usw. oder als die Beziehungszeichen »=« »>«. Sie sollen garnicht Zahlen, oder Begriffe, oder Beziehungen, oder irgendwelche Funktionen bezeichnen, sondern sie sollen nur andeuten, um dem Satze, in dem sie vorkommen, Allgemeinheit des Inhalts zu verleihen. Also nur im Zusammenhange eines Satzes haben sie eine gewisse Aufgabe zu erfüllen, haben sie zum Gedankenausdrucke beizutragen. Aber außer diesem Zusammenhange besagen sie nichts.

Es ist ganz verkehrt zu meinen, der Satz »$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$« drücke verschiedene Gedanken aus, unter andern auch den im Satze »$(2 + 3) \cdot 7 = 2 \cdot 7 + 3 \cdot 7$« enthaltenen; sondern jener erste Satz drückt auch nur einen einzigen Gedanken aus, der aber verschieden ist von dem des zweiten Satzes. Ebenso verkehrt ist es zu meinen, der Buchstabe »a« bezeichne bald die Zahl 2, bald eine andere, oder gar mehrere Zahlen zugleich. Er hat hier garnicht den Zweck, gleich einem Zahlzeichen eine Zahl oder sonst etwas zu bezeichnen, sondern nur die Aufgabe, dem Satze »$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$« Allgemeinheit des Inhalts zu verleihen, und eben die Allgemeinheit unterscheidet diesen Satz von dem zweiten.

Eine andere Gelegenheit, wo eine Vieldeutigkeit der Zeichen als notwendig erscheinen kann, bieten die Begriffswörter. Wenn man meint, das Wort „Planet" bezeichne bald die Erde, bald den Jupiter, so wird man es ja für vieldeutig halten. Aber in Wahrheit steht es zur Erde nicht in der Beziehung des Zeichens zum Bezeichneten; sondern es bezeichnet einen Begriff, und unter diesen fällt die Erde. Hier ist keine Vieldeutigkeit zu finden. Nehmen wir einmal an, das Wort „Planet" wäre unbekannt, und man hätte das Bedürfnis, den entsprechenden Begriff zu bezeichnen, so könnte man vielleicht auf den Einfall kommen, den Eigennamen „Mars" dazu zu gebrauchen und könnte die Forderung unbillig schelten, daß dem Worte „Mars" eine bestimmte Bedeutung gegeben werde; es müsse diesem Namen ein möglichst weiter Deutungsbereich offen gehalten werden. Aber als Begriffswort würde „Mars" ebenso eindeutig sein müssen, wie es als Eigenname gewesen wäre. Man sage nicht, daß es als Begriffswort keine bestimmte Bedeutung habe, oder daß es einen unbestimmten Gegenstand bedeute. Jeder Gegenstand ist bestimmt; „unbestimmter Gegenstand" ist widerspruchsvoll, und wo dieser Ausdruck auftaucht, kann man ziemlich sicher sein, daß eigentlich ein Begriff gemeint ist. Man kann nicht sagen, durch den Satz »$x > 0$« werde dem Buchstaben »x« ein unbestimmter Gegenstand, eine unbestimmte Zahl als Bedeutung zugewiesen; vielmehr wird hier ein Begriff *positive Zahl* bezeichnet; aber »x« wird nicht als Zeichen für diesen Begriff eingeführt, sondern vertritt nur die Stelle der Eigennamen (Zahlzeichen) von Gegenständen, die etwa dem Begriffe subsumiert werden. Also entsteht der Schein der Vieldeutigkeit nur aus der mangelhaften Auffassung, indem Eigenname und Begriffswort nicht scharf genug unterschieden werden.

Ähnliches kann eine Stufe höher vorkommen, indem man von einem unbestimmten Begriffe oder von der nicht bestimmten Bedeutung eines Begriffswortes spricht, wo ein Begriff zweiter Stufe vorschwebt.

Dies ist auch wohl der Fall, wo Herr Korselt die Forderung unzweckmäßig und unbillig findet, dem Worte „Punkt" eine bestimmte Bedeutung zu geben, und wo er den Namen einen möglichst weiten Deutungsbereich offen halten will. Er meint hiermit offenbar nicht, dem Worte „Punkt" solle ein Begriff mit möglichst weitem Umfange zugeordnet werden; denn ein solcher könnte trotzdem und müßte sogar ein völlig bestimmter sein; sondern ihm schwebt ein Begriff zweiter Stufe vor, in den neben dem Euklidiscken Begriffe *Punkt* noch andere fallen. Dieser Begriff zweiter Stufe muß freilich ebenfalls ein völlig bestimmter sein; aber er verhält sich zu den in ihn fallenden Begriffen erster Stufe ähnlich wie ein Begriff erster Stufe zu den unter ihn fallenden Gegenständen. Die Mannigfaltigkeit dieser Begriffe erster Stufe (Punktbegriffe) erwägend kommt man zu der Ansicht, daß hier eine Unbestimmtheit oder Vieldeutigkeit vorliege. Dies braucht hier ebensowenig der Fall zu sein wie beim Begriffe erster Stufe *Primzahl* deswegen, weil nicht nur die 2 unter ihn fällt, sondern auch die 3.

Die Vieldeutigkeit der Zeichen ist in keiner Weise nötig und folglich ist sie vom Übel. Was nur mittels vieldeutiger Zeichen bewiesen werden kann, das kann nicht bewiesen werden.

(Fortsetzung folgt.)

Otto Stolz.

(Auszug aus dem Nachrufe im XVII. Jahrg. der Monatshefte für Math. u. Phys. von J. A. Gmeiner. Mit einem Bildnisse Stolz' und einem Verzeichnisse seiner Publikationen.)

Am 25. November 1905 wurde in Innsbruck einer der hervorragendsten Mathematiker Österreichs, dessen Name in der gesamten mathematischen Welt wohlbekannt und hochgeschätzt ist, Hofrat Professor Dr. Otto Stolz unter allgemeiner Trauer zu Grabe getragen.

Otto Stolz wurde am 3. Juli 1842 zu Hall in Tirol als Sohn des Hauswundarztes und nachmaligen Direktors der dortigen Landesirrenanstalt Dr. Josef Stolz und dessen Gattin Aloisia geb. Rapp, Tochter des bekannten Verfassers des Geschichtswerkes „Tirol im Jahre 1809", des Gubernialprokurators Dr. Josef Rapp, geboren. Sein Vater, der schon als praktischer Arzt und geschickter Operateur eine ausgebreitete Tätigkeit entfaltet hatte, wandte sich später hauptsächlich der Psychiatrie zu und erwarb sich durch seine Publikationen auf diesem Gebiete einen bleibenden Ruf.

Seine Mittelschulstudien begann Otto Stolz am Franziskaner Gymnasium in seiner Vaterstadt Hall. Da jedoch dort damals nur die unteren Klassen bestanden, wandte er sich schon nach Absolvierung des 3. Kurses nach Innsbruck, wo er seine Studien fortsetzte und im Jahre 1860 die Maturitätsprüfung mit Auszeichnung ablegte. Im Herbste desselben Jahres bezog er daselbst die Universität und hörte an derselben sodann durch sechs Semester hindurch vorzüglich Vorlesungen über Mathematik bei Baumgarten, Physik bei Waltenhofen, Chemie bei Hlasiwetz und Botanik bei Kerner. Mit welchem Eifer er sich gleich von Anfang an in das Studium der Mathematik vertiefte und wie rasch er sich dank seiner hervorragenden Begabung in dieser Wissenschaft, die sein Berufsfach werden sollte, zurecht fand, ersehen wir daraus, daß er schon im zweiten Universitätsjahre die von der philosophischen Fakultät für das Studienjahr 1861/62 ausgeschriebene Preisaufgabe: „Man gebe einen Abriß der Lehre von den singulären Punkten, welche bei ebenen algebraischen Kurven vorkommen“ löste und für diese Arbeit den Preis von 210 Gulden zuerkannt erhielt.



Im Oktober 1863 verließ Stolz die tirolische Landeshauptstadt, um an der Wiener Universität seine Fachstudien fortzusetzen. Hier beschäftigte er sich außer mit der Mathematik insbesondere auch eingehend mit Astronomie. Er hörte die Vorlesungen von Petzval und Littrow und erwarb sich im Oktober 1864 die philosophische Doktorwürde. Im Mai 1867 wurde er zum Assistenten der Wiener Universitätssternwarte bestellt, und im nämlichen Jahre habilitierte er sich dort, nachdem er schon im Februar eine größere Arbeit über die Achsen der Kurven zweiter Ordnung vollendet und an die Akademie der Wissenschaften eingereicht hatte, für das Gesamtgebiet der Mathematik.

Als Privatdozent hielt er daraufhin Kollegien ab über Differential- und Integralrechnung, Theorie und Anwendung der Determinanten, analytische Geometrie des Raumes und der Kegelschnitte, sowie auch über synthetische Geometrie. Der Erfolg der Tätigkeit, welche Stolz in dieser ersten Zeit seiner akademischen Laufbahn entfaltete, und die Wertschätzung, welcher schon seine ersten wissenschaftlichen Leistungen sich erfreuten, finden sich trefflich charakterisiert im 39. Bd. von Wurzbachs biographischem Lexikon. Wir entnehmen demselben die nachfolgende Stelle, die uns auch über den nächsten Zeitabschnitt aus Stolz' Leben Aufschluß gibt: „Nachdem er (Stolz) als Privatdozent eine hervorragende Lehrbegabung an den Tag gelegt, sowie durch die in der Zwischenzeit in den Sitzungsberichten der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften veröffentlichten Abhandlungen: «Über die Achsen der Linien zweiter Ordnung in allgemeinen trimetrischen Punktkoordinaten» und «Über die Kriterien zur Unterscheidung der Maxima und Minima von Funktionen mehrerer Veränderlicher» Beweise eines seltenen mathematischen Talentes geliefert hatte, erhielt er wiederholt Staatsreisestipendien zu dem Zwecke, auf den Universitäten Berlin und Göttingen, an welchen die neuere Richtung der mathematischen Forschung ihre glänzendste Vertretung fand, seine höhere Ausbildung zu fördern.“

In Berlin, wohin sich Stolz im Herbste 1869 begeben hatte, besuchte er durch drei Semester die Kollegien von Weierstraß, Kummer und Kronecker und nahm während dieser Zeit auch an dem von den beiden ersteren geleiteten Seminare tätigen Anteil. Einen überwältigenden Eindruck machten auf den jungen Gelehrten, wie aus mehrfachen gelegentlichen Äußerungen Stolz' hervorgeht, Weierstraß' funktionentheoretische Vorlesungen, wie denn überhaupt von den drei genannten Meistern der mathematischen Wissenschaft Weierstraß auf Stolz offenbar den tiefstgehenden und nachhaltigsten Einfluß ausgeübt hatte. Während seines Aufenthaltes in Berlin veröffentlichte Stolz die im 16. Bd. der Schlömilchschen Zeitschrift erschienene Abhandlung: „Über eine analytische Entwicklung der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie in voller Allgemeinheit.“

Das Sommersemester 1871 brachte Stolz in Göttingen zu, wo er Clebsch und Klein hörte und seinen bereits gewonnenen wissenschaftlichen Gesichtskreis um manche wertvolle und fruchtbare Idee erweiterte. Hier schrieb er auch die im 4. Bd. der mathematischen Annalen publizierte Abhandlung über „die geometrische Bedeutung der komplexen Elemente in der analytischen Geometrie.“

Nach seiner Rückkehr nach Wien nahm Stolz im Herbste 1871 seine Vorträge an der Universität vor sehr zahlreicher Hörerschaft in

erweitertem Umfange wieder auf. Im darauffolgenden Jahre, Juli 1872, wurde er zum außerordentlichen Professor an die neu errichtete zweite mathematische Lehrkanzel in Innsbruck berufen, wo er sodann, und zwar seit 1876 als Ordinarius, bis zu seinem Tode wirkte. Mehrere während dieser Zeit an ihn ergangene Rufe (nach Darmstadt und nach Wien) lehnte er ab. Im Oktober des letztgenannten Jahres vermählte er sich mit Fräulein Paula Meyer aus Innsbruck.

In Innsbruck entfaltete Stolz eine ebenso erfolgreiche wie unermüdliche, der Wissenschaft und dem akademischen Lehramte gewidmete Wirksamkeit. Um seiner Lehrtätigkeit einen größeren Erfolg zu sichern, war er bald nach dem Antritte seiner Professur auf die Errichtung eines mathematischen Seminars bedacht, welches denn auch mit dem Wintersemester 1876/77 eröffnet und seiner Leitung übergeben wurde. In seinen Vorlesungen, die ein reichhaltiges Programm aufweisen, behandelte er außer den bereits oben genannten Stoffen, über welche er schon als Privatdozent gelesen hatte, die Gebiete: Anwendung der Infinitesimalrechnung auf die analytische Geometrie der Ebene, Theorie der Raumkurven und Flächen, allgemeine Arithmetik, Funktionentheorie, Doppelintegrale, Differentialgleichungen, Variationsrechnung, algebraische Funktionen und deren Integrale. In den früheren Jahren hielt er überdies Kollegien ab über Algebra, elliptische Funktionen, sphärische Trigonometrie und sphärische Astronomie. Seine Vorträge waren sachlich überaus fein durchdacht und durchgearbeitet, klar und bündig in der Definition der Begriffe, ebenso wie in der Fassung der Lehrsätze und Probleme, streng und exakt in der Beweisführung. Mit der größten Gewissenhaftigkeit war Stolz stets auch darauf bedacht, seine Hörer mit den neuesten Erscheinungen auf den von ihm vorgetragenen Gebieten bekannt, oder falls dieselben seinem eigenen Lehrsysteme sich nicht einfügen ließen, so doch auf sie aufmerksam zu machen. Überhaupt waren seine Vorlesungen reich an Bemerkungen über die Literatur und geschichtliche Entwicklung der Mathematik, worin er über einen unerschöpflichen Wissensvorrat verfügte. Am Schlusse seiner am 2. März 1891 in der Aula der Universität gehaltenen Rektoratsrede legte Stolz den Studierenden ans Herz, sich behufs Erwerbung gründlicher Kenntnisse und wissenschaftlicher Bildung an die Werke der Meister zu wenden oder, falls das untunlich sein sollte, sich einen Führer zu wählen, der sie zu den Quellen und Originalen geleite; und von den hierzu berufenen Führern war er selbst der besten einer.

An der Universität bekleidete Stolz zweimal, nämlich in den Studienjahren 1877/78 und 1888/89, das Amt des Dekanes der philosophischen Fakultät und im Studienjahre 1890/91 die Würde des Rektors.

Im Professorenkollegium genoß er nicht nur als Gelehrter, sondern auch wegen seines durch und durch edlen, geraden und biederen Charakters hohes Ansehen. Der immer sehr ernste Mann mochte wohl dem Fernstehenden etwas unnahbar scheinen: hatte man aber Gelegenheit, mit ihm in näheren Verkehr zu treten, so zeigte er sich, immer nach seiner geraden und offenen Art, ungemein liebenswürdig, wohlwollend und hilfsbereit und dabei war er von einer geradezu rührenden Anspruchslosigkeit. Ebenso gewissenhaft wie in seinem Berufe war er auch in seinem Privatleben, ein Muster ernster Lebensführung und treuer Pflichterfüllung.

Als Schriftsteller auf dem Gebiete der Mathematik war Stolz unausgesetzt in hervorragender Weise tätig. Außer den bekannten Lehrbüchern schrieb er über sechzig mathematische Abhandlungen, welche zumeist in den mathematischen Annalen, in den Sitzungsberichten der Wiener Akademie, in den Monatsheften für Mathematik und Physik und in den Berichten des naturwissenschaftlich-medizinischen Vereins in Innsbruck erschienen. Einzelne Arbeiten von ihm finden sich noch in der Schlömilchschen Zeitschrift, in den Transactions of the American mathematical society, im Periodico di Matematica, in der Zeitschrift für österr. Gymnasien, in den Jahresberichten der Deutschen Mathematikervereinigung, in den Acta mathematica und in den Sitzungsberichten der Münchner Akademie. Überdies veröffentlichte Stolz noch im Sonderdrucke einen populären Vortrag über „die Sonne“ (Innsbruck 1876), sowie seine Rektoratsrede über „Größen und Zahlen“ (Leipzig 1891), in welcher er einen sehr interessanten Überblick über die geschichtliche Entwicklung des Größen- und Zahlenbegriffes von Euklid bis auf die Gegenwart entwirft.

Von seinen Lehrbüchern erschienen in den Jahren 1885 und 1886 die beiden Teile der „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik“; die Jahre 1893, 1896 und 1899 brachten nacheinander die drei Teile der „Grundzüge der Differential- und Integralrechnung“.

Im letztgenannten Jahre brach über Stolz und seine Familie ein schweres Unglück herein. Sein älterer Sohn Friedrich, der nach Absolvierung des Gymnasiums in den letzten Jahren in Innsbruck und München Naturwissenschaften studierte und sich auf dem Gebiete der Kryptogamenforschung Tirols trotz seiner Jugend bereits einen beachtenswerten Platz errungen hatte, fand am 14. August 1899 im Pitztale durch Absturz über eine Felswand seinen frühzeitigen Tod. Den Schmerz über den Verlust dieses ihres hoffnungsvollen Sohnes vermochten die Eltern, obwohl noch zwei liebe Kinder sie umgaben, durch lange Zeit hindurch kaum zu überwinden. Stolz selbst fühlte

sich infolge dieses Schicksalsschlages derart niedergebeugt, daß er einen kurz vorher über Anregung des Herrn Teubner in Leipzig gefaßten Plan zur Abfassung eines neuen Werkes, das den Titel: „Die Grundlagen der Arithmetik“ erhalten sollte, momentan wieder aufgab. Doch nach und nach mochte er gerade in der Beschäftigung mit seiner Wissenschaft eine wohltuende Ablenkung von den trüben Gedanken, in die ihn die Trauer um seinen Sohn versenkt hatte, finden, und so nahm er im Herbste desselben Jahres den früheren Plan in etwas veränderter Gestalt wieder auf. Da nämlich inzwischen eine neue Auflage seiner „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik“ notwendig geworden war, so entschloß er sich jetzt, dieses ganze Werk umzuarbeiten und es in neuer und vermehrter Gestalt in zwei selbständigen Bänden als „Theoretische Arithmetik“ und „Einleitung in die Funktionentheorie“ herauszugeben. Diese Arbeit, an der ich auf Einladung Stolz’ als Mitarbeiter teilnahm, füllte seine letzten Lebensjahre völlig aus, und er war daran unausgesetzt tätig, bis der Druck seines letzten Werkes, der „Einleitung in die Funktionentheorie“ gegen Ende August 1905 endlich fertig gestellt war. Wenige Wochen später warf ihn ein schweres Leiden aufs Krankenlager, von dem er sich leider nicht mehr erheben sollte. Arteriensklerose in Verbindung mit einer Neubildung in den inneren Organen führte am 23. November 1905 seine Auflösung herbei.

Stolz war bis kurz vor dem Eintritte des Todes bei klarem Bewußtsein, und noch in den letzten Tagen verweilten seine Gedanken bei der Wissenschaft. Ihm war die Beschäftigung mit der Mathematik, der er vom Beginn seiner Studienzeit an seine ganze Kraft gewidmet hatte, sozusagen zur zweiten Natur geworden. Sein sehr ersprießliches und verdienstvolles Wirken hatte auch mehrfach öffentliche Anerkennung gefunden. Im Jahre 1898 wurde er von Sr. Majestät dem Kaiser Franz Josef I. durch Verleihung des Ordens der eisernen Krone III. Klasse ausgezeichnet; im darauf folgenden Jahre fand seine Wahl zum wirklichen Mitgliede der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, deren korrespondierendes Mitglied er schon seit 1893 war, statt. Seit 1900 war er auch korrespondierendes Mitglied der königlich bayerischen Akademie der Wissenschaften und in der nämlichen Eigenschaft gehörte er noch der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften in Prag an. 1904 wurde er endlich zum k. k. Hofrate ernannt. Welcher Wertschätzung sich Stolz unter den Fachgelehrten erfreute, zeigt unter anderem ein Einblick in die bisher erschienen Hefte der „Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften“, wo bei den einschlägigen Artikeln an sehr zahlreichen Stellen von den verschiedensten Autoren auf die

Stolzschen Bücher und Abhandlungen hingewiesen ist. Dieselbe Hochschätzung seiner wissenschaftlichen Leistungen findet auch in den von verschiedenen Seiten erfolgten Besprechungen seiner Werke, sowie in gelegentlichen Urteilen hervorragender Fachmänner ihren Ausdruck.

Während ich im Vorstehenden ein Bild von dem Leben und Wirken meines hochverehrten Lehrers in allgemeinen Zügen zu entwerfen trachtete, will ich nun noch versuchen, einen kurzen Überblick über die Ergebnisse seiner wissenschaftlichen Forschung zu geben. Seine Arbeiten gehören zumeist der Arithmetik, Infinitesimalrechnung und Funktionentheorie sowie der analytischen Geometrie an. Dazu kommen noch ein paar Arbeiten rein geometrischen Inhaltes sowie einige mit vorwiegend mathematisch geschichtlichem Charakter.

In seiner ersten Publikation (W. S. 55)[1]) bestimmt Stolz die Halbachsen eines durch die allgemeine Gleichung 2ten Grades in trimetrischen Punktkoordinaten dargestellten Kegelschnittes als Maximum und Minimum des Radiusvektors, welcher das Zentrum desselben mit einem Kurvenpunkte verbindet, und gelangt dabei zu Ausdrücken für die Summe und das Produkt der Quadrate dieser Halbachsen, wie sie für den Fall rechtwinkliger Koordinaten schon früher von Faure gegeben wurden. Stolz geht aber insbesondere dadurch über Faure hinaus, daß er den genannten Ausdrücken eine Form erteilt, mittels welcher sich die Diskussion der allgemeinen Gleichung 2ten Grades in sehr einfacher Weise unmittelbar zu Ende führen läßt. In seiner zweiten geometrischen Abhandlung (Schlömilchsche Zeitschr. 16) leitet er die Grundformeln der sphärischen Trigonometrie auf analytischem Wege her. Hierbei gewinnt er durchaus eindeutige und ausnahmslos gültige Formeln dadurch, daß er nicht nur die in Betracht kommenden geometrischen Größen als relative Größen nach dem Vorgange von Möbius eindeutig definiert, sondern auch die Grundbegriffe der analytischen Geometrie einer strengeren Fassung unterzieht. Den nämlichen auf die konsequente Durchführung des Prinzipes der Vorzeichen hinzielenden Gedanken verfolgt er in einer späteren Arbeit (M. 1) hinsichtlich der beiden Krümmungen der Raumkurven.

Eine seiner ersten Arbeiten hat Stolz, wie bereits bemerkt wurde, den komplexen Elementen in der Geometrie gewidmet (Ann. 4); sie betrifft die Frage nach der geometrischen Bedeutung dieser Elemente. Diese Frage hatte v. Staudt in seinen „Beiträgen zur Geometrie der Lage“ auf rein geometrischem Wege beantwortet, doch hatten seine

---

1) Im folgenden bedeutet: W. S. = Sitzungsberichte der Wiener Akademie; M. = Monatshefte f. Math. u. Phys.; Ann. = mathematische Annalen; I. B. = Berichte des naturw.-medizinischen Vereins in Innsbruck.

Untersuchungen bis dahin in der analytischen Geometrie nur . Berücksichtigung gefunden. Stolz unternimmt es nun, die v. Staudtschen Gedanken nach der Methode der analytischen Geometrie durchzuführen, wobei dieselben an Klarheit und Durchsichtigkeit bedeutend gewinnen und zugleich die Übereinstimmung des Imaginären in der analytischen Geometrie mit dem v. Staudtschen Imaginären unmittelbar nachgewiesen wird.

Über algebraische Kurven hat Stolz drei wichtige Abhandlungen geschrieben (Ann. 8, 11 u. 15). In der ersten derselben vervollständigt er die von Plücker gegebene Darstellung der bei den algebraischen Kurven auftretenden Singularitäten und bringt sie durch konsequente Benützung der von Plücker selbst gebrauchten Differentialgleichungen zum Abschlusse, indem er namentlich die Frage nach der Gestalt einer Kurve in der Umgebung eines Doppelpunktes vollständig erledigt und auch die bei einem n-fachen Punkte möglichen Fälle angibt. Die zweite enthält eine „allgemeine Theorie der Asymptoten der algebraischen Kurven“. Während Plücker die Asymptoten bis einschließlich zur 4ten Ordnung hauptsächlich mit Hilfe von Kontinuitätsbetrachtungen entwickelt hatte, zeigt hier Stolz, wie man auf Grund der fundamentalen Eigenschaften der algebraischen Funktionen von der Kurvengleichung aus unmittelbar zur Aufstellung der Gleichungen der krummlinigen Asymptoten beliebiger Ordnung gelangen kann. In der dritten der erwähnten Abhandlungen gibt Stolz zunächst eine allgemeine Definition der Multiplizität der eigentlichen und uneigentlichen Schnittpunkte zweier algebraischen Kurven, wozu er die Kroneckersche Resolvente benutzt, und zeigt, daß die Multiplizität eine von der Wahl des Koordinatensystems unabhängige Größe ist. Sodann beantwortet er namentlich die Frage, wie die Multiplizität eines eigentlichen Schnittpunktes aus den gegebenen Kurvengleichungen unmittelbar bestimmt werden könne.

Sehr eingehend hat sich Stolz mit den Grundproblemen der Integralgeometrie sowohl in den „Grundzügen“ als auch in mehreren seiner Abhandlungen befaßt; insbesondere kommt er bei mehrfachen Gelegenheiten auf die Rektifikation zurück. In der Abhandlung über B. Bolzano (Ann. 18), in welcher er die Verdienste dieses Philosophen und Mathematikers um die Infinitesimalrechnung einer eingehenden Würdigung unterzieht, führt er uns im Anschlusse an die Darlegung von Bolzanos Auffassung der Rektifikation, Komplanation und Kubatur die Hauptmomente in der geschichtlichen Entwicklung des Rektifikationsproblems vor. Der Erklärung der Bogenzahl sowie des Inhaltes eines krummen Flächenstückes sind die beiden Aufsätze im 3 Bd. der „Transactions“ gewidmet. Die Abhandlung im 35. Bd. der „Münchner

[illegible]nte“ enthält einen sehr einfachen Beweis für die Rektifizierbarkeit [illegible] regulären Kurven, welcher sich auf die komplexe Darstellung dieser Kurven gründet.

Seine Auffassung von den Grundlagen der Geometrie hat Stolz in J. B. 15 ausgesprochen. Da die Tatsache, daß neben der Euklidschen Geometrie noch andere geometrische Systeme möglich sind, die Geometrie auf das Gebiet der Erfahrung verweist, so fordert er eine solche Formulierung der geometrischen Axiome, daß dieselben durch Versuche geprüft und innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler bestätigt werden können. Es läßt sich, wie Stolz ausführlich nachweist, das ganze Lehrgebäude der Euklidschen Geometrie gewinnen, wenn man die Axiome der Geraden, der Ebene und des Kreises für einen hinlänglich kleinen Teil des Raumes gelten läßt und das unkontrollierbare elfte Axiom Euklids durch die Forderung ersetzt, daß es mindestens ein Dreieck mit der Winkelsumme 180^0 oder, was damit gleich bedeutend ist, mindestens ein ebenes Viereck mit vier rechten Winkeln gebe. Weiter hat Stolz (J. B. 12; Ann. 22 u. 29; Theor. Arithm., V. u. VI. Abschn.) die Größenvergleichung in der Geometrie der alten Griechen, sowie das Euklidsche Verfahren der Größenbildung kritisch beleuchtet und namentlich die Bedeutung, welche dem Axiome des Archimedes in der Theorie der absoluten Größen zukommt, hervorgehoben und klar gestellt. Die Euklidschen Prinzipien der Größenbildung wendet er auch an zur Herleitung mehrerer Systeme von unendlich kleinen Größen (J. B. 14; M. 5); doch schreibt er diesen keine besondere Bedeutung zu, sondern betrachtet sie lediglich als lehrreiche Anwendungen der genannten Prinzipien.

Die Theorie der Kettenbrüche verdankt Stolz die wichtige, zuerst in J. B. 15 mitgeteilte und in „Allgem. Arithm. II“ bewiesene allgemeine Regel, nach welcher sich die Konvergenz oder Divergenz eines jeden rein periodischen Kettenbruches und im Falle der Konvergenz auch dessen Grenzwert bestimmen läßt. Derselben stellt er in J. B. 17 noch einige sehr einfache Divergenzkriterien zur Seite.

Große Aufmerksamkeit hat Stolz auch der Reihentheorie sowohl in seinen Lehrbüchern als auch in mehreren Abhandlungen zugewendet. Was die letzteren anbetrifft, so enthalten zunächst die beiden in Bd. 20 u. 29 der „Schlömilchschen Zeitschrift“ veröffentlichten Arbeiten mehrere an Abel sich anschließende Sätze über die ganzen Potenzreihen. In W. S. 95 u. 104 befaßt sich Stolz mit der Umkehrung der Potenzreihen und gelangt dabei zu einem wichtigen Satze über den Konvergenzradius der umgekehrten Reihe; die Abhandlung in W. S. 95, p. 659 enthält außerdem eine neue Herleitung des Grenzwertes und des Konvergenzradius der Lambertschen Reihe. In

Ann. 24 gibt er eine ausführliche Darstellung der fundamentalen Eigenschaften der Doppelreihen.

Einige kleinere Arbeiten von Stolz gehören der Theorie der analytischen Funktionen an. Von diesen sei jene in J. B. 17 erwähnt, welche eine genaue Untersuchung der Unstetigkeiten der Hauptzweige, sowie der wechelseitigen Beziehungen der Hauptwerte der verschiedenen Kreisfunktionen bringt. Die Elemente der Theorie der monogenen analytischen Funktionen und insbesondere die Kreisfunktionen finden sich überdies im VII. u. VIII. Abschn. der „Einleitung in die Funktionentheorie“ in eingehender Weise dargestellt.

Zahlreiche und höchst bedeutsame Arbeiten hat Stolz auf dem Gebiete der Infinitesimalrechnung veröffentlicht. In der Differentialrechnung verdankt man ihm zuerst die endgültige Erledigung der bekannten Formel für die sogenannten unbestimmten Quotienten $\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ bei einem bestimmten Grenzübergange des x im Falle, daß $f(x)$ und $\varphi(x)$ dabei je einen unendlichen Grenzwert besitzen. In Ann. 14 u. 15 leitet er auf verschiedenen Wegen die Bedingungen für die Gültigkeit dieser Formel her. Am ersteren Orte benutzt er zwei Hilfssätze, welche auch an sich von Interesse sind und in der Theorie der Konvergenz und Divergenz der unendlichen Reihen vorteilhafte Verwendung finden; sie besagen, daß die Gleichung

$$\lim_{x=+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x=+\infty} \frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(x+h)-\varphi(y)} \quad (h \lessgtr o)$$

besteht, wenn der Grenzwert auf der rechten Seite vorhanden ist, $\varphi(x)$ bei wachsendem x sich stets im nämlichen Sinne ändert und entweder $\lim \varphi(x) = +\infty\ (-\infty)$ ist oder aber $f(x)$ und $\varphi(x)$ zugleich zur Null konvergieren.

Schon in einer seiner ersten Arbeiten (W. S. 58) hatte sich Stolz, wie bereits bemerkt wurde, mit den Extremen der Funktionen mehrerer Veränderlicher befaßt und darin eine allgemeine Regel hergeleitet, nach welcher sich die Maxima und Minima einer Funktion beliebig vieler Veränderlichen bestimmen lassen, wenn nur nicht alle zweiten Ableitungen derselben an den betreffenden Stellen zugleich verschwinden. Die im Jahre 1890 erschienene Scheeffersche „Theorie der Maxima und Minima einer Funktion von zwei Veränderlichen“ veranlaßte ihn, sich mit diesem Gegenstande nochmals zu beschäftigen, zu der er nun eine drei Abhandlungen (W. S. 99, 100 u. 102) umfassende äußerst wertvolle Ergänzung lieferte. In der ersten beweist er zunächst den Scheefferschen Fundamentalsatz für m Veränderliche und sucht die Scheeffersche Methode zur Bestimmung der Extrema auf Funktionen

von mehreren Veränderlichen auszudehnen, wobei er für den Fall dreier Veränderlicher zu einem vollständigen Abschlusse gelangt. In der zweiten Abhandlung gibt Stolz ein neues Verfahren zur Bestimmung der Extrema einer Funktion zweier Veränderlichen und zeigt zugleich, wie sich dasselbe auf Funktionen von mehr als zwei Veränderlichen übertragen lasse. Die dritte endlich enthält eine Untersuchung des Falles, daß die linken Seiten der Gleichungen, zu denen man bei der Bestimmung der Extremen geführt wird, einen gemeinsamen Teiler enthalten.

Große Verdienste hat sich Stolz noch um die Theorie der bestimmten Integrale erworben; seine Arbeiten auf diesem Gebiete umfassen wohl alle grundlegenden Fragen der bestimmten Integralrechnung. In Ann. 23 stellt er zwei zum bestimmten Integrale in naher Beziehung stehende Grenzwerte über Punktmengen auf, welche er die Intervallgrenze, bezw. Flächengrenze der betreffenden Punktmenge nennt; dieselben sind mit den heute als äußere Länge einer auf einer Geraden, bezw. äußere Flächenzahl einer auf einer Ebene befindlichen Punktmenge bekannten Grenzwerten identisch. Die Abhandlungen M. 7 und W. S. 107, p. 736 bringen zwei neue Formen der Bedingung für die Integrierbarkeit einer endlichen Funktion $f(x)$ in einem endlichen Intervalle. Ebenso enthält die Abhandlung Ann. 26 eine neue Form der Integrierbarkeitsbedingung für eine Funktion von zwei Veränderlichen. Im Anschluß daran beweist Stolz noch einen Satz über die Berechnung eines Doppelintegrals durch zwei aufeinander folgende Integrationen. Daselbst macht er auch auf die große Bedeutung aufmerksam, welche dem Begriffe der gleichmäßigen Konvergenz in der Integralrechnung zukommt.

Drei wichtige Abhandlungen (W. S. 107, 108; M. 9) hat Stolz in den Jahren 1898 und 1899 über die absolut konvergenten uneigentlichen Integrale veröffentlicht. In denselben stellt er der von De la Vallée-Poussin gegebenen Theorie dieser Integrale eine zweite, ebenso allgemeine und in ihren Ergebnissen mit der ersteren durchaus übereinstimmende Theorie derselben gegenüber. Dieselbe gründet sich hinsichtlich der einfachen Integrale auf die allgemein übliche Cauchysche Erklärung und auf die von Harnack gegebene Erweiterung derselben, welche letztere Stolz strenger gefaßt und in ihren Folgen konsequent durchgeführt hat. Einen analogen Weg schlägt er auch bezüglich der uneigentlichen Doppelintegrale ein. Die betreffenden Untersuchungen finden sich auch im 3. Teile der „Grundzüge".

Die Ergebnisse der Stolzschen Forschungen sind, soweit dieselben der Arithmetik, Funktionentheorie oder Infinitesimalrechnung angehören, zum größten Teile in seinen Lehrbüchern niedergelegt. In den letzteren

tritt uns auch dort, wo er bereits Vorhandenes gesammelt hat, in der Art der Darstellung des Stoffes seine kraftvolle Eigenart entgegen; denn Stolz hat überall dem von ihm behandelten Gegenstande seinen eigenen Geist eingeprägt und insbesondere gar manche Begriffe und Sätze strenger gefaßt, als es vor ihm geschehen war. Seine Lehrbücher haben in den Fachkreisen auch allgemein sehr günstige Aufnahme und Anerkennung gefunden und ist an ihnen namentlich die Klarheit, Einfachheit und große Genauigkeit in der Darstellung des vorgeführten Stoffes, sowie ihre Reichhaltigkeit an literarischen Nachweisen von den verschiedensten Seiten mit Recht rühmend hervorgehoben worden.

Durch seine Werke hat sich Stolz selbst das beste Denkmal, ein monumentum aere perennius geschaffen, und in ihnen wird sein Geist fortleben und uns belehrend weiter begleiten, wenn auch der unerbittliche Tod ihn selbst, den geliebten Meister, uns entrissen hat. Ein zweites Denkmal hat er in den Herzen seiner Schüler hinterlassen, denen er ein ausgezeichneter Lehrer, ein gewissenhafter und wohlmeinender Führer und Berater war, und dankbar werden alle, die einst seinen begeisterten Worten gelauscht, ihm ein treues Andenken, voll der höchsten Verehrung, bewahren. Wer aber des näheren persönlichen Verkehres mit ihm sich erfreute, der betrauert in ihm nicht nur den hervorragenden Gelehrten und den hochgeschätzten Lehrer, sondern vor allem den edlen, lieben Menschen.

Verzeichnis der von Otto Stolz veröffentlichten Bücher und Abhandlungen.

A. Lehrbücher (Erschienen bei Teubner in Leipzig).

Vorlesungen über allgemeine Arithmetik. I. Teil 1885, II. Teil 1886.

Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. I. Teil 1893, II. Teil 1896, III. Teil 1899.

Theoretische Arithmetik. Von O. Stolz u. J. A. Gmeiner. I. Abteilung 1900, II. Abteilung 1902.

Einleitung in die Funktionentheorie. Von O. Stolz u. J. A. Gmeiner. I. Abteilung 1904, II. Abteilung 1905.

B. Im Sonderdruck erschienene Vorträge.

Die Sonne. Innsbruck 1876.

Größen und Zahlen. Leipzig 1891.

C. Abhandlungen (Die beigefügten Zahlen bedeuten die Jahrgänge oder Bände der betreffenden Berichte oder Zeitschriften).

In den Sitzungsberichten der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien:

Die Achsen der Linien zweiter Ordnung in allgemeinen trimetrischen Punktkoordinaten. 55 (1867).

Über die Kriterien zur Unterscheidung der Maxima und Minima von Funktionen mehrerer Variabeln. 58 (1868).
Bemerkung zu der Abhandlung des Herrn Prof. Dr. E. Weiß: Entwicklungen zum Lagrangeschen Reversionstheorem etc. 95 (1887).
Über die Lambertsche Reihe. 95 (1887).
Die Maxima und Minima der Funktionen von mehreren Veränderlichen. 99 (1890), 100 (1891), 102 (1893).
Über den Konvergenzkreis der umgekehrten Reihe. 104 (1895).
Zwei Grenzwerte, von welchen das obere Integral ein besonderer Fall ist. 106 (1897).
Zur Erklärung der absolut konvergenten uneigentlichen Integrale. 107 (1898).
Eine neue Form der Bedingung zur Integrierbarkeit einer Funktion einer Veränderlichen. 107 (1898).
Über die absolute Konvergenz der uneigentlichen bestimmten Integrale. (II. Mitteilung.) 108 (1899).
Ein Satz der Integralgeometrie. 112 (1903).

In den „Mathematischen Annalen".

Die geometrische Bedeutung der komplexen Elemente in der analytischen Geometrie. 4 (1871).
Über die singulären Punkte der algebraischen Funktionen und Kurven. 8 (1875).
Allgemeine Theorie der Asymptoten der algebraischen Kurven. 11 (1877).
Über die Grenzwerte der Quotienten. 14 (1878), 15 (1879).
Die Multiplizität der Schnittpunkte zweier algebraischer Kurven. 15 (1879).
B. Bolzanos Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung. 18 (1881).
Zur Geometrie der Alten, insbesondere über ein Axiom des Archimedes. 22 (1883).
Über einen zu einer unendlichen Punktmenge gehörigen Grenzwert. 23 (1884).
Über unendliche Doppelreihen. 24 (1884).
Die gleichmäßige Konvergenz von Funktionen mehrerer Veränderlichen zu den dadurch sich ergebenden Grenzwerten, daß einige derselben konstanten Werten sich nähern. 26 (1886).
Über zwei Arten von unendlich kleinen und unendlich großen Größen. 31 (1888).
Über Verallgemeinerung eines Satzes von Cauchy. 33 (1889).
Über das Axiom des Archimedes. 39 (1891).
Zu den Grundformeln der analytischen Geometrie. 43 (1893).

In der Schlömilchschen Zeitschrift für Math. u. Pys.:

Über eine analytische Entwicklung der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie in voller Allgemeinheit. 16 (1871).
Beweis einiger Sätze über Potenzreihen. 20 (1875).
Nachtrag zur Mitteilung: „Beweis einiger Sätze über Potenzreihen". 29 (1884).

In den Berichten des naturw.-med. Vereins in Innsbruck:

Bemerkungen zur Integralrechnung. 5, 6, 8.
Bemerkungen über einen Satz des Herrn E. Picard. 11.
Zur Theorie der elliptischen Funktionen. 12.
Zur Geometrie der Alten, insbesondere über ein Axiom des Archimedes. 12.
Die unendlich kleinen Größen. 14.
Das letzte Axiom der Geometrie. 15.

Über die Partialbruchzerlegung der Funktion $e^{az}:(e^z - 1)$. 15.

Über die Konvergenz und Divergenz rein periodischer Kettenbrüche. 15 u. 17.

Bemerkungen zur Theorie der Funktionen von mehreren unabhängigen Veränderlichen. 17.

Über die Hauptwerte der Kreisfunktionen. 17.

Über die geometrische Bedeutung der komplexen Elemente der analytischen Geometrie. 19.

In den Monatsheften für Math. u. Pysik:

Zur Theorie der Raumkurven. 1 (1890).

Die ebenen Vielecke und die Winkel mit Einschluß der Berührungswinkel als Systeme von absoluten Größen. 5 (1894).

Bemerkungen zum Aufsatze: „Die ebenen Vielecke und die Winkel mit Einschluß der Berührungswinkel als Systeme von absoluten Größen". 7 (1896).

Über den von Herrn G. Peano aufgestellten Begriff des bestimmten Integrals. 7 (1896), 8 (1897).

Über die Umformung eines uneigentlichen Doppelintegrals in ein zweimaliges Integral. 9 (1898).

Zum Existensbeweis für das komplexe Integral. 11 (1900).

Leopold Gegenbauer. Nachruf unter Mitwirkung von E. Kobald und J. A. Gmeiner verfaßt von O. Stolz. 15 (1904).

In der Zeitschrift für die österr. Gymnasien:

Über die anschauliche Vergleichung der ebenen Vielecke und der Prismen. 39 (1888).

Im Periodico di Matematica:

Sulla teoria della divisione e dell' estrazione di radice. 13 (1898).

Supplemento all' articolo sulla teoria della divisione e dell' estrazione di radice. 13 (1898).

In den Transactions of the American mathematical society:

Zur Erklärung der Bogenlänge und des Inhaltes einer krummen Fläche. 3 (1902).

Nachtrag zum Artikel: „Zur Erklärung der Bogenlänge etc." 3 (1902).

In den Jahresberichten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung:

Die Zahlen der ebenen Flächen. 11 (1902).

In den Acta mathematica.

Die Bedeutung der Abelschen Abhandlung über die binomische Reihe für die Funktionentheorie. 28 (1904).

In den Sitzungsberichten der kgl. bayerischen Akademie der Wissenschaften in München:

Beweis eines Satzes über das Vorhandensein des komplexen Integrals. 35 (1905).

Das Archiv der Mathematik und Physik, ein Geleitwort zu den ersten zehn Bänden der dritten Folge.

Von Paul Stäckel in Hannover.

„Als ich Primaner in Paderborn war,“ erzählte mir einmal Weierstraß, „half ich einem der Lehrer bei dem Ordnen der Bibliothek des Gymnasiums. Dabei fand ich in einem Winkel einen Stoß verstaubter Hefte, die noch nicht aufgeschnitten waren; ich blätterte darin und sah zu meinem Erstaunen, daß sie merkwürdige Dinge enthielten: es waren die ersten Hefte des Crelleschen Journals mit den schönen Abhandlungen von Steiner, von denen auch ein Primaner etwas verstehen konnte.“ An äußerer Ordnung lassen heute die Bibliotheken der Gymnasien wohl nichts zu wünschen übrig, ob aber die sauber gebundenen Bände mehr gelesen werden? Wenn nicht, wird man es erklärlich finden, denn auch für einen Mathematiker von Fach ist das Journal für reine und angewandte Mathematik eine zähe Speise, und dasselbe gilt von den Fachjournalen, die im Laufe der Zeit zu dem „Crelle“ hinzugekommen sind. Wer sich aus ihnen über die fortschreitende Entwicklung der Mathematik unterrichten will, hat eine harte Arbeit zu leisten, eine Arbeit, die die Kräfte eines viel beschäftigten Gymnasiallehrers in der Regel übersteigen wird, und doch möchte man wünschen, daß dieser in Fühlung mit seiner Wissenschaft bleibe.

Die hierin liegende Schwierigkeit, die wohl bei allen Fächern auftritt, sich aber bei der exklusivsten aller Wissenschaften am meisten bemerklich macht, ist schon lange empfunden worden; denn bereits im Jahre 1841 hat sich J. A. Grunert in der Ankündigung des von ihm begründeten **Archivs der Mathematik und Physik** folgendermaßen geäußert: „Daß es bei dem gegenwärtigen Zustande der Mathematik und den großen Fortschritten, welche dieselbe täglich macht, außerordentlich schwer ist, sich nur einigermaßen auf der Höhe der Wissenschaft zu erhalten und ihrem raschen Gange zu folgen: darüber dürfte nur *eine* Stimme sein. . . . Die Ursachen hiervon liegen teils in der Art und Weise, wie die neuen Erfindungen vorgetragen werden, indem die betreffenden Darstellungen sich oft auf eine bedeutende Anzahl nicht sehr bekannter Sätze ohne weitere Erläuterung derselben gründen, die dann erst aus andern Schriften mühsam zusammengesucht werden müssen, teils aber auch, und zwar ganz vorzüglich, in der Schwierigkeit, mit welcher die meisten Schriften, in denen die neuen Erfindungen bekannt gemacht

werden, an vielen Orten zu haben sind, so daß viele neue Leistungen in der Wissenschaft einer großen Anzahl trefflicher Mathematiker, wobei ich vorzüglich die in jetziger Zeit so höchst ehrenwerte Klasse der Lehrer der Mathematik an Gymnasien und Lyceen, Militär-, Gewerb- und polytechnischen Schulen und andern höheren Unterrichtsanstalten im Auge habe, unbekannt bleiben." Demnach sei der Hauptzweck der neuen mathematischen Zeitschrift, „daß alle neueren Erfindungen von Wichtigkeit, die in den sämtlichen verschiedenen Teilen der Mathematik, von den niedrigsten bis zu den höchsten und schwierigsten, gemacht werden, in zweckmäßiger, so viel als irgend möglich nur solche Vorkenntnisse, die in Rücksicht auf die Leser, welche ich mir nach dem Obigen denke, mit dem Namen allgemein bekannter bezeichnet werden dürfen, in Anspruch nehmenden, überhaupt also so elementaren Darstellungen, wie es nur irgend die Natur des Gegenstandes gestattet, dem größeren mathematischen Publikum so schleunig als möglich vor Augen geführt werden sollen." Auch sollte „die mit der Mathematik so eng verschwisterte Physik in den Kreis der Zeitschrift hineingezogen werden"; in der Tat enthalten die von Grunert 1841 bis 1872 herausgegebenen 53 Teile eine große Anzahl von Abhandlungen aus der angewandten Mathematik, also nicht nur aus der Physik im engeren Sinne des Wortes, sondern auch aus der Astronomie, Geodäsie, Nautik, Meteorologie, technischen Mechanik usw. Dem Zwecke der Orientierung dienten endlich fortlaufende Übersichten der neu erscheinenden mathematischen und physikalischen Literatur, „bei wichtigern Werken mit kurzer Angabe ihrer Tendenz und ihres wesentlichen Inhalts". Erst in zweiter Linie sollte das Archiv „den Mathematikern und Physikern eine Gelegenheit zur Bekanntmachung eigner Arbeiten darbieten, wobei aber Befleißigung möglichster Kürze sehr zu wünschen ist".

Man wird Grunert die Anerkennung nicht versagen dürfen, daß er sich redliche Mühe gegeben hat, dieses vortreffliche Programm durchzuführen. Er hat eine Menge im Auslande erschienener Aufsätze, die ihm für seine Leser von Wichtigkeit zu sein schienen, teils übersetzt, teils im Auszuge wiedergegeben, und über eine erhebliche Anzahl von Gegenständen, mit denen sich die Forschung damals beschäftigte, ausführliche Berichte verfaßt, so, um einige Themata herauszugreifen, über die literale und die numerische Auflösung algebraischer Gleichungen, die Theorie der Elimination, die Lehre von den unendlichen Reihen, die neuere Theorie der bestimmten Integrale, die hyperbolischen Funktionen, trimetrische und tetraedrische Koordinaten, die Lehre von den Kegelschnitten, die Flächen zweiter Ordnung, die Differentialgeometrie der Kurven und krummen Flächen, die Mechanik starrer Körper.

Leider fand er bei diesen Bestrebungen fast gar keine Unterstützung. Nur O. Schlömilch hat ihm anfangs zur Seite gestanden und ist für die Verpflanzung der Cauchyschen Ideen nach Deutschland mit Erfolg tätig gewesen; das hörte aber auf, als er 1856 seine eigene Zeitschrift begründete. Indem Grunert so auf sich selbst angewiesen war, ist es gekommen, daß das Archiv sich allmählich in ein Organ für die Veröffentlichung mathematischer Abhandlungen verwandelte, wie es die andern Fachjournale auch waren. Unter diesen Abhandlungen finden sich recht wertvolle, es sei nur an die ausgezeichneten Untersuchungen von Seydewitz aus der synthetischen Geometrie und an die schönen Arbeiten von Imschenetzkij über partielle Differentialgleichungen erinnert, im allgemeinen aber waren die Ansprüche beim Archiv nicht so hoch wie anderswo. Schließlich war von der auf dem Titelblatte versprochenen „Rücksicht auf die Bedürfnisse der Lehrer an den höheren Unterrichtsanstalten“ etwas nur in den Literarischen Berichten zu verspüren, in denen auch Lehrbücher der elementaren Mathematik und Physik angezeigt wurden.

Auch R. Hoppe, der das Archiv von 1872 bis 1900 leitete, hat diesen Niedergang nicht aufzuhalten vermocht, vielmehr ist unter ihm auch noch die Pflege der angewandten Mathematik erlahmt. Wenn Hoppe seiner intransigenten Sinnesart nach an und für sich zu einem Redakteur wenig geeignet war, so machte sich das aufs empfindlichste bei einer Zeitschrift geltend, deren große Aufgabe es gewesen wäre, die bedrohte Verbindung zwischen Universität und höherer Schule aufrecht zu erhalten; daß sich zwischen beiden eine Zeit lang eine so tiefe Kluft aufgetan hat, ist wohl zum Teil durch den Mangel an einer solchen vermittelnden Stelle verschuldet worden. Gewiß ist Hoppe, wie sich E. Lampe in dem Nachrufe ausdrückt, „für das Archiv unermüdlich tätig gewesen“, aber diese Tätigkeit bestand im wesentlichen in der Abfassung von eigenen Abhandlungen, die mit den Bedürfnissen der Lehrer an den höheren Unterrichtsanstalten nichts zu tun hatten, und von Besprechungen, die, milde ausgedrückt, sehr einseitig waren.

Mit dem neuen Jahrhundert hat für das Archiv eine neue Ära begonnen. Den Verlag übernahm die um die mathematischen Wissenschaften so verdiente Firma B. G. Teubner in Leipzig, und die Redaktion ging in die Hände von E. Lampe, W. Franz Meyer und E. Jahnke über, die sich damit einführten, daß sie als ihre Absicht die Rückkehr zu dem alten Grunertschen Programm bezeichneten, das freilich, den veränderten Zeiten entsprechend, aus- und umgestaltet werden sollte. Jetzt, wo die ersten zehn Bände der dritten Folge des

Archivs vorliegen, scheint es angebracht, zu fragen, in welchem Umfange diese Absicht verwirklicht worden ist, und welche Stellung das Archiv unter den mathematischen Zeitschriften einnimmt.

Was konnte und durfte die Aufgabe des neuen *Archivs* sein, wenn es nicht mit andern Journalen in Kollision geraten, wenn es eine Zeitschrift eigenartigen Gepräges werden sollte? Eine fortlaufende Berichterstattung über die mathematische Literatur gab seit 1868 das *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, und für die Zeitschriften war seit 1893 die *Revue semestrielle* hinzugekommen; ferner sind zu nennen die seit 1891 der *Deutschen Mathematiker-Vereinigung* erstatteten *Berichte* und das große Unternehmen der *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*. Während die angewandte Mathematik schon früher in der Schlömilch-Cantorschen Zeitschrift für Mathematik und Physik bevorzugt worden war, ist diese seit 1901 unter R. Mehmke und C. Runge ein spezifisches „Organ für angewandte Mathematik" geworden. Freilich war gleichzeitig ihre 1875 eingerichtete Historisch-Literarische Abteilung eingegangen, aber der Geschichte der Mathematik hat sich die seit 1900 erweiterte *Bibliotheca mathematica* gewidmet, und die Besprechung von Werken aus der angewandten Mathematik war ein integrierender Bestandteil der Mehmke-Rungeschen Zeitschrift geworden. Endlich waren eigne Zeitschriften für die Behandlung der pädagogischen, den Unterricht an den höheren Schulen betreffenden Gegenstände entstanden und für die organisatorischen Fragen des Hochschulunterrichts hatten seit 1902 die *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* die Führung übernommen.

So blieb dem Archiv als Grundstock die *Veröffentlichung von Originalarbeiten*, aber nicht in dem Sinne, daß es, wie andre Fachjournale, einer bestimmten Richtung der mathematischen Forschung dienen wollte, sondern daß man von möglichst vielen Forschern kleinere, nicht allzu schwer verständliche, aber doch deren Eigenart charakterisierende Beiträge zu erhalten suchte, um so den Lesern einen Einblick in das Leben der Mathematik zu gewähren. Die Redaktion ist hierfür mit großem Eifer und schönem Erfolge tätig gewesen, denn eine erhebliche Anzahl von Mathematikern des In- und Auslandes hat zu den zehn Bänden Untersuchungen aus den verschiedensten Gebieten der Mathematik beigesteuert.

Besonders willkommen waren solche Artikel, bei denen sich die wissenschaftliche Forschung mit dem Unterricht an den höheren Schulen berührt. Ein solcher Gegenstand ist zum Beispiel die neuere Dreiecksgeometrie, die übrigens schon in dem alten Archiv vertreten gewesen war; hat doch in dem neunten Bande E. W. Grebe die grundlegende

Abhandlung über jenen merkwürdigen Punkt des Dreiecks veröffentlicht, den später E. Lemoine wieder entdeckte. Über Dreiecksgeometrie sind Arbeiten von C. Caspary, K. Cwojdzinski, E. Eckhardt, O. Gutsche, E. Jahnke, E. Janisch, G. Majcen, J. Neuberg, L. Ripert anzuführen. Dazu kommen Abhandlungen von W. Franz Meyer über den ptolemäischen Satz und die Höhen des Tetraeders, von E. Lampe über angenäherte Winkelteilungen, von R. Güntsche, E. Lemoine, L. Ripert über Geometrographie; mag man auch Lemoines Bezeichnung „Genauigkeitskoeffizient" beanstanden, da die Geometrographie der Präzisions-Mathematik zuzurechnen ist, so hat doch die Fragestellung Lemoines sehr anregend gewirkt, und für den Unterricht an den höheren Schulen ist die gelegentliche Einflechtung der Geometrographie sehr zu empfehlen: „den ziemlich erstarrten Formen der Elementar-Planimetrie gegenüber besitzt sie den Reiz eines neuen Elements, sie gibt dem begabten Schüler Gelegenheit, hervorzutreten, sie bewirkt zwanglos und in anregender Form eine Wiederholung der früheren Pensen". Endlich sind auch Fragen aus den Grundlagen der Geometrie von G. Hessenberg, P. Milau, E. B. Wilson behandelt worden.

Da die mathematische Seite der angewandten Mathematik durch die Mehmke-Rungesche Zeitschrift vertreten wird, hat sich das Archiv der andern Seite der Anwendungen zugewandt, nämlich Fragen der experimentellen Physik und Technik. *Das bedeutet eine wesentliche Bereicherung der Literatur*, denn das Archiv hält die Mitte zwischen den Zeitschriften, die ausschließlich für die physikalische Forschung bestimmt sind, wie etwa die Annalen der Physik, und den auf ein größeres Publikum berechneten, mehr populären und didaktischen Darstellungen, wie sie etwa die Naturwissenschaftliche Rundschau bringt. Auch hier ist ein tüchtiger Anfang gemacht worden, da hervorragende Physiker und Techniker sich zur Mitwirkung bereit finden ließen; u. a. haben E. Budde, A. Ebeling und F. Dolezalek, F. Emde, O. Fischer, E. Gehrcke, O. Lummer, W. Nernst, E. Pringsheim, A. Rotth, E. Riecke, J. K. Sumec Beiträge geliefert.

Die eben genannten Artikel haben zum Teil eine mehr berichtende Tendenz, sie dienen dazu, die zweite Aufgabe des Archivs zu erfüllen, *für die Verbreitung der Resultate der mathematisch-physikalischen Forschung zu sorgen.* Diese Aufgabe bleibt trotz oder vielmehr neben den früher genannten Unternehmungen bestehen, denn das Jahrbuch der Fortschritte beschränkt sich auf kurze Referate über die einzelnen Abhandlungen, während doch auch ausführliche, zusammenfassende Berichte über die Entwicklung einzelner Disziplinen während kürzerer oder längerer Zeiträume erwünscht sind; die Berichte der Deutschen Mathe-

matiker-Vereinigung, so ausgezeichnet sie sind, wurden doch im wesentlichen von Forschern für Forscher geschrieben, und die Encyklopädie ist einerseits noch nicht fertig, andrerseits werden aber die fertigen Artikel von den Fortschritten der Wissenschaft überholt. Leider scheint es in der Mathematik sehr schwer zu sein, solche Berichte zu bekommen, denn die zehn Bände enthalten davon nur den einen Artikel von G. Vivanti über die Gleichungen fünften Grades. Die Leiter des Archivs haben es an Bemühungen nicht fehlen lassen und wollen jetzt selbst in die Bresche treten: E. Lampe will eine einfache Darstellung der mechanischen Quadraturen liefern, W. Franz Meyer eine Einführung in die Theorie des Kugelkreises mit Anwendungen auf die nichteuklidische Geometrie geben, und E. Jahnke hat einen Artikel über Vektoren mit Anwendungen auf die Mechanik in Aussicht gestellt. Hoffen wir, daß ihr Beispiel Nachahmung findet.

Zur Berichterstattung gehören auch die Besprechungen. Hier war das Archiv in der günstigen Lage, einen Teil der Aufgabe zu übernehmen, die früher der Historisch-Literarischen Ableitung der Schlömilch-Cantorschen Zeitschrift obgelegen hatte, nämlich die Besprechung der Werke aus der reinen Mathematik; daneben haben die Besprechungen der elementaren Lehrbücher der Mathematik und Physik ihren Platz behalten. In den zehn Bänden hat das Archiv außer sehr zahlreichen kürzeren Anzeigen eine Reihe ausführlicher Kritiken gebracht, die den Wert von selbständigen Abhandlungen besitzen. Es läßt sich nicht leugnen, daß diese Kritiken nicht immer den Beifall der Autoren gefunden haben und daß es zu öffentlichem und nichtöffentlichem Widerspruch gekommen ist. Man wird es jedoch als einen erfreulichen Fortschritt zu begrüßen haben, daß das Archiv auch Besprechungen Aufnahme gewährt, die nicht bloß in den Tönen des Lobes erklingen. Gewiß dürfen wir Mathematiker stolz darauf sein, daß in unsern Zeitschriften ein vornehmer Ton herrscht und daß man, von den Ausnahmen abgesehen, die die Regel bestätigen, durch das Gewicht der Gründe, nicht durch die Wucht der Grobheit zu überzeugen sucht. Auf der andern Seite ist es aber ein ungesunder Zustand, wenn man vor lauter Höflichkeit kein tadelndes Wort zu sagen wagt und wenn auf diese Weise minderwertige Werke es zu recht anerkennenden Besprechungen bringen. Möge also die Redaktion des Archivs fortfahren, sachkundige Kritiker heranzuziehen, auch wenn sie eine scharfe Klinge führen; nur so kann sie die Besprechungen auf der Höhe halten, die diese in den ersten zehn Bänden eingenommen haben.

In engem Zusammenhange mit der Berichterstattung stehen auch der *Sprechsaal für die Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*

und die *Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft*, die seit dem zweiten Bande als Beigabe zu dem Archiv erscheinen.

Hiermit ist jedoch das Programm des neuen Archivs noch nicht erschöpft, vielmehr ist noch eine Einrichtung geschaffen worden, die besondere Beachtung verdient. Wie schon erwähnt wurde, sind für die spezifischen Fragen des Unterrichts an den höheren Schulen und auch für die organisatorischen Fragen des Hochschulunterrichts besondere Organe vorhanden, es fehlte uns aber in Deutschland an einer Zeitschrift, die sich wie die *Nouvelles Annales* in Frankreich und das *Giornale di matematiche* in Italien an die Studierenden wendet und auch Studierende zu Mitarbeitern hat. Um diese Lücke auszufüllen, bringt das Archiv in jedem Hefte Aufgaben, die sich für Studierende eignen, und veröffentlicht die Lösungen, die sich durch Originalität und Eleganz auszeichnen; bis jetzt sind etwa 150 solcher Aufgaben gestellt worden und haben, wie die zahlreichen Lösungen zeigen, Anklang gefunden. Von dieser Einrichtung darf man sich eine über die Universitäten hinausgehende Wirkung versprechen; denn wenn der Studierende auf der Universität das Archiv kennen und schätzen gelernt hat, ist zu hoffen, daß er auch später, im Amte, dies Interesse bewahren und aus dem Archiv wertvolle Anregungen für seine wissenschaftliche Ausbildung entnehmen wird, die doch bei der raschen Entwicklung der Wissenschaft keineswegs mit den wenigen Jahren des Universitätsstudiums beendet ist.

Damit diese Wirkung eintritt, müßten freilich die Dozenten an den Hochschulen die Studierenden auf das Archiv hinweisen und die darin enthaltenen Aufgaben gelegentlich in den Übungen zur Sprache bringen. Ferner müßten die Studierenden die Möglichkeit haben, das Archiv zu lesen, dieses müßte also in den mathematischen Instituten ausliegen. Ob das geschieht, ist bei den geringen Mitteln, über die die meisten dieser Institute verfügen, recht zweifelhaft, und es wäre daher zu wünschen, daß die Unterrichtsverwaltung hilfreich einträte; sind doch, als Hoppe das Archiv leitete, mehrere Exemplare von der Unterrichtsverwaltung an Institute überwiesen worden. Endlich müßte das angefangene Werk fortgesetzt und dafür gesorgt werden, daß überall auf den Bibliotheken der höheren Lehranstalten das Archiv zu finden ist.

Hoffen wir, daß diese Wünsche in Erfüllung gehen, daß in dem Archiv und seinem Kreise sich ein frisches, fröhliches mathematisches Leben entwickeln, daß das Archiv, wenn wir wieder über zehn neue Bände zu berichten haben, ein überall gern gesehenes, unentbehrliches Mitglied der Zeitschriftenfamilie geworden sein möge.

Bemerkung zum Aufsatz des Herrn Mikami.

Meine von Herrn Y. Mikami auf Seite 258 dieses Jahresberichts beanstandete Behauptung (Jahresbericht, Bd. 14, S. 316; Leipzig 1905), daß Matsumura, oder nach Herrn Mikamis verbesserter Leseart Muramatsu, einer der berühmten 47 Ronin gewesen sei, ist aus Herrn T. Hayashis „A brief history of the Japanese mathematics" (Nieuw Archief voor Wiskunde, tweede reeks, deel VII, S. 330; Amsterdam 1905) entnommen worden. Harzer.

Mitteilungen und Nachrichten.

Geeignete Mitteilungen wird der Herausgeber stets mit größtem Danke entgegennehmen.

1. Akademien. Gesellschaften. Vereinigungen. Versammlungen.

Veränderungen im Personalbestande der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Mai 1906.

Neu aufgenommen als Mitglieder:

W. C. Brenke, Lehrer an der Harvard Universität in Cambridge (Mass.), Eustis Street 35.

Das Progymnasium in Berg-Gladbach.

Gestorben:

Kneschke, R., Schulamtskandidat, Braunschweig.

Adressenänderungen:

Bungers, E., Oberlehrer am Gymnasium, Strehlen (Schlesien), Gr. Fischergasse 3/4.

Jung, F., Privatdozent an der Technischen Hochschule, Wien IV, Mittersteig 3a.

Berliner Mathematische Gesellschaft. *Sitzung am Mittwoch den 30. Mai 1906.* Sándor, Beitrag zur Theorie des Fachwerks; Kötter, Über das Foucaultsche Pendel. — *Sitzung am Mittwoch den 27. Juni 1906.* Schafheitlin, Zur Theorie der Besselschen Funktionen; Kötter, Über eine Zweiräderwage.

Breslau. Mathematische Sektion der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Kultur. *Sitzung den 29. Mai 1906.* Pyrkosch: Über eine Verallgemeinerung der Alhazenschen Aufgabe. — Landsberg: Über Ausdrücke, die sowohl differenzierbare wie stetige undifferenzierbare Funktionen darzustellen geeignet sind.

Mathematische Sektion der Gesellschaft Isis in Dresden. In der Zeit vom 1. Juli 1905 bis zum 30. Juni 1906 wurden folgende Vorträge gehalten: *12. Oktober 1905.* Witting: Über die Hamburger Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner. Heger: Über Beziehungen zwischen Kreisen auf der Kugel. — *14. Dezember 1905.* Krause und Henke: Über

den von der Unterrichtskommission an die Meraner Naturforscher-Versammlung erstatteten Bericht zur Reform des mathematischen Unterrichts. Heger: Über das Parallelenaxiom. — *8. Februar 1906.* Weinmeister: Bestimmung der kürzesten Dämmerung. Heger: Konstruktion eines Kreises, der drei gegebene Kreise unter gegebenen Winkeln schneidet. — *15. März 1906.* Krause: Zur Interpolationstheorie. — *21. Juni 1906.* Naetsch: Über eine gewisse zwischen drei Differentialausdrücken bestehende identische Relation.

Mathematische Gesellschaft in Göttingen. *1. Sitzung am 1. Mai 1906.* F. Klein berichtet über seine in Angelegenheiten der Herausgabe der mathem. Enzyklopädie unternommene Pariser Reise, und schildert hierbei insbesondere die verschiedene Stellungnahme der einzelnen französischen Gelehrten den im VII. Bande zu behandelnden Fragen philosophischen Inhalts gegenüber. — *2. Sitzung am 8. Mai 1906.* F. Klein trägt vor über die Axiome der Geometrie. Des näheren bespricht der Vortragende seine eigenen, die projektive Grundlegung der Nicht-Euklidischen Geometrie betreffenden Arbeiten aus den Jahren 1869—71, und geht hierbei auch auf ihre Entstehungsgeschichte genauer ein. — *3. Sitzung am 15. Mai 1906.* Blichfeldt referiert über seine Untersuchungen betreffend die Bestimmung aller endlichen Gruppen linearer Substitutionen. — *4. Sitzung am 21. Mai 1906.* P. Koebe berichtet über die von ihm bezüglich der konformen Abbildung durch Vollkreise begrenzter Gebiete aufeinander erlangten Resultate. — *5. Sitzung am 28. Mai 1906.* C. Caratheodory trägt über neuere die Grundlagen der Mechanik betreffende Auseinandersetzungen vor. Der Vortragende geht insbesondere näher auf die von P. Painlevé herausgearbeitete axiomatische Grundlegung ein, der er die E. Machsche Auffassung der einfachsten Ausdeutung der gegebenen Tatsachen gegenüberstellt.

Colorado Mathematical Society. Unter diesem Namen hat sich im vergangenen November eine mathematische Gesellschaft gebildet, deren erster Vorsitzender Prof. J. M. De Long ist. Die Sitzungen sollen etwa alle sechs Wochen in Denver stattfinden.

Astronomische Gesellschaft. Die Jahresversammlung der Astronomischen Gesellschaft wird am 12.—15. September d. J. in Jena stattfinden.

Schweizerische Naturforschende Gesellschaft. Die 89. Jahresversammlung der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft wird vom 29. Juli bis 1. August d. J. in St. Gallen stattfinden.

2. Preisaufgaben und gekrönte Preisschriften.

(Vacat.)

3. Hochschulnachrichten.

Technische Hochschule zu Hannover. Am 25. Mai d. J. feierte die Technische Hochschule zu Hannover ihr 75jähriges Bestehen. Unter den Ehrendoktoren, die bei dieser Gelegenheit ernannt wurden, befindet sich

auch Professor L. Burmester in München, dessen hervorragende Verdienste in der Kinematik und Beleuchtungslehre damit anerkannt werden sollten. Der Festvortrag des Geh. Baurat Professor Stier behandelte die Organisation der technischen Arbeit. — Im Anschluß an die Feier fand eine Konferenz der Rektoren der Deutschen Technischen Hochschulen statt, in der zu schwebenden Fragen Stellung genommen wurde.

Columbia Universität. Die Columbia Universität erhielt von Frau Louise T. Hoyt 5000 Dollars behufs Begründung eines mathematischen Preises zum Gedächtnis an John D. Van Buren jr., einen Studierenden der Universität im Jahre 1903.

4. Personalnachrichten.

Ernennungen, Auszeichnungen usw.:

Prof. Dr. L. Boltzmann in Wien ist der Preis der Peter Wilhelm Müller-Stiftung zu Frankfurt a. M. für höchste Leistungen auf dem Gebiete der Naturwissenschaften, bestehend in einer goldenen Medaille und einem Ehrensolde von 9000 M., verliehen worden.

Professor Dr. Burmester an der Technischen Hochschule in München wurde von der Technischen Hochschule in Hannover wegen seiner hervorragenden Verdienste um die Kinematik ehrenhalber zum Dr. Ing. promoviert.

Dr. G. Eberhard wurde zum ständigen Mitarbeiter am Astrophysikalischen Observatorium ernannt.

Dr. S. Epsteen wurde zum ao. Professor der Mathematik an der Universität von Colorado ernannt.

Dr. N. R. George wurde zum ao. Professor der Mathematik am Massachusetts Institute of Technology ernannt.

Dr. C. N. Haskin wurde zum ao. Professor der Mathematik an der Universität von Illinois ernannt.

Professor G. A. Miller an der Stanford Universität wurde zum ao. Professor der Mathematik an der Universität von Illinois ernannt.

Professor J. A. Miller an der Universität von Indiania wurde zum o. Professor der Mathematik an der Universität von Wisconsin ernannt.

Professor Dr. E. Müller an der Technischen Hochschule in Wien wurde zum korrespondierenden Mitgliede der K. Akademie der Wissenschaften in Wien gewählt.

Dr. J. Stark, Privatdozent an der Universität Göttingen, ist zum Professor und Dozenten der Physik an der Technischen Hochschule zu Hannover ernannt worden.

Dr. E. B. Van Vleck, Professor an der Wesleyan Universität, wurde zum Professor der Mathematik an der Universität von Wisconsin ernannt.

Professor Dr. F. S. Woods an dem Massachusetts Institute of Technology wurde zum o. Professor der Mathematik daselbst befördert.

Habilitationen.

Dr. L. Hanni hat sich an der Universität Wien als Privatdozent der Mathematik habilitiert.

Dr. F. Jung, Privatdozent an der Deutschen Technischen Hochschule in Prag, ist als Privatdozent für allgemeine Mechanik an die Technische Hochschule zu Wien übergesiedelt.

5. Vermischtes.

Jubelfeier des Vereins Deutscher Ingenieure. Der Verein Deutscher Ingenieure, der zur Zeit rund 20 000 Mitglieder zählt, beging in den Tagen vom 10. bis 14. Juni d. J. unter sehr reger Beteiligung von Mitgliedern, Gästen und Ehrengästen die Feier seines 50jährigen Bestehens. Bekanntlich hat der Verein Deutscher Ingenieure von Anfang an der Reform des höheren Schulwesens auf dem Gebiete des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts große Aufmerksamkeit zugewendet, wie dies auch bei der Jubelfeier wieder deutlich hervortrat. In der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte ist der Verein durch seinen Direktor, Geheimen Baurat Dr. Peters, vertreten.

Franklin-Feier. Die 200. Wiederkehr des Geburtstages von Benjamin Franklin ist vom 17. bis 20. April von der American Philosophical Society gefeiert worden; vgl. diesen Jahresbericht S. 227—228. Fast 150 Vertreter gelehrter Gesellschaften und von Universitäten nahmen an der Feier teil. Die American Mathematical Society war durch Professor Huntington vertreten. Unter den wissenschaftlichen Mitteilungen waren von mathematischem Interesse die folgenden: Darwin, The figure and stability of a liquid satellite; Royce, The present position of the problem concerning the first principles of scientific theory; Michelson, Form analysis; Lorentz, On positive and negative electrons.

Grabdenkmal für Weierstraß. Das Grabdenkmal für Weierstraß (s. diesen Jahresbericht S. 72) ist ausgeführt und auf dem St. Hedwigs-Kirchhof, Berlin N., Liesenstraße 8, aufgestellt worden. Über einem Sockel aus graublauem bayrischen Syenit erhebt sich ein 2 m hoher Obelisk aus poliertem schwarzen schwedischen Granit, auf dessen Vorderseite unter einem von dem Kirchenvorstande vorgeschriebenen Kreuz die Worte

KARL WEIERSTRASS
geb. 31. Oktober 1815
zu Ostenfelde
gest. 19. Februar 1897
zu Berlin

in erhabner Blockschrift eingemeißelt sind. Die Grabstelle liegt schräg hinter dem Wohnhause des Kirchhofs-Inspektors, fast am Ende des ersten hinter diesem Hause nach rechts abgehenden Weges.

Literarisches.

1. Notizen und Besprechungen.

Franz Neumanns Gesammelte Werke. Herausgegeben von seinen Schülern. Zweiter Band. Mit einem Bildnis Franz Neumanns aus dem 86. Lebensjahr in Heliogravüre. [XVI u. 620 S.] 4⁰. Leipzig, B. G. Teubner.

Elf Jahre erst nach dem Tode des Altmeisters der mathematischen Physik, dreißig Jahre, nachdem der damals 78 jährige seine Lehrtätigkeit eingestellt, ist es möglich geworden, eine Gesamtausgabe seiner wissenschaftlichen Abhandlungen erscheinen zu lassen. Daß unter den Gesamtausgaben der Werke hervorragender Mathematiker und Physiker die Werke Franz Neumanns

bisher fehlten, ist von vielen schmerzlich bedauert. Und wenn diese Lücke nunmehr ausgefüllt ist, ausgefüllt, ohne daß dem Herausgeber irgend welche Unterstützungen seitens einer Akademie oder einer gelehrten Gesellschaft zu Gebote standen, so ist das vor allem der rastlosen Tätigkeit des Herrn Carl Neumann zu danken, der, unterstützt von anderen Schülern seines Vaters, diesem in der schön ausgestatteten Ausgabe ein bleibendes Denkmal errichtet hat. — Von dem auf drei Bände berechneten Werke ist soeben der zweite Band erschienen, während der erste und dritte später folgen sollen.

Der zweite Band, bei dessen Herausgabe neben Herrn C. Neumann, dem Leiter des Ganzen, die Herren E. Dorn-Halle a. S., O. E. Meyer-Breslau, C. Pape, früher in Königsberg, L. Saalschütz-Königsberg, W. Voigt-Göttingen, P. Volkmann-Königsberg, K. Von der Mühll-Basel, H. Weber-Straßburg sowie der Verfasser dieses Referats tätig gewesen sind, enthält F. Neumanns Arbeiten über Wärme, über Elastizität sowie die vor 1840 erschienenen optischen Arbeiten. Die sieben ersten Abhandlungen betreffen die Wärme; drei derselben sind zuerst in Poggendorffs Annalen erschienen: Nr. 1, Untersuchungen über die spezifische Wärme der Mineralien, 1831; Nr. 2, Bestimmung der spezifischen Wärme des Wassers in der Nähe des Siedepunktes, 1831; Nr. 6, Beobachtungen über die spezifische Wärme verschiedener, namentlich zusammengesetzter Körper, 1834. Zwei weitere Abhandlungen: Nr. 3, Theoretische Untersuchungen über die zur Bestimmung der spezifischen Wärme dienende Methode der Mischung; Nr. 4, Wie man durch geeignete Beobachtungen den absoluten Wert der inneren Leitungsfähigkeit eines homogenen Körpers zu bestimmen vermag, sind hier zum ersten Male nach Neumanns hinterlassenen Manuskripten mitgeteilt. In beiden handelt es sich um die Entwicklung von Formeln, die in der Abhandlung 1 benutzt sind, ohne daß dort ihre vollständige Ableitung angegeben ist, sowie um Erweiterung der in 1 vorkommenden theoretischen Betrachtungen. Nr. 5, Commentatio de emendanda formula, per quam calores corporum specifici ex experimentis methodo mixtionis institutis computantur, ist 1834 von Neumann als Universitätsschrift beim Antritt seiner ordentlichen Professur veröffentlicht. Gerade diese Abhandlung, die wohl wenig bekannt geworden ist, ist ganz besonders charakteristisch für die Art und Weise, wie Neumann die Theorie dem Experiment dienstbar zu machen gewußt, und für die Mühe und Sorgfalt, die er auf die eingehende Diskussion der Beobachtungen verwendet hat. Über den Wert theoretischer Untersuchungen für die Beobachtungsmethode spricht sich Neumann in einem der Abhandlung 5 beigefügten Manuskript, das hier ebenfalls zum ersten Male mitgeteilt wird, folgendermaßen aus:

„Zwei große Vorteile kann man bei experimentellen Untersuchungen über die Wärme aus der Theorie ziehen. Einerseits nämlich kann man, auf Grund der Theorie, die zweckmäßigste Einrichtung der Versuche im voraus bestimmen; und andererseits kann man von gewissen Fehlern (die von Einflüssen herrühren, welche sich im Versuch der direkten Beobachtung entziehen) mittels der Theorie die möglichen Grenzen angeben. Selbstverständlich wird dabei vorausgesetzt, daß man über die Werte der in der Theorie enthaltenen Konstanten bereits irgend welche approximative Kenntnisse besitzt."

„In den Phänomenen der Wärme sind, neben andern Elementen,

wesentlich tätig und von wesentlichem Einfluß: die innere und äußere Wärmeleitungsfähigkeit und die spezifische Wärme. Die passende Einrichtung des Experiments besteht darin, daß man demjenigen Element, welches näher studiert werden soll, den vorherrschenden Effekt zuteil werden läßt. — Eine völlige Unabhängigkeit von den übrigen Elementen ist nicht zu erreichen; aber man wird bestrebt sein, diese störenden Einflüsse möglichst gering zu machen; und dazu wird es nötig sein, den in Rede stehenden Effekt auf theoretischem Wege durch einen bestimmten analytischen Ausdruck darzustellen, der nähere Auskunft gibt über die Abhängigkeit des Effektes von allen überhaupt in Betracht kommenden Elementen."

Die Abhandlung Nr. 7 endlich, 1862 in den Annales de chimie et de physique, T. 66, veröffentlicht, betrifft Neumanns neue Methode zur Bestimmung der inneren und äußeren Wärme-Leitungsfähigkeit. Das Wesen dieser Methode besteht darin, daß nicht der stationäre, sondern der mit der Zeit variable Zustand beobachtet, und daß gleichzeitig der absolute Wert der inneren und äußeren Leitungsfähigkeit bestimmt wird. Vorangeschickt ist der kurzen Abhandlung ein Brief Neumanns an Radau aus dem Jahre 1862, während am Schluß ein Aufsatz von Radau abgedruckt ist, der 1862 in der Zeitschrift Cosmos unter dem Titel: „Sur la conductibilité calorifique" veröffentlicht ist. Radau sucht darin einen Überblick über das Wesen und die Tragweite der Neumannschen Untersuchungen über Wärmeleitung und ihr Verhältnis zu den Arbeiten Angströms zu geben. Er bespricht ferner die auf Neumanns Anregung entstandenen Arbeiten von Schumann und Saalschütz, sowie Neumanns Beobachtungen der Erdtemperatur.

Waren diese Arbeiten zur Wärmelehre wesentlich experimenteller Natur, die Theorie nur soweit verfolgend, wie es die direkte Anwendung auf die Beobachtungen erfordert, so folgt als Nr. 8 die rein theoretische Arbeit über die doppelte Strahlenbrechung (Poggend. Ann. 25, 1832). In dieser Arbeit sind zum ersten Male die Navierschen Gleichungen der Elastizität auf kristallinische Medien ausgedehnt, und aus ihnen sind dann, unter gewissen Annahmen über die sechs in den Gleichungen auftretenden Konstanten, die Fresnelschen Gesetze der Doppelbrechung theoretisch abgeleitet. Gleichzeitig hatte Cauchy eine andere Ableitung gegeben, doch sind damals nur die Resultate veröffentlicht, die Entwicklungen später. Eins der wichtigsten Resultate in Neumanns Arbeit ist das, daß die elastischen Gleichungen nur dann auf die Fresnelschen Gesetze führen, wenn man die Polarisationsebene, abweichend von Fresnel, definiert als die durch die Wellennormale und die Schwingungsrichtung gelegte Ebene. Beigefügt ist der Abhandlung Nr. 8 ein großer Teil der Erläuterungen, die der Verfasser des vorliegenden Referats seiner Ausgabe dieser Abhandlung in den Klassikern der exakten Wissenschaften (1896) beigegeben hatte.

An diese Arbeit schließt sich eine Reihe weiterer, die in Poggendorffs Annalen in den Jahren 1832—1835 veröffentlicht sind. Von ihnen betrifft Nr. 9 die Formeln für die elliptische Polarisation bei der Metallreflexion, nebst Anwendung auf Beobachtungen, Nr. 10 die thermischen, optischen und kristallographischen Achsen des Gipses, Nr. 11 das Elastizitätsmaß kristallinischer Substanzen, Nr. 12 die optischen Achsen und die Farben zweiachsiger Kristalle im polarisierten Licht. Hier wird der bis dahin

schwankende Begriff der optischen Achsen zweiachsiger Kristalle festgelegt und gezeigt, daß man darunter die Normalen der Kreisschnitte der Elastizitätsfläche zu verstehen hat. Nr. 13 handelt von den optischen Eigenschaften der zwei- und eingliedrigen Kristalle.

Die umfangreichste, mehr als ein Drittel des ganzen Bandes umfassende Abhandlung ist die in den Abhandlungen der Berliner Akademie im Jahre 1835 erschienen Arbeit über Reflexion (Nr. 14). Der Titel derselben ist „Theoretische Untersuchungen der Gesetze, nach welchen das Licht an der Grenze zweier vollkommen durchsichtigen Medien reflektiert und gebrochen wird"; in den Separatabzügen lautet der Titel zutreffender: „Über den Einfluß der Kristallflächen bei der Reflexion des Lichtes und über die Intensität des gewöhnlichen und ungewöhnlichen Strahls". Wie in Nr. 8, handelt es sich um rein theoretische Untersuchungen, aber während Neumann dort bei Ableitung der Gesetze der doppelten Strahlenbrechung auf die allerersten Ursachen der Erscheinung zurückgreift, wird hier (in Nr. 14) ein gewisser Kreis von einfachen Vorstellungen zugrunde gelegt, die durch die Erfahrung höchst wahrscheinlich gemacht sind. Neumann beginnt, nachdem er einleitend die bisherigen Untersuchungen über Reflexion an nicht kristallinischen Medien besprochen, mit der Aufstellung der Grundsätze, auf denen seine Reflexionstheorie beruht. Er läßt dabei die longitudinale Welle, auf die die Theorie der doppelten Strahlenbrechung neben den beiden transversalen geführt hatte, ganz bei Seite, nimmt die Schwingung als genau transversal an und definiert die Polarisationsebene, abweichend von Fresnel, ebenso wie in der Abhandlung Nr. 8. Als Grenzbedingungen führt er, zum Teil abweichend von Fresnel, die Gleichheit aller drei Komponenten der Bewegung für Punkte der Grenzfläche ein und nimmt dazu das Prinzip der lebendigen Kraft. Auf dieser Grundlage behandelt er zuerst die Reflexion an der Genze zweier unkristallinischen Medien und gelangt genau zu den Fresnelschen Formeln, die ihrerseits durch die Erfahrung bestätigt sind. Dieselben einfachen Prinzipien reichen auch aus zur Behandlung der Kristallreflexion. Nacheinander werden die Formeln für einachsige und zweiachsige Kristalle entwickelt, und zwar nicht nur für den Fall, daß das aus einem unkristallinischen Medium kommende Licht an einer Kristallfläche reflektiert wird, sondern auch für den Fall der Reflexion im Innern des Kristalls, resp. für den Austritt des Lichtes aus diesem. Es liegt in der Natur der Sache, daß die Durchführung der Theorie sehr umfangreiche und teilweise schwer übersichtliche Rechnungen erfordert. Diese Rechnungen werden überall bis zum letzten Punkte durchgeführt, und es wird eine große Fülle von Einzelresultaten abgeleitet, auf die einzugehen hier hier zuweit führen würde. Ein Teil der Resultate wird an vorhandenen Beobachtungen geprüft und mit der Erfahrung in guter Übereinstimmung gefunden. — Diese wichtige Arbeit war nicht nur die erste, welche die Gesetze der Kristallreflexion streng theoretisch begründete; sie ist auch die eingehendste, die überhaupt über den Gegenstand vorhanden ist. Zu ihrem Verständnis ist in der neuen Ausgabe eine größere Reihe von Erläuterungen hinzugefügt, die größtenteils von C. Neumann herrühren, einige auch vom Verfasser dieses Referats. Übrigens sind auch den andern Abhandlungen dieses Bandes, wo es nötig schien, erläuternde Bemerkungen beigefügt, nirgends aber so zahlreiche wie in Nr. 14. — Am Schluß von Nr. 14 sind auch die auf die Prioritätsfrage

zwischen Neumann und Mac Cullagh bezüglichen Veröffentlichungen abgedruckt.

Die zwei letzten Abhandlungen des Bandes sind als Ergänzungen zu Nr. 14 anzusehen. Nr. 15 betrifft ein photometrisches Verfahren, die Intensität der ordentlichen und außerordentlichen Strahlen, sowie die des reflektierten Lichtes zu bestimmen. Daran schließt sich eine strenge Ableitung der Fresnelschen Formeln für die totale Reflexion. Nr. 16 endlich enthält eine Reihe systematischer Beobachtungen über den Einfluß der Kristallflächen auf das reflektierte Licht.

Die sämtlichen Abhandlungen dieses Bandes dürften nicht allein historisches Interesse gewähren; wer sie eingehend studiert, wird aus ihnen reiche Anregung auch heute noch erfahren.

Halle a. S., Mai 1906. A. Wangerin.

Dr. Otto Biermann, o. ö. Professor der Mathematik an der deutschen technischen Hochschule in Brünn: **Vorlesungen über mathematische Näherungsmethoden.** VI u. 226 S. 35 Figuren im Text. Braunschweig, Vieweg u. Sohn, 1905.

Sechs Studienjahre hat der Verf. Vorlesungen über diesen Gegenstand gehalten. Sein Buch bietet eine glückliche Auswahl aus der Fülle des Stoffes, der unter den Begriff der Näherungsmethoden fällt, und ist für jeden verständlich, der die Anfangsgründe der Infinitesimalrechnung und der analytischen Geometrie beherrscht.

Das Rechnen mit genauen und ungenauen Zahlen bildet den Anfang. Bei der Multiplikation und Division wird auch die Fouriersche Methode auseinandergesetzt. Der zweite Abschnitt beschäftigt sich mit der Auswertung unendlicher Reihen, wie sie in der höheren Analysis auftreten. Als Beispiele dienen die Berechnung der Logarithmen und die der Wurzeln von ganzen Zahlen. Die näherungsweise Auflösung von Gleichungen ist das Thema des dritten Abschnitts. Nach Erörterung der graphischen Darstellung einer Funktion wird gezeigt, wie man die Wurzeln einer quadratischen Gleichung durch den Schnitt einer Geraden mit der festen Parabel $y = x^2$ findet, die Wurzeln einer Gleichung dritten und vierten Grades durch den Schnitt der Parabel $y = x^2$ mit einer gewissen Hyperbel und die Wurzeln einer Gleichung n-ten Grades durch den Schnitt der beiden Kurven

$$y = x^{n-1}, \quad a_0 xy + a_1 y + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n = 0.$$

Auch die Mehmkesche Methode zur graphischen Auflösung von Gleichungen wird ausführlich dargelegt und zuletzt die Konstruktion der Lösungen eines Systems von Gleichungen, insbesondere von linearen, vorgeführt. Dann folgt die rechnerische Bestimmung der Wurzeln einer algebraischen Gleichung mittels der Newtonschen Näherungsmethode und nach dem auf Grund dieser Methode angegebenen Verfahren von Horner. Es wird noch gesagt, wie man die Newtonsche Methode auf Gleichungssysteme ausdehnen kann, und schließlich werden kurz die transzendenten Gleichungen besprochen.

Der vierte und längste Abschnitt des Buches bezieht sich auf die Interpolations- und Differenzenrechnung. Die Interpolation durch ganze rationale Funktionen (Formeln von Lagrange und Newton) wird auch im Falle zweier Veränderlicher durchgeführt, worüber der Verf. wie über so viele

andere Fragen aus dem Gebiet der Näherungsmethoden selbst gearbeitet hat (vgl. Bd. 14 der Monatshefte für Mathematik und Physik). Bei der Interpolation durch trigonometrische Ausdrücke wird auch einiges über die harmonischen Analysatoren berichtet und der Apparat von Henrici unter Beifügung einer schematischen Abbildung erläutert. Von den zahlreichen Methoden zur rechnerischen Bestimmung der Koeffizienten der Näherungsfunktion widmet der Verf. nur der Rungeschen (Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 48) eine eingehende Auseinandersetzung. Der fünfte Abschnitt zeigt, wie man die Interpolationsrechnung zur näherungsweisen Quadratur und Kubatur verwendet. Am Schluß dieses Abschnitts kommt die näherungsweise Integration der Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ zur Sprache. Dann folgt die Beschreibung einiger mathematischer Instrumente, z. B. des Rechenschiebers und des Amslerschen Polarplanimeters. Ein Nachtrag bringt etwas über Ausgleichungsrechnung.

Zahlreiche Beispiele, die der Verf. jedesmal sorgfältig und genau durchführt, sind in die Darstellung eingefügt und erleichtern das Verständnis dieses vortrefflichen Buches.

Bonn, April 1906. G. Kowalewski.

Hermann Brunn, Beziehungen des Du Bois-Reymondschen Mittelwertsatzes zur Ovaltheorie. Eine mathematische Studie. Berlin, Georg Reimer, 1905. X u. 135 S.

Den Ausgangspunkt dieser Untersuchungen bildet das bekannte Abelsche Lemma über Ausdrücke von der Form

$$\varepsilon_0 a_0 + \varepsilon_1 a_1 + \cdots + \varepsilon_n a_n.$$

Es sagt aus, daß ein solcher Ausdruck unter den Bedingungen

$$\varepsilon_0 \geqq \varepsilon_1 \geqq \cdots \geqq \varepsilon_n > 0,$$
$$H < a_0,\ a_0 + a_1,\ \cdots,\ a_0 + a_1 + \cdots + a_n < K$$

zwischen den Grenzen $\varepsilon_0 H$ und $\varepsilon_0 K$ liegt.

Dieser Satz wird hier in der Weise verallgemeinert, daß man die Größen $a_0, a_1, \cdots, a_n$ als komplexe Zahlen (mit zwei oder auch mehr als zwei unabhängigen Einheiten) betrachtet, während die ε nach wie vor reell bleiben und den angegebenen Ungleichungen genügen. Versinnlicht man die komplexen Zahlen durch die Punkte eines kartesischen Raumes, so läßt sich die Verallgemeinerung des Abelschen Satzes so aussprechen:

Gehören die Punkte

$$a_0,\ a_0 + a_1,\ \cdots,\ a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

dem Eigebiet $\mathfrak{E}$ an, so liegt

$$\varepsilon_0 a_0 + \varepsilon_1 a_1 + \cdots + \varepsilon_n a_n$$

in dem Eigebiet $\varepsilon_0 \mathfrak{E}$, welches aus $\mathfrak{E}$ dadurch entsteht, daß man alle Radienvektoren mit ε_0 multipliziert (Dilatation vom Anfangspunkt aus im Verhältnis $1 : \varepsilon_0$).

Ein Ei- oder Ovalgebiet ist ein (abgeschlossener) Bereich, der die Eigenschaft hat, daß man von jedem seiner Punkte zu jedem andern in gerader Strecke gelangen kann, ohne den Bereich zu verlassen. Solche Bereiche

hat Herr Brunn schon in seiner Dissertation (Über Ovale und Eiflächen, München, 1887) studiert. In seinen späteren Arbeiten über diesen Gegenstand berührte er sich dann z. T. mit Minkowski, der die Eigebiete für die Zahlentheorie verwertete.

Um die oben angegebene Verallgemeinerung des Abelschen Lemmas auf einen möglichst genauen Ausdruck zu bringen, hat man für $\mathfrak{E}$ das engste Eigebiet einzusetzen, welches die Punkte $a_0, a_0+a_1, \cdots, a_0+a_1+\cdots+a_n$ enthält. Dem Gebiet $\varepsilon_0\mathfrak{E}$ gehört dann, wie der Brunnsche Satz aussagt, der Punkt $\varepsilon_0 a_0 + \varepsilon_1 a_1 + \cdots + \varepsilon_n a_n$ an. Wann liegt der Punkt auf der Begrenzung von $\varepsilon_0\mathfrak{E}$? Herr Brunn gibt die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Eintreten dieses besonderen Falles an. Die dabei benutzten Hilfsbetrachtungen sind auch an und für sich von Interesse.

Sieht man von der Voraussetzung ab, daß die ε positiv und mit wachsendem Index nicht zunehmend sind, und fordert nur, daß sie eine monotone Folge bilden, so entsteht ein Satz, bei dessen Formulierung Herr Brunn sich des Begriffs „Punktsummengebiet" bedient. Addiert man auf alle möglichen Arten einen Punkt a des Bereiches $\mathfrak{A}$ und einen Punkt b des Bereiches $\mathfrak{B}$, so entsteht „das Punktsummengebiet aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$". Herr Brunn bezeichnet es mit $\mathfrak{A} \dotplus \mathfrak{B}$. Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Eigebiete, so ist auch $\mathfrak{A} \dotplus \mathfrak{B}$ ein solches; überhaupt ist $\lambda\mathfrak{A} \dotplus \mu\mathfrak{B}$ ein Eigebiet, wenn λ und μ beliebige reelle Zahlen bedeuten. Der angekündigte Satz sagt nun aus, daß der Punkt $\varepsilon_0 a_0 + \varepsilon_1 a_1 + \cdots + \varepsilon_n a_n$ dem Eigebiet

$$(\varepsilon_0 - \varepsilon_n)\mathfrak{E} \dotplus \varepsilon_n\mathfrak{E}$$

angehört. Auch hier untersucht der Verfasser genau, wann der Punkt auf der Begrenzung des Eigebiets liegt.

Im zweiten Abschnitt wird sozusagen n unendlich groß angenommen, d. h. es werden unendliche Reihen von der Form

$$\varepsilon_0 a_0 + \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \cdots$$

betrachtet, wo die a wieder komplexe Zahlen (mit irgend einer Anzahl von Einheiten) und die ε positiv sind und den Bedingungen $\varepsilon_0 \geqq \varepsilon_1 \geqq \varepsilon_2 \geqq \cdots$ genügen. Wenn

$$\lim_{\nu=\infty} (a_0 + a_1 + \cdots + a_\nu)$$

existiert, so konvergiert die betrachtete Reihe und der ihrer Summe entsprechende Punkt liegt in dem Eigebiet $\varepsilon_0\mathfrak{E}$, wobei $\mathfrak{E}$ das engste die Punkte

$$a_0,\ a_0 + a_1,\ a_0 + a_1 + a_2,\ \cdots$$

enthaltende Eigebiet ist. Nimmt man nur an, daß die ε eine monotone Folge bilden und nicht nach $+\infty$ oder $-\infty$ konvergieren, so zeigt sich, daß der Punkt $\varepsilon_0 a_0 + \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \cdots$ dem Eigebiet

$$(\varepsilon_0 - \varepsilon)\mathfrak{E} \dotplus \varepsilon\mathfrak{E} \qquad (\varepsilon = \lim \varepsilon_n)$$

angehört. Auch diesmal wird eingehend untersucht, wann der Punkt auf die Begrenzung des Eigebiets fällt.

Im dritten Abschnitt kommt der Gegenstand zur Sprache, den der Titel der Schrift ankündigt. Es ist bekannt, daß der Mittelwertsatz von Bonnet, du Bois-Reymond, Weierstraß aufs engste mit dem Abelschen Lemma zusammenhängt. Dies führt dazu, eine Verallgemeinerung dieses

Mittelwertsatzes zu suchen, die in derselben Beziehung zu der Brunnschen Verallgemeinerung des Abelschen Lemmas steht. Der Verfasser beschränkt sich hierbei auf die Ebene. Es sei t eine Hilfsveränderliche, die das Intervall (t_0, t') durchläuft, und

$$z = x + iy = \varphi(t) + i\psi(t)$$

sei ein stetiger und rektifizierbarer Kurvenbogen. Ferner sei $f(x, y) = \chi(t)$ eine positive Funktion, die nie zunimmt, wenn t von t_0 nach t' geht, $g(x, y, i)$ eine komplexe Funktion von x und y derart, daß die im folgenden auftretenden Integrale einen Sinn haben. Dann gilt die Formel

$$\int\limits_{t=t_0}^{t=t'} fg\,dz = \chi(t_0)\left[\alpha_1 \int\limits_{t=t_0}^{t=t_1} g\,dz + \alpha_2 \int\limits_{t=t_0}^{t=t_2} g\,dz\right], \tag{1}$$

wo $\alpha_1, \alpha_2 \geqq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ ist und $t_0 \leqq t_1 \leqq t_2 \leqq t'$. Um diese Formel aus den Resultaten des ersten Abschnitts zu gewinnen, muß man noch zeigen, daß das engste Eigebiet, welches den stetigen Kurvenbogen

$$z = \int\limits_{t=t_0}^{t=t} g(x, y, i)\,dz$$

enthält, von den Sehnen des Bogens erzeugt wird.[1])

Für den Fall, daß man $f(x, y)$ nur als reell und längs des Integrationsweges monoton voraussetzt, stellt Herr Brunn folgende Formel auf:

$$\int\limits_{t=t_0}^{t=t'} fg\,dz = (\chi(t_0) - \chi(t'))\left(\alpha \int\limits_{t=t_0}^{t=t_1} g\,dz + \beta \int\limits_{t=t_0}^{t=t_2} g\,dz\right) \tag{2}$$

$$+ \chi(t')\left(\alpha \int\limits_{t=t_0}^{t=t_3} g\,dz + \beta \int\limits_{t=t_0}^{t=t_4} g\,dz\right),$$

wo $\alpha, \beta \geqq 0$, $\alpha + \beta = 1$ ist und t_1, t_2, t_3, t_4 in (t_0, t') liegen. Man kann aber direkt aus (1) eine viel einfachere Formel gewinnen. Unter den hier gemachten Voraussetzungen genügt nämlich die Funktion $(\chi(t') - f) : (\chi(t') - \chi(t_0))$ der Bedingung, längs des Integrationsweges positiv und nie zunehmend zu sein. Man darf sie also an Stelle von f in Formel (1) einsetzen. Dann erhält man aber:

$$\int\limits_{t=t_0}^{t=t'} fg\,dz = \chi(t_0)\left[\alpha_1 \int\limits_{t=t_0}^{t=t_1} g\,dz + \alpha_2 \int\limits_{t=t_0}^{t=t_2} g\,dz\right] \tag{2'}$$

$$+ \chi(t')\left[\alpha_1 \int\limits_{t=t_1}^{t=t'} g\,dz + \alpha_2 \int\limits_{t=t_2}^{t=t'} g\,dz\right].$$

An Stelle der vier Größen t_1, t_2, t_3, t_4 hat man hier nur zwei. Referent hat unabhängig von Herrn Brunn und vor dem Erscheinen der vorliegenden

1) Einen Beweis dieses Satzes hat Referent schon vor Herrn Brunn in einem Aufsatz in Bd. 117 des Crelleschen Journals gegeben (S. 269). Er ist reproduziert in Bd. 14 dieses Jahresberichts (S. 85 ff.).

Studie, deren Vorrede um Weihnachten 1904 geschrieben ist, eine etwas anders lautende Verallgemeinerung des Weierstraßschen Mittelwertsatzes auf der Breslauer Naturforscherversammlung vorgetragen (vgl. diesen Jahresbericht, Bd. XIV, S. 85 ff.). Diese Verallgemeinerung läßt sich durch folgende Formel ausdrücken:

$$(3) \qquad \int_{t_0}^{t'} \chi(t)\gamma(t)\,dt = \chi(t_0)\left[\alpha_1 \int_{t_0}^{t_1} \gamma(t)\,dt + \alpha_2 \int_{t_0}^{t_2} \gamma(t)\,dt\right] + \chi(t')\left[\alpha_1 \int_{t_1}^{t'} \gamma(t)\,dt + \alpha_2 \int_{t_2}^{t'} \gamma(t)\,dt\right].$$

$\gamma(t)$ ist eine komplexe Funktion von t. Ist der Brunnsche Integrationsweg $z = \varphi(t) + i\psi(t)$ so beschaffen, daß $\varphi(t)$, $\psi(t)$ stetige Ableitungen haben, so folgt aus (3), wenn man $\gamma(t) = g(x, y, i)(\varphi'(t) + i\psi'(t))$ setzt, sofort die Formel (2').

Es wäre aber falsch, die Aufstellung der Formeln (1) und (2) (und noch zweier anderer Verallgemeinerungen des Bonnetschen und des Weierstraßschen Satzes) als das Hauptergebnis der Brunnschen Arbeit zu betrachten. Der schwierige Teil seiner Untersuchungen fängt erst an nach Aufstellung dieser Formeln und bezieht sich auf das „Randproblem", wie er es kurz nennt. Wir wissen, daß die linke Seite der Formel (1) einen Punkt des Eigebietes $\mathfrak{E}$ darstellt, welches man erhält, wenn man rechts die Größen α_1, α_2 und t_1, t_2 unter Beachtung der Bedingungen

$$\alpha_1,\ \alpha_2 \geqq 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad t_0 \leqq t_1 \leqq t_2 \leqq t'$$

variieren läßt. Wann fällt der Punkt auf den Rand von $\mathfrak{E}$? Die analoge Frage kann man bei (2) stellen. Herr Brunn erledigt sie mit aller nur wünschenswerten Gründlichkeit.

Bonn, April 1906. G. Kowalewski.

H. Poincaré, Membre de l'Institut, **der Wert der Wissenschaft.** Autorisierte deutsche Ausgabe von E. Weber. Mit Anmerkungen von H. Weber in Straßburg i. E. 240 S. 8. Leipzig 1906, B. G. Teubner.

Allen denen, die in Deutschland der Entwicklung der mathematischen und physikalischen Wissenschaft und ihrer stets enger werdenden Beziehung zur Philosophie und zu den Geisteswissenschaften Interesse entgegenbringen, wird das Erscheinen einer deutschen Ausgabe von dem neuesten Werk des geistvollen Franzosen willkommen sein, der selbst unter den Förderern der Wissenschaft unter den vordersten steht, während er andererseits mit Scharfsinn den Quellen und logischen Bedingungen der menschlichen Erkenntnis nachspürt. Das vorliegende Werk hat ähnliche Ziele wie das gleichfalls in deutscher Übersetzung erschienene Werk desselben Verfassers „Wissenschaft und Hypothese", bietet aber ein für sich abgeschlossenes Ganze, dessen Verständnis durch die meisterhafte Sprache und die kunstvolle Darstellung auch dem Laien zugänglich ist. Der Verfasser gibt im ersten Teil eine Darlegung seiner Anschauungen, wie in uns die Vorstellungen von Raum und Zeit entstanden sein könnten. Der zweite Teil enthält eine Darstellung des gegenwärtigen Standes der Physik und der besonders durch die neuen Untersuchungen über Elektrizität hervorgerufenen Krisis, in der

die früher für vollständig gesichert gehaltenen Prinzipien ins Wanken geraten sind, und die merkwürdigerweise auf die philosophischen Anschauungen der Zeit zurückgewirkt haben. Auch der Laie wird sich aus dieser Darstellung eine richtige Vorstellung von dem Inhalt der Fragen, um die es sich dabei handelt, bilden können. Der dritte Teil endlich mündet wieder in den Ausgangspunkt ein und kehrt zu der durch den Titel des Werkes gestellten Frage nach dem Wert der Wissenschaft zurück, indem er das Verhältnis der Wissenschaft zur Wirklichkeit einer Untersuchung unterwirft. Die der deutschen Ausgabe beigefügten Anmerkungen haben teils den Zweck, Einzelheiten, die dem deutschen Leser vielleicht weniger zur Hand sind, zu erläutern, teils die behandelten Fragen noch aus einem etwas anderen Gesichtspunkt zu betrachten.

Straßburg i. E. H. Weber.

Otto Fischer, Dr. phil. et med., Professor an der Universität Leipzig. **Theoretische Grundlagen für eine Mechanik der lebenden Körper mit speziellen Anwendungen auf den Menschen sowie auf einige Bewegungsvorgänge an Maschinen.** (A. u. d. T.: B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen.) Mit 67 Textfiguren und 4 Tafeln. [X u. 372 S.] gr. 8. Leipzig 1906, B. G. Teubner.

Durch seine Arbeiten über die Mechanik der lebenden Körper sah sich der Verfasser genötigt, unter anderen zunächst allgemeine Untersuchungen über die Kinetik von Gelenksystemen mit beliebigen Freiheitsgraden anzustellen; denn die zahlreichen Arbeiten, welche über die Kinetik der bei den Maschinen verwendeten Getriebe vorlagen, konnten der Untersuchung der allgemeinen n-gliedrigen Gelenksysteme verhältnismäßig wenig nützen, da sie sich nur mit einem ganz speziellen Falle, dem der zwangläufigen Gelenksysteme, beschäftigen. Das vorliegende Buch gibt nun eine zusammenfassende Darstellung der Untersuchungen des Verfassers über die Kinetik der Gelenksysteme und zeigt an einer großen Reihe von Anwendungen auf die Bewegungs- und Gleichgewichtszustände des Menschen, daß dieselben die allgemeine Grundlage für eine Mechanik der lebenden Körper bilden können. Um den Umfang des Buches nicht über ein gewisses Maß zu vergrößern, ist dabei alles, was sich nicht auf die Kinetik, sondern nur auf die Kinematik der organischen Gelenke und Gelenksysteme bezieht, außer Betracht geblieben. Infolgedessen haben z. B. die eingehenden Untersuchungen über spezielle Gelenke des menschlichen Körpers, welche von dem Verfasser zum Teil noch gemeinsam mit W. Braune angestellt worden sind, in dem Buch keine Berücksichtigung gefunden, da sie in keinem direkten Zusammenhang mit den hier mitgeteilten kinetischen Problemen stehen. So blieb denn nach Ausscheidung der „Kinematik organischer Gelenke und Gelenksysteme", welche demnächst als besonderes Buch erscheinen wird, ein in sich geschlossenes Gebiet übrig, das die allgemeine Kinetik und Statik der organischen Gelenksysteme umfaßt. Da die ganze tierische Organisation in erster Linie die Gliederbewegungen des lebenden Körpers zum Zwecke hat, so ist das vorliegende Buch zunächst den Medizinern, insbesondere den Physiologen und Anatomen, sowie auch den Zoologen gewidmet. Es ist daher in demselben der Versuch gemacht,

die mathematischen Ableitungen so elementar zu halten und die Resultate derselben in so anschaulicher Weise darzustellen und zu deuten, daß sie auch dem Nichtmathematiker leicht verständlich sein werden. Das Buch ist aber in gleicher Weise für den Mathematiker und Physiker von Fach bestimmt. Es soll ihnen einen Einblick gewähren in die Aufgaben, welche die Bewegungsphysiologie der Mechanik stellt, und in die Methoden, nach denen die letzteren diese Aufgabe zu lösen imstande ist. Schließlich dürfte das Buch auch das Interesse der Vertreter der technischen Mechanik erregen. Die angeführten Beispiele werden zeigen, daß die neuen Methoden tatsächlich für die Lösung mancher Probleme der technischen Mechanik von einigem Nutzen sein können.

Leipzig. OTTO FISCHER.

L. Krüger, Abteilungsvorsteher im Königl. Geodätischen Institut zu Potsdam. **Zur Ausgleichung der Widersprüche in den Winkelbedingungsgleichungen trigonometrischer Netze.** (Veröffentlichung des Königl. Preuß. Geodätischen Instituts. Neue Folge Nr. 25.) [II u. 34 S.] 4. Leipzig 1906, B. G. Teubner.

Wenn zur Ausgleichung eines trigonometrischen Netzes Richtungsverbesserungen erforderlich sind, so lassen sich aus den Normalgleichungen die Korrelaten der Winkelbedingungsgleichungen im allgemeinen nicht in einfacherer Weise als mittels des Gaußschen Algorithmus eliminieren. Es gibt jedoch viele Fälle, in denen man schneller und leichter zum Ziele gelangt; wenigstens wird man sehr häufig die Darstellung der Korrelaten der zu den Winkelgleichungen gehörigen Normalgleichungen auf die Auflösung weniger Gleichungen zurückführen können. Man zerlegt die Netzfigur in der Weise, daß man auf ihre Teile die Auflösung der Normalgleichungen spezieller einfacher Formen von Dreiecksnetzen anwenden kann. Als eine solche Form dient das Zentralsystem mit einer Seitengleichung. Für dieses werden zuerst die Normalgleichungen aufgelöst, die den Winkelgleichungen entsprechen, in denen die Richtungsverbesserungen zunächst mit verschiedenen Gewichten angenommen werden. Hieran schließt sich die Auflösung sämtlicher Normalgleichungen des Zentralsystems nebst Berechnung des mittleren Fehlers einer Richtungsbeobachtung und Bestimmung des Gewichts einer Funktion der Verbesserungen. Sind die Gewichte einander gleich, so kommt man zu sehr einfachen Formeln. Aus der Auflösung der Normalgleichungen für das Zentralsystem lassen sich nun leicht die Formeln für die Korrelaten bei einer einfach zusammenhängenden Dreieckskette ableiten, die hier als zweite Grundform benutzt wird. Als dritte Form ist noch eine Kette von Vierecken mit Diagonalrichtungen gewählt worden, für die sich die Korrelaten der aus den Winkelgleichungen entspringenden Normalgleichungen leicht durch die Widersprüche ausdrücken lassen, wenn die Richtungsverbesserungen gleiche Gewichte haben. Die Anwendung dieser Auflösungen wird an einigen Beispielen gezeigt. So werden die zu den Winkelgleichungen gehörigen Normalgleichungen aufgelöst bei einer Dreieckskette und bei einem Zentralsystem mit Diagonalrichtungen, bei Netzen, die aus zwei und drei Zentralsystemen bestehen, ferner bei einer aus einer Kette von Dreiecken und einem Zentralsystem zusammengesetzten Figur und endlich noch bei einer Kette von Vierecken, in denen außer den Vierecksdiagonalen auch

andere Verbindungslinien beobachtet sind. Sind die Netzfiguren nicht sehr ausgedehnt, so kann man häufig mit Vorteil mittels des angegebenen Verfahrens die sogenannte Schleiermachersche Methode der Winkelausgleichung auf die Ausgleichung von Richtungsbeobachtungen übertragen. Besonders angebracht ist jedoch diese Auflösung der den Winkelgleichungen entsprechenden Normalgleichungen, wenn die Bedingungsgleichungen des Netzes abwechselnd in zwei Gruppen, den Winkelgleichungen und den zu diesem Zwecke umgeformten Seitengleichungen, ausgeglichen werden, oder wenn man sich des Annäherungsverfahrens bedient, bei dem zuerst nur die Winkelgleichungen und darauf die Seitengleichungen ausgeglichen werden, wobei die letzteren bekanntlich durch Gleichsetzung der gegenseitigen Richtungsverbesserungen zu vereinfachen sind.

Potsdam. L. Krüger.

Annals of Mathematics. In die Redaktion der Annals of Mathematics tritt vom nächsten Bande ab (Oktober d. J.) Professor G. A. Bliss ein, und zwar an die Stelle von Professor H. S. White, der ausgetreten ist.

---

2. Bücherschau.

Danisi, G., Il sistema di coordinate nell' orario grafico dei treni; studio geometrico-analitico. 21 p. Padova 1906.

Faßbinder, C., Théorie et pratique des approximations numériques. VI, 92 p. Paris 1906. Fr. 3 —.

Hartwig, J., Die Sätze von Pascal und Brianchon auf der Kugelfläche. 11 S. Wien-Neustadt 1905.

Höfler, A., Vorschläge zu einer zeitgemäßen Umgestaltung des mathematischen Unterrichts an den österreichischen Gymnasien und Realschulen. III, 15 S. B. G. Teubner, Leipzig u. Berlin 1906.

Hollefreund, K., Die Elemente der Mechanik vom Standpunkte des Hamiltonschen Prinzips. 2. Teil. Programm. 23 S. Mit 2 Tafeln. Berlin 1906. ℳ 1.—.

Klein, F., Über lineare Differentialgleichungen der zweiten Ordnung. Vorlesung. Ausgearbeitet von E. Ritter. IV, 524 S. B. G. Teubner, Leipzig 1906. ℳ 8.50.

Lamb, H., Hydrodynamics. 3rd edition. Cambridge 1906. s. 20.—.

Love, A. E. H., Treatise on the mathematical theory of elasticity. 2nd edition. Cambridge 1906. s. 18.—.

Möllers, B., Über Normalsysteme, die mit der Rotations- und Schraubenfläche der Traktrix zusammenhängen. 85 S. Dissert. Münster.

Muir, T., Theory of dedeterminants, in the historical order of development. 2. edition. 504 p. London 1906. ℳ 18.—.

Planck, M., Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung. VIII, 222 S. m. 6 Abbildungen. Leipzig 1906. ℳ 7.—.

Schreber und **Springmann,** Experimentierende Physik. Zugleich vollständig umgearbeitete deutsche Ausgabe von Henri Abrahams Recueil d'expériences élémentaires de physique. 2 Bände. II. Band. Mit 450 Abbildungen und einfarbiger Spektraltafel. V, 367 S. Leipzig 1906. ℳ 8.—.

Steckelberg, H., Die Elemente der Differential- und Integralrechnung. 48 S. B. G. Teubner, Leipzig u. Berlin 1906. ℳ —.80.

Tannery, J., Leçons d'algèbre et d'analyse, à l'usage des élèves des classes de mathématiques spéciales. T. 2. Paris 1906. Fr. 12 —.

Thornton, A. G., Mathematical drawing instruments and materials, and also materials for copying tracings by photography etc. 252 p. with figures. London 1906. ℳ 4.—.

Vogt, H., Eléments de mathématiques supérieures, à l'usage des physiciens, chimistes et ingénieurs, et des élèves des facultés des sciences. 3e édition. Paris 1906.

Werkmeister, P., Graphische Tachymetertafel für alte Kreisteilung. Entworfen für Entfernungen von 5 bis 500 m und für Höhenunterschiede von 0,1 bis 70 m. 12 S. 4°. Stuttgart 1906. Mit Zelluloidstab. *M.* 4.60.

Williams, M. C., Normal illusions in representative geometrical forms. 102 p. with figures. Jowa City 1905.

Winter, A., Über die logarithmischen Grenzfälle der hypergeometrischen Differentialgleichung mit zwei endlichen singulären Punkten. 74. S. Dissert. Kiel 1905.

Zindler, K., Liniengeometrie mit Anwendungen. II. Band. Mit 24 Figuren. VII, 252 S. Leipzig 1906. *M.* 8.—.

Zühlke, P., Ausführung elementargeometrischer Konstruktionen bei ungünstigen Lageverhältnissen. 46 S. B. G. Teubner, Leipzig u. Berlin 1906.

3. Zeitschriftenschau.

(Von dem Inhalt der Zeitschriften werden nur die Aufsätze erwähnt, welche dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften angehören.)

Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 131. Heft II.

Mertens, Über zyklische Gleichungen. Busche, Über Gitterpunkte in der Ebene. Stéphanos, Sur les forces donnant lieu à des trajectoires coniques. Landsberg, Bemerkungen zur Theorie der algebraischen Kurven.

Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft. Bern 1905.

Droz-Farny, Sur l'hyperbole d'Apollonius. Graf, Beiträge zur Biographie Jakob Steiners. Briefwechel von Ludwig Schläfli und Arthur Cayley.

Monatshefte für Mathematik und Physik. 17. Jahrgang. 3. Vierteljahr. 1906.

Gmeiner, Otto Stolz, Nachruf. — Berger, Über die zur dritten Stufe gehörigen hypergeometrischen Integrale am elliptischen Gebilde. — Tauber, Über die unvollständigen Gammafunktionen. — Nielsen, Notiz über die Kugelfunktionen. — Carda, Über eine Schar dreigliedriger algebraischer Gruppen der Ebene. — Biermann, Über gewisse lineare Transformationen. — Literaturberichte.

Zeitschrift für Mathematik und Physik. 53. Band. 3. Heft.

Radakovic, Über die theoretische Behandlung des Problems der störenden Lokomotivbewegungen. — Linsenmann, Die elastische Linie der Gehäuse von Drehstrommaschinen mit großen Durchmessern. — Wittenbauer, Dynamische Kraftpläne. — Anfrage. — Abhandlungsregister.

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. 37. Jahrgang. 2. Heft.

Häbler, Die Ausnahmslosigkeit beim Definieren trigonometrischer Funktionen. Bodenstedt, Das Berührungsproblem des Apollonius. Schülke, Über die Einführung negativer Zahlen. Frenzel, Neue elementare Ableitung der Formeln zur Bestimmung der Haupt- und Brennpunkte einer Linse. Aufgabenrepertorium. Literarische Berichte. Richter, Die Reform des mathematischen Gymnasialunterrichts durch die Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte. Höfler, Vorschläge zu einer zeitgemäßen Umgestaltung des mathematischen Unterrichts an den österreichischen Gymnasien und Realschulen.

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. 37. Jahrgang. 3. Heft.

Schülke, Über die Reform des mathematischen Unterrichts an höheren Schulen. — Keferstein, Eine gemeinsame Methode zur Lösung der Gleichungen 2., 3. und 4. Grades. — Nonne, Das Raumverhältnis des konkaven und konvexen Umdrehungsparaboloids bei $2r$-Höhe. — Schreiner, Ein Satz der Schulgeometrie. —

Sos, Zwei diophantische Gleichungen. — Matthiessen, Merkwürdige Zahlenreihen. — Aufgabenrepertorium. — Literarische Berichte. — Pädagogische Zeitung. — Leitzmann, Arithmetik und Algebra in den höheren Schulen Frankreichs. — Schotten, Der mathematisch-naturwissenschaftliche Unterricht an den sechsklassigen Realschulen.

Annales de l'Ecole Normale supérieure. 3ième série; tome 22. Année 1905. 1 Octobre à 31 Décembre.

L. Raffy, Recherches sur les surfaces isothermiques (suite). — P. Boutroux, Fonctions multiformes à une infinité de branches. — E. Picard, Sur les équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre. — Ch. Riquier, Sur l'intégration d'un système d'équations aux dérivées partielles auquel conduit l'étude des déformations finies d'un milieu continu. — A. Davidoglou, Etude de l'équation différentielle $\frac{d^2}{dx^2}\left[\theta(x)\frac{d^2y}{dx^2}\right] = \varkappa\varphi(x)\,y$.

— 3ième série, tome 23. Année 1906. 1 Janvier à 31 Mars.

E. Borel, Sur les principes de la théorie cinétique des gaz. — L. Leau, Etude sur les fonctions entières orientées, d'ordre non entier. — D. R. Curtiss, Sur la théorie des fonctions hypergéométriques.

Annales de la Faculté des sciences de l'Université de Toulouse. 2ième série; tome 6. 1904.

A. Liapounov, Sur la stabilité des figures ellipsoïdales d'équilibre d'un liquide animé d'un mouvement de rotation. — E. Goursat, Sur un problème relatif à la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre (second mémoire). — A. Nodon, Recherches expérimentales sur les clapets électrolytiques. — H. Bourget, Sur le théorème de Poisson. — H. Bouasse, Sur les modules d'élasticité de traction du caoutchouc vulcanisé. — E. Maillet, Sur les équations de la Géométrie et la théorie des substitutions entre n lettres. — W. Steklov, Théorie générale des fonctions fondamentales.

2ième série; tome 7. 1905.

K. M. Peterson, Sur les relations et les affinités entre les surfaces courbes [traduit du russe par E. Cosserat]. — K. M. Peterson, Sur les courbes tracées sur les surfaces [traduit du russe par E. Cosserat et H. Frenkel]. — K. M. Peterson, Sur la déformation des surfaces du second ordre [traduit du russe par E. Davaux]. — K. M. Peterson, Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles [traduit du russe par E. Davaux]. — D. Pompeiu, Sur la continuité des fonctions de variables complexes. — H. Bouasse, Sur les métaux du type visqueux. — W. Ermakov, Groupes de transformations continus, isomorphes holoédriques.

Bulletin astronomique. Tome 22. [Novembre—Décembre 1905.]

L. de Ball, Recherches de Schwarzschild concernant sa détermination des grandeurs photographiques des étoiles. — H. von Zeipel, Sur l'instabilité du mouvement des comètes. — Jean Mascart, Clavius et l'Astrolabe (suite).

Bulletin astronomique. Tome 23. [1 Janvier à 30 Avril 1906.]

M. Loewy et P. Puiseux, Sur la marche de la solidification à l'intérieur des planètes. — J. Mascart, Clavius et l'Aslrolabe (suite). — H. Andoyer, Sur l'équilibre relatif de n corps. — H. Bourget, Remarque sur la détermination des orbites circulaires. — H. Andoyer, Sur les solutions périodiques voisines des positions d'équilibre relatif, dans le problème des n corps.

Comtes rendus des séances de l'Académie des sciences, tome 141 (suite), 1905 second semestre. Nos. 13 à 26.

P. Duhem, Sur les origines du principe des déplacements virtuels. — P. Painlevé, Sur les lois du frottement de glissement. — R. Fuchs, Sur quelques équations différentielles linéaires du second ordre. — S. Bernstein, Sur les surfaces minima.

— J. Janssen, Observation de l'éclipse totale du 30 août 1905 à Alcosebre (Espagne), — J. Janssen, Sur la création d'une association internationale pour les études solaires. — E. Stephan, Observation de l'éclipse totale da soleil du 30 août 1905 à Guelma (Algérie). — G. A. Miller, Groupes contenant plusieurs opérations de l'ordre deuxième. — Bourget et Montangerand, Note préliminaire sur l'observation de l'éclipse totale du soleil du 30 Août 1905. — J. Comas Sola, Observations sur l'éclipse totale du soleil du 30 Août 1905. — G. Rémoundos, Sur les fonctions ayant un nombre fini de branches. — Auric, Sur le calcul d'une arche en maçonnerie. — H. Poincaré, Rapport sur un mémoire de Bachelier intitulé: Les probabilités continues. — F. Riesz, Sur les ensembles discontinus. — V. Crémin, Recherches sur la gravitation. — Ch. Goldziher, Un criterium pour l'application de la loi de mortalité de Gompertz-Makeham. — Ringelmann, Sur le travail mécanique fourni par les moulins à vent. — P. Boutroux, Sur les relations récurrentes convergentes. — H. Padé, Sur les réduites d'une certaine catégorie de fonctions. — G. Zemplén, Sur l'impossibilité des ondes de choc négatif dans les gaz. — J. Hadamard, Remarques au sujet de la note précédente de G. Zemplén. — V. Crémien, Recherches sur la gravitation. — M. Stuyvaert, Sur les congruences gauches. — Zoretti, Sur le développement d'une fonction analytique uniforme en produit infini. — P. Helbronner, Sur les triangulations géodésiques complémentaires des hautes régions des Alpes françaises, (troisième campagne). — A. Krebs, Sur un frein dynamométrique destiné à la mesure de la puissance des moteurs. — P. Duhem, Sur l'impossibilité des ondes de choc négatives dans les gaz. — Maurice Fréchet, Formule d'interpolation des fonctions périodiques continues. — H. Padé, Sur les développements en fractions continues de la fonction $F(h, 1, h', u)$ et la généralisation de la théorie des sphériques. — Edouard Husson, Sur un théorème de Henri Poincaré relativement au mouvement d'un solide pesant. — Maurice Fréchet, Les ensembles des courbes continues. — H. Lebesgue, Sur la divergence et la convergence non-uniformes des séries de Fourier. — Edgard Taffoureau, Sur le coefficient d'utilisation des hélicoptères. — Jean Malassez, Sur la différence de potentiel sous laquelle sont produits les rayons cathodiques. — Henri Chrétien et M. Stefanovska, Recherches statistiques sur l'évolution de la taille du lin. — C. Guichard, Sur la déformation des quadriques. — E. Belot, Sur la loi de Bode et les inclinaisons des orbites planétaires sur l'écliptique. — Mural Brillouin, Inertie des électrons. — H. Padé, Sur la convergence des fractions continues régulières de la fonction $F(h, 1, h', u)$ et de ses dégénérescences. — W. Steklov, Sur le problème du mouvement d'un ellipsoïde fluide homogène dont toutes les parties s'attirent suivant la loi de Newton. — A. Boulanger, Théorie de l'onde solitaire qui se propage le long d'un tube élastique horizontal (voir aussi l'errata p. 1272). — A. Demoulin, Sur les surfaces isothermiques et sur une classe d'enveloppes de sphères. — C. Carathéodory, Sur quelques généralisations du théorème de E. Picard. — W. Steklov, Sur le mouvement non stationnaire d'un ellipsoïde fluide de révolution qui ne change pas sa figure pendant le mouvement. — J. Clairin, Sur une transformation de certaines équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre.

L'Enseignement Mathématique. VIII[e] Année. No. 3.

Bobynin, Méthode expérimentale dans la science des nombres et principaux résultats obtenus. Andrade, Géometrie appliquée; la théorie des rotations et le niveau à bulle. Carvallo, Sur la convergence absolue des séries. Jamet, Sur un développement en série entière. Combébiac, Sur les éléments de la théorie des ensembles ordonnés. Pompéiu, Sur une extension possible de la notion de vraie valeur. Kürschak, Sur l'irréductibilité de certains déterminants. Richard, Considérations sur l'astronomie; sa place insuffisante dans les divers degrés de l'enseignement. Enquête sur la méthode de travail des mathématiciens. Les résultats. Mélanges et Correspondance. Chronique. Bibliographie.

Journal de l'Ecole polytechnique. 2ième série; cahier 8. 1903.

E. Maillet, Sur les lois des montées de Belgrand et les formules du débit d'un cours d'eau. — L. Autonne, Sur les substitutions crémoniennes de l'espace, premier mémoire. — E. Maillet, Sur les lignes de décroissance maxima des modules et les équations algébriques ou transcendantes. — M. d'Ocagne, Exposé synthétique des principes fondamentaux de la nomographie.

2ième série; cahier 9. 1904.

H. Dulac, Recherches sur les points singuliers des équations différentielles. — R. Bricard, Sur l'épicycloïde. — P. Appell, Machine à déterminer les balourds.

2ième série; cahier 10. 1905.

E. Maillet, Sur les fonctions monodromes d'ordre non transfini et les équations différentielles. — E. Jouguet, Sur la similitude dans le mouvement des fluides. — A. Colson, Sur la théorie des déplacements gazeux. — H. Poincaré, Notice sur la vie et les Œuvres d'Alfred Cornu.

4. Kataloge.

Buchhandlung Gustav Fock, Leipzig, Schloßgasse 7—9. Antiquariats-Verzeichnis, Nr. 288. Reine und angewandte Mathematik und Physik. Nebst einer Sammlung früher und Originalausgaben zur Geschichte dieser Wissenschaften und deren Grenzgebiete. Hierin u. a. die Bibliotheken der † Herren Professor Dr. O. Stolz, Generalmajor v. Orff.

5. Bei der Redaktion eingegangene Schriften.

[Titel, Preis usw. der eingesandten Schriften werden hier regelmäßig veröffentlicht. Besprechungen geeigneter Bücher bleiben vorbehalten. Eine Rücksendung der eingegangenen Schriften kann nicht erfolgen.]

K. Bochow, Die Funktionen rationaler Winkel. Insbesondere über die numerische Berechnung der Winkelfunktionen ohne Benutzung der trigonometrischen Reihen und der Zahl π. Programm. Magdeburg 1905.

H. Bork, P. Crantz, E. Haentzschel, Mathematischer Leitfaden für Realschulen. 5. verbesserte Auflage. Verlag der Dürrschen Buchhandlung, Leipzig 1906.

M. Fréchet, Sur quelques points du calcul fonctionnel. Thèse présentée à la faculté des sciences de Paris. Paris 1906.

T. Friesendorff, Über die Brinellsche Kugelprobe zur Bestimmung der Härte der Metalle. (Sonderabdruck.)

A. Höfler, Vorschläge zu einer zeitgemäßen Umgestaltung des mathematischen Unterrichts an den österreichischen Gymnasien und Realschulen. III, 15 S. B. G. Teubner, Leipzig u. Berlin 1906.

E. V. Huntington, The continuum as a type of order: an exposition of the modern theory. With an appendix on the transitive numbers. The publication office of Harvard University, Cambridge, Mass.

F. Klein, Über lineare Differentialgleichungen der zweiten Ordnung. Vorlesung. Ausgearbeitet von E. Ritter. IV, 524 S. B. G. Teubner, Leipzig 1906. ℳ 8.50.

Močniks logarithmisch-trigonometrische Tafeln. Sechste vermehrte Auflage, besorgt von Prof. Johann Reidinger. F. Tempsky, Wien 1906.

L. G. Du Pasquier, Zahlentheorie der Tettarionen. 76. S. Dissert. Zürich 1906.

H. Steckelberg, Die Elemente der Differential- und Integralrechnung. 48 S. B. G. Teubner, Leipzig u. Berlin 1906. ℳ —.80.

J. J. Thomson, Elektrizitätsdurchgang in Gasen. Deutsche autorisierte Ausgabe unter Mitwirkung des Autors besorgt und ergänzt von Dr. Erich Marx. B. G. Teubner, Leipzig 1906. ℳ 18.—.

P. Zühlke, Ausführung elementargeometrischer Konstruktionen bei ungünstigen Lageverhältnissen. 46 S. B. G. Teubner, Leipzig u. Berlin 1906.

JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN
MATHEMATIKER-VEREINIGUNG

IN MONATSHEFTEN HERAUSGEGEBEN VON

A. GUTZMER
IN HALLE A. S.

15. BAND. 7. HEFT. JULI.

AUSGEGEBEN AM 27. JULI 1906.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1906.

☞ Das nächste Heft wird Ende August ausgegeben werden.

JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG.

IN MONATSHEFTEN HERAUSGEGEBEN VON A. GUTZMER IN HALLE A. S.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

☛ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Bücher usw.) sind an

Prof. Dr. A. Gutzmer in Halle a. S., Martinsberg 8,

zu richten.

☛ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich: von größeren Aufsätzen 25 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen und Mitteilungen 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☛ Jeder Band des Jahresberichts in Monatsheften umfaßt vom 12. Bande ab 38 Bogen (= 608 Druckseiten) und kostet für Mitglieder der Vereinigung, Porto inbegriffen, Mark 14.70, für Nichtmitglieder Mark 18.—. Mitglieder haben ihr Abonnement bei der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig, Poststraße 3, aufzugeben, Nichtmitglieder dagegen bei einer Sortimentsbuchhandlung.

☛ Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung zählt z. Zt. über 660 Mitglieder. Der jährliche Mitgliedsbeitrag beträgt 2 Mark, kann aber auch durch einmalige Zahlung von 30 Mark abgelöst werden. Beitrittserklärungen nimmt der Schriftführer der Vereinigung, Prof. Dr. A. Krazer, Karlsruhe in Baden, Westendstraße 57, oder die oben genannte Verlagsbuchhandlung entgegen. Die Ablösungssumme bezw. der Jahresbeitrag ist an die Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig einzusenden.

INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.

Beiträge zur Frage des Unterrichts in angewandter Mathematik an der Universität.

Von F. v. Dalwigk in Marburg.

I.

Durch die preußischen Examensbestimmungen vom Jahre 1898 ist das Wort „angewandte Mathematik" als gemeinsame Bezeichnung einer Reihe von mathematischen Fächern geschaffen worden in ganz anderem Sinn, als man den Ausdruck früher verwendete. (Vgl. z. B. den Titel des Crelleschen Journals und die Bemerkungen von Guido Hauck in seiner nachgelassenen Abhandlung in der Hoffmannschen Zeitschrift 1905, Seite 149).

Nach den Bestimmungen umfaßt die „angewandte Mathematik" folgende Fächer: Darstellende Geometrie, die mathematischen Methoden der technischen Mechanik, insbesondere die graphische Statik, Geodäsie, und als Hilfswissenschaft dazu die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Daß die Astronomie nicht aufgezählt ist, hat einzelne befremdet, ist aber bedingt durch das Fehlen von Sternwarten an vielen Hochschulen und auch dadurch, daß bei gründlicher Behandlung das Studium der Astronomie zu umfangreich würde. Ausgewählte Kapitel, etwa die Grundlagen der astronomischen Zeit- und Ortsbestimmung, sollte ein Student der angewandten Mathematik schon kennen lernen. — Weiter sind nicht ausdrücklich genannt die Lehre von den Kartenprojektionen, das numerische Rechnen und die nicht geodätischen Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Es ist natürlich, daß Studenten, welche an Realanstalten unterrichten wollen, in ihrem Studiengang die angewandte Mathematik stärker berücksichtigen werden. Doch möchte ich nicht, daß die Studenten von den ersten Semestern an geradezu hingedrängt werden auf eine geschäftsmäßige Einrichtung des Studiums in Rücksicht auf das Examen und die Anstellung. Demnach muß ich mich gegen eine offizielle Verbindung der reinen und angewandten Mathematik für die Kandidaten erklären, welche auf der Oberstufe von Realanstalten Mathe-

matik unterrichten wollen. Daß man bei sonst gleicher Tüchtigkeit Kandidaten solcher besserer Vorbildung lieber anstellt, halte ich für berechtigt; aber die Ausschließung der anderen von der Anstellung würde ich für nicht richtig halten.

Für die angewandte Mathematik gibt es im Gegensatz zu den meisten Fächern nur ein Zeugnis erster Stufe. Es wäre meines Erachtens auch ganz falsch, bei Prüfung aus *allen* den vorgeschriebenen Gebieten und bei Forderung geringerer Kenntnisse eine Fakultas zweiter Stufe zu geben. Dagegen würde ich es gern sehen, wenn man eine Fakultas zweiter Stufe in angewandter Mathematik zuließe auf Grund *einer* der beiden Hauptgruppen der jetzt verbundenen Gebiete: entweder der darstellenden Geometrie mit Perspektive und graphischer Statik, oder der niederen und höheren Geodäsie mit Wahrscheinlichkeitsrechnung und etwa noch mit astronomischer Zeitbestimmung und mathematischer Kartographie. Dabei müßte es sich um tüchtiges Kennenlernen dieser Gebiete handeln, dennoch würde der Zeitaufwand nicht größer sein, als für eine biologische oder chemisch-mineralogische Nebenfakultas, und die aufgewandte Zeit käme in hohem Maße der rein mathematischen Ausbildung des Studierenden zugute.

In § 11 der Prüfungsordnung steht allerdings, daß in philosophischer Propädeutik, im Hebräischen und in angewandter Mathematik mit Rücksicht auf ihre Stellung im Lehrplan die Lehrbefähigung nur für die erste Stufe erteilt wird. Aber es folgt dann sofort die Definition der beiden Lehrbefähigungen für Zoologie und Botanik, welches Fach auch nicht in allen Klassen vertreten ist. Ein prinzipielles Bedenken gegen Zulassung einer Fakultas zweiter Stufe in angewandter Mathematik bei der bevorstehenden Änderung oder Ergänzung der Prüfungsordnung scheint demnach nicht vorzuliegen. Tüchtige Kenntnisse in einem Teil der angewandten Mathematik würden unbedingt auch dem mathematischen Unterricht in mittleren Klassen nützen; meine stärksten mathematischen Erinnerungen aus diesen Klassen bestätigen mir das. Außerdem glaube ich, daß durch Zulassung eines Zeugnisses zweiter Stufe in angewandter Mathematik eine gerechtere Beurteilung der Leistungen mancher Kandidaten ermöglicht würde. Jetzt ist die richtige Grenze zwischen der Erteilung der vollen Fakultas und der Verweigerung jeder Fakultas oft schwer zu ziehen, wenn der Kandidat in einem Teil der Fächer recht tüchtig, in einem Fach recht schwach ist.

Der Vorschlag, von den jetzt unter dem Titel „angewandte Mathematik" vereinigten Gebieten für das Examen nur einen Teil zu fordern, ist nicht neu. Herr Stäckel hat ihn in seinem zweiten Bericht gemacht (Jahresbericht XIII, S. 313—341, speziell S. 328 ff.). Doch ist da nur

von dem Hauptfach angewandte Mathematik die Rede, während ich glaube, daß jede Hälfte des jetzigen Faches sich im Unterricht so abgrenzen läßt und mit Vorteil so abgegrenzt wird, daß sie etwa einem anderen Nebenfach entspricht. Noch hat man ja überhaupt an manchen Stellen mit dem Vorurteil zu kämpfen, welches die angewandte Mathematik als nicht wissenschaftlich, als nicht an die Universität gehörig betrachtet; auch begegnet man noch der Ansicht: die angewandte Mathematik bestehe aus drei Vorlesungen mit etwas Übungen (nämlich darstellender Geometrie, graphischer Statik und Geodäsie) und sei demnach durchaus unbillig einem Hauptfach gleich geachtet. Mit dieser letzten Ansicht räumt man am besten auf dadurch, daß man das Fach recht vielseitig vertritt; ich z. B. bin schon auf etwa acht Vorlesungen oder von Vorlesungen unabhängige Übungen aus angewandter Mathematik gekommen und höre mit dieser Zahl keineswegs auf. Wie es in dieser Hinsicht an den anderen kleinen Hochschulen steht, weiß ich nicht. Jedenfalls aber möchte ich nicht eine Halbierung der Ansprüche unter Beibehaltung des Umstandes, daß es nur eine Fakultas erster Stufe gibt; denn das würde dem Fach, welches um seine Vollwertigkeit noch zu kämpfen hat, schaden.

Die Beeinträchtigung des mathematischen Studiums durch naturwissenschaftliche Nebenfächer (neben der selbstverständlich mit der Mathematik verbundenen Physik) braucht kaum noch hervorgehoben zu werden; Bestrebungen zur Trennung der mathematisch-physikalischen und der biologisch-chemischen Fächer sind in Preußen schon lange vorhanden. Durch Schaffung einer nicht offiziell jedem Mathematiker vorgeschriebenen Fakultas zweiter Stufe in angewandter Mathematik ließe sich in dieser Hinsicht viel nützen. Dabei käme die oben vorgeschlagene Wahl zwischen darstellender Geometrie mit graphischer Statik und andererseits Geodäsie mit den verwandten Gebieten den besonderen Anlagen eines Studenten zweckmäßig entgegen. Ein solches Nebenfach würde von Studenten mehr gewählt werden, als das jetzige Hauptfach „angewandte Mathematik“, und es würde ebenso wie dieses zur Entlastung von fernliegenden Nebenfächern und zur gründlichen Abrundung des mathematischen Studiums beitragen.

In Bayern, wo die Trennung der mathematisch-physikalischen von den biologisch-chemischen Fächern längst besteht, wird von jedem Mathematiker Kenntnis der darstellenden Geometrie verlangt. Für Preußen scheint mir das nicht nachahmenswert. Ich glaube, man darf nicht den Umfang der Prüfungsanforderungen in reiner Mathematik durch Zufügung der darstellenden Geometrie erhöhen, oder zugunsten der darstellenden Geometrie die anderen Anforderungen erniedrigen.

Andererseits zähle ich die darstellende Geometrie durchaus zur reinen Mathematik und halte sie wegen des großen Wertes der Erziehung zum anschaulichen räumlichen Denken für sehr wichtig auch für solche Oberlehrer, die durch die Art ihrer Schule nie in die Lage kommen, darstellende Geometrie zu unterrichten. Schon der stereometrische Unterricht erfordert tüchtige Raumanschauung, die bloße Beschäftigung mit Kavalierperspektive reicht für den Lehrer dazu jedenfalls nicht aus. Das Studium der darstellenden Geometrie wäre innerhalb der beiden ersten Studiensemester keine besondere Belastung des Studenten der reinen Mathematik, da dieser doch neben Infinitesimalrechnung, analytischer Geometrie und Experimentalphysik nur ausnahmsweise ein anderes mathematisches Kolleg hören sollte.[1]) Auch wären darstellend-geometrische Schulung und gute Raumanschauung für allen weiteren geometrischen Unterricht (der einen wesentlichen Teil des Studiums bilden muß) von Vorteil. Aber eine offizielle Nebenfakultas in darstellender Geometrie neben der reinen Mathematik und der Physik möchte ich trotzdem nicht anregen. Dem Studenten muß einige Bewegungsfreiheit in der Wahl seiner Nebenfächer bleiben.

Im wesentlichen handelt es sich bei richtiger Vertretung der sogenannten „angewandten Mathematik" doch fast nur um rein mathematische Untersuchungen, man muß sie nur richtig herauszuschälen wissen; es muß im Universitätsunterricht eben das Technische angemessen zurücktreten. Das ist mir bisher in den Veröffentlichungen zur angewandten Mathematik zu wenig betont worden. Die starken mathematischen Zusammenhänge der darstellenden Geometrie mit der neueren Geometrie, die große Anregung, welche diese aus der darstellenden Geometrie in der Mongeschen und Ponceletschen Schule empfangen hat, sind nicht überall genügend bekannt, noch weniger bekannt scheint mir der Einfluß der Geodäsie auf die Gaußsche Flächentheorie zu sein.

---

1) Ich stehe durchaus auf dem Standpunkt des Göttinger Studienplanes, der in seinem mathematischen Teil ursprünglich von Klein und H. Weber verfaßt und für die Studienpläne einiger anderer Hochschulen vorbildlich geworden ist. Das Hören einer geringen Zahl mathematischer Stunden, starke Hausarbeit und ernsthafte Beteiligung an Übungen und Seminaren sind mir wesentlich und werden oft von Studenten in jungen und mittleren Semestern unterschätzt. — Während der Korrektur finde die Mitteilung des Herrn von Lilienthal im Maiheft dieses Jahresberichts und freue mich der starken Betonung der „selbständigen Ausarbeitung des Gehörten auf Grund eigener während der Vorlesung gemachter Aufzeichnungen." Damit spreche ich mich natürlich nicht gegen die Göttinger Sitte, zur Erleichterung der Ausarbeitung ein gutes Kollegheft im Seminar auszulegen, aus. Zum gedankenlosen Abschreiben wird es ja höchstens von solchen benutzt werden, die ohne sein Vorhandensein auch nichts lernen würden.

Soll der Unterricht in der „angewandten Mathematik" zur wirklichen Ergänzung und Förderung des rein mathematischen Studiums dienen, dann braucht er freilich tüchtige Vertreter, und es ist schon von Anfang an darauf hingewiesen worden, daß die Prüfungsordnung von 1898 solche nicht aus der Erde stampfen könne. Dementsprechend geben die Stäckelschen Berichte Aufschluß, wie an den meisten Hochschulen erst ganz allmählich die einzelnen Fächer vertreten werden konnten. So ist es auch, rein persönlich betrachtet, ganz berechtigt, daß einer oder der andere bei Übernahme des Lehrauftrages sich Befreiung von der Geodäsie ausbedungen hat. Es wird sich ja darin sicher nur um einen Übergangszustand handeln, soweit nicht ein Astronom das Fach vertritt. Denn ein Lehrer der Land- oder Forstwissenschaft kann bei größter Tüchtigkeit doch keinen wissenschaftlich-mathematischen Unterricht erteilen, nicht einmal in niederer Geodäsie. Näher gehe ich auf die Anforderungen, die nach meiner Ansicht an den geodätischen Universitätsunterricht zu stellen sind, erst später ein. Gerade die Geodäsie scheint im jetzigen Universitätsunterricht der „angewandten Mathematik" das Stiefkind zu sein, deshalb will ich ihr auch in den folgenden Ausführungen über die einzelnen Gebiete die längste Besprechung widmen.

Neben der Ausgestaltung des Unterrichtes in der angewandten Mathematik nach der rein mathematischen Seite ist zu fordern, daß der Umfang der verschiedenen Gebiete zusammen etwa dieselben Anforderungen an Zeit und Arbeitskraft des Studenten stellt, wie ein anderes Hauptfach. Übrigens stehe ich durchaus auf dem schon von anderer Seite betonten Standpunkt der Kompensation. Ich habe stets in den Prüfungen weitergehende Kenntnisse in einem der Gebiete zum Ausgleich geringerer Kenntnisse in einem der übrigen gelten lassen. Das mußte ich auch schon dadurch, daß in den ersten Jahren des neuen Faches mehrfach Kandidaten zur Prüfung kamen, die noch nicht Gelegenheit gehabt hatten, die sämtlichen Gebiete in Vorlesungen und Übungen kennen zu lernen. So waren sie öfter auf Privatstudium angewiesen, was bei der bisher vorhandenen Literatur, welche den Bedürfnissen des Universitätsunterrichtes natürlich nicht angepaßt ist, Schwierigkeiten macht.

Die Möglichkeit zu solcher Kompensation liegt in den recht allgemein gehaltenen Examensvorschriften; es ist dem Dozenten für den Unterricht und die Prüfung viel freier Raum gelassen. Im Korreferat hat Hauck sich darüber ausgesprochen, in wieweit man Grenzen für die Ausgestaltung des Unterrichts ziehen solle, innerhalb deren Bewegungsfreiheit bleiben muß. (Jahresbericht VIII S. 115). Er denkt an

ein endgültiges Programm, welches erst nach mehrjährigen Erfahrungen auf Grund eines gegenseitigen Meinungsaustausches der beteiligten Dozenten zu Stand kommt. Mir ist ein völlig freies Schaffen des Lehrprogrammes auf der jetzigen Grundlage durchaus erwünscht, wenn auch dadurch starke Unterschiede zwischen den einzelnen Hochschulen bedingt sind. Im Grunde ist es ja in der reinen Mathematik ebenso.

Was ich also im folgenden biete, soll gar kein allgemeines Programm sein, sondern soll *eine* brauchbare und zum großem Teil in langen Jahren erprobte Abgrenzung und Anordnung des Stoffes sein. Vollständig habe ich dieses Programm in meinen Vorlesungen und Übungen noch nicht durchgeführt. Denn meine starke Beteiligung an den Vorlesungen aus reiner Mathematik war an der kleinen Hochschule fast ausnahmslos ein dringendes Bedürfnis und mir selbst erwünscht.

Ausdrücklich will ich noch sagen, daß sich für mich der Kollegumfang und die Ansprüche im Examen nicht decken; das Kolleg ist mir gar nicht in erster Linie Examensvorbereitung; ebensowenig denke ich in Umfang und Abgrenzung der Examensanforderungen an den Nutzen für die Schule. Gegenteilige Ansichten sind allerdings laut geworden, aber an der Universität haben nur die rein wissenschaftlichen Rücksichten den Ausschlag zu geben.

II.

Die darstellende Geometrie nimmt in der angewandten Mathematik eine wichtige Stelle ein. Als das Hauptfach des Gebietes betrachte ich sie allerdings nicht; ich halte sie für wichtiger als die graphische Statik, aber nur für gleichwichtig mit der Geodäsie. Selbstverständlich ist, daß an der Universität die darstellende Geometrie ohne die Rücksichten auf die Praxis betrieben wird, welche an einer technischen Hochschule stark hervortreten. Man wird zwar auch eine gewisse praktische Fertigkeit anstreben und auf genaues und schönes Zeichnen Wert legen müssen, aber die Hauptsache sind doch die Methoden und ihr mathematischer Gehalt. Auch braucht man im behandelten Stoff nicht die Ausführlichkeit, wie an einer technischen Hochschule, deshalb kann man mit wesentlich geringerer Zeit auskommen. Darüber hat sich schon Hauck im Korreferat ausgesprochen (Jahresbericht VIII, S. 115, Anmerkung), er gab dort den Zeitaufwand für seine Vorlesungen und Übungen in Tübingen und in Charlottenburg.

Ich trage die Methode der Orthogonalprojektion mit Grund- und Aufriß so vor, daß ich einschließlich der Übungen 5—6 Wochenstunden in einem Semester verwende. Eine regelmäßige Verteilung der Stunden

auf Vorlesungen und Übungen führe ich nicht während des ganzen Semesters durch, ich richte mich dabei nach dem Bedürfnis. Natürlich läßt sich bei so geringer Stundenzahl nicht alles mit Ausführlichkeit erledigen. Über Punkte, Geraden und Ebenen bringe ich nur die wesentlichsten Aufgaben und gehe dann rasch zur Behandlung von Körpern über; denn ich finde, daß hierdurch die Raumanschauung mehr geschult und das Interesse mehr geweckt wird. Ich höre auch nicht etwa bei den ebenflächigen Körpern auf. Kreiskegel und Kreiszylinder, ihre ebenen Schnitte und Durchdringungen bieten mathematisch so viel Schönes, daß ich keinesfalls darauf verzichten möchte. Die Schraubenlinie, die einfachsten mit ihr zusammenhängenden geradlinigen Flächen, ferner die geradlinigen Flächen 2. Ordnung verdienen ebenfalls nähere Behandlung, nur gehe ich darauf manchmal aus Zeitmangel im ersten darstellend-geometrischen Kolleg nicht ein, sondern bringe dies in Übungen im Anschluß an andere Vorlesungen. — Eine scharfe Trennung zwischen den ebenflächigen und den krummflächigen Körpern zu machen, liegt mir fern, in diesen Fragen der Stoffanordnung gibt es eben keine allgemeinen Regeln, die persönliche Eigenart des Dozenten muß den Ausschlag geben. Ebenso stelle ich die Affinität nicht an die Spitze des Kollegs über die Mongesche Orthogonalprojektion. Ich führe die perspektive Affinität erst da ein, wo sie sich von selbst bietet, nämlich wenn ich die Umlegung einer ebenen Figur in eine Projektionsebene durch Drehung um die betreffende Ebenenspur bringe. Nach Abschluß der Betrachtungen über Punkte, Geraden und Ebenen behandle ich dann die allgemeine perspektive Affinität in dem Umfang, wie sie weiterhin für das Kolleg nötig ist. Später schiebe ich an geeigneter Stelle die Behandlung der Ellipse mittels der Affinität zum Kreis ein. Die allgemeine (nicht perspektive) Affinität bespreche ich nicht, d. h. nicht in dieser Vorlesung. Abgesehen von den genannten Betrachtungen über perspektive Affinität und abgesehen von einer kurzen Behandlung der Zentralkollineation bei den ebenen Schnitten der Pyramide und des Kegels, sehe ich in diesem ersten Kolleg aus der darstellenden Geometrie von jeder Verquickung mit der projektiven Geometrie ab.

Als ich zum ersten Male darstellende Geometrie las (1898, vor Erlaß der neuen Prüfungsordnung) fing ich mit der Besprechung der Orthogonal-Projektion auf *eine* Ebene an, brachte die Grundaufgaben über Punkte, Geraden und Ebenen, die Hauptaufgaben über Dreikante und einige geeignete Körperaufgaben. Ich arbeitete mit Grundriß und Umlegungen, auch mit getrennter Zeichnung von Figuren, die in allgemeinen oder vertikalen Hilfsebenen liegen. Damit läßt sich viel Schönes machen (cf. Hauck). Auch auf die kotierte Projektion ging

ich kurz ein, dann erst kam ich zur Mongeschen Methode. Es ist ja sicher, daß durch solche Stoffanordnung die Schwierigkeiten etwas abgeschwächt werden, welche die Raumanschaunng des Lernenden bei der Mongeschen Darstellung anfangs immer findet. Aber mir war doch der Zeitaufwand zu groß, es wurde der Mongeschen Methode zu viel Zeit entzogen. Deshalb beginne ich jetzt das erste Kolleg über darstellende Geometrie mit der Mongeschen Methode und bringe nur beiläufig an geeigneten Stellen das Arbeiten ohne Aufriß und einen kurzen Abriß der kotierten Projektion.

An diese Behandlung der Mongeschen Methode schließe ich im folgenden Semester ein Kolleg über Parallelperspektive und Zentralperspektive an (mit Übungen 4-stündig). Die recht wichtige Parallelperspektive (Kavalierperspektive) läßt sich ziemlich kurz erledigen, weil bei dem Burmesterschen Umlegungsverfahren vieles entsprechend ist zu den Betrachtungen des vorhergehenden Semesters. Es sind im wesentlichen nur Gründe der Zeiteinteilung, die mich dazu führen, die Parallelperspektive erst im zweiten Semester zu bringen. Sie wird dann später viel zu Skizzen verwendet, zur Veranschaulichung grundlegender Raumfiguren bei der Perspektive. Wenn ich analytische Geometrie des Raumes lese und nicht zugleich darstellende Geometrie, dann schalte ich meist einige Stunden über Parallelperspektive ein, in Rücksicht auf die ausgiebige Verwendung im Kolleg.

Die allgemeine schiefe Axonometrie und den Pohlkeschen Satz berühre ich nur beiläufig; die orthogonale Axonometrie bringe ich ganz kurz, ich gebe nur einen Teil der graphischen Behandlung und einiges nach Weisbach, wobei ich auf den Anhang von Schlömilchs Raumgeometrie verweise. Die Überlegenheit der orthogonalen Axonometrie im Erreichen schöner Bilder ist unbestreitbar. Die Durchführung der Konstruktion ist recht einfach, wenn das Objekt durch Grund und Aufriß oder durch Koordinaten gegeben ist, und wenn man alle technischen Hilfsmittel kennt und zur Hand hat. Aber das unmittelbare Konstruieren in den axonometrischen Zeichnungen, wie man es für mathematische Skizzen oft brauchen würde, ist doch zu umständlich trotz aller neueren Veröffentlichungen. Darin bleibt die schiefe Parallelperspektive unbedingt überlegen, und darum ist es nötig, diese recht gründlich zu nehmen. Für die orthogonale Axonometrie bleibt (bei mir wenigstens) nur geringe Zeit übrig. An der malerischen und freien Perspektive habe ich auch weit stärkeres mathematisches Interesse.

Auf die malerische Perspektive verwende ich etwa das halbe Semester. Dabei bringe ich im Kolleg und besonders in den Übungen

eine Reihe architektonischer Aufgaben[1]) und arbeite oft schon den späteren Untersuchungen über freie Perspektive vor. Dann gehe ich im Zusammenhang auf die grundlegenden Aufgaben der freien Perspektive ein. Hiermit das Kolleg zu beginnen, vermeide ich wegen der Schwierigkeiten für die Anschauung. Darauf folgen allgemeine Untersuchungen über Zentralkollineation ebener Figuren im Raum und in *einer* Ebene mit Anwendungen. Hierbei und schon früher ist Gelegenheit, Sätze der projektiven Geometrie zu verwenden. Nötigenfalls entwickle ich sie zuerst, denn größere Vorkenntnisse fehlen den Zuhörern meist. Ich will aber an dieser Stelle gar nicht einen abgerundeten Überblick über die projektive Geometrie geben, wozu auch die Zeit fehlen würde. Ich gehe nur so weit, daß ich die perspektive Abbildung des Kreises in der Ebene vollständig und gut behandeln kann. Die Abhaltung einer besonderen Vorlesung über projektive Geometrie neben der Vorlesung über Perspektive oder als Fortsetzung derselben ist erwünscht, aber in Marburg nicht immer durchführbar. Die letzten Wochen des Kollegs verwende ich auf die Reliefperspektive und die Photogrammetrie. In beiden Kapiteln fasse ich mich ziemlich kurz; von der Photogrammetrie brauchen nur bestimmte Teile behandelt zu werden, weil manches in der geodätischen Vorlesung seinen natürlichen Platz findet.

Schon bei der Axonometrie sprach ich aus, daß ich mich nicht scheue, die Rechnung in darstellend-geometrische Betrachtungen hineinzuziehen, wo sie mir von Vorteil scheint. Das gilt auch für die Perspektive. Dort treten mir bei der ebenen Abbildung des Raumes und bei der Reliefperspektive in den Problemen die Formeln oft deutlich entgegen, manchmal so, daß sie geradezu verlocken, mit dem Rechenschieber zu arbeiten.[2]) Im Kolleg lasse ich die Formeln stärker zurücktreten. (Ich denke übrigens in solchen Dingen in erster Linie immer in inhomogenen Koordinaten. Auch in pädagogischer Hinsicht habe ich diesen Standpunkt: in meiner zweisemestrigen Vorlesung über analytische Geometrie der Ebene und des Raumes kommen die homogenen Koordinaten erst spät zur Geltung, die algebraische Kunst tritt hinter dem Geometrischen zurück. Ich weiß, daß ich damit etwas abseits stehe, auch die neueren Veröffentlichungen von Lehrbüchern der analytischen Geometrie zeigen es. Hier sind eben verschiedene Standpunkte gleichberechtigt.)

---

1) vgl. **Hauck**, Jahresbericht VIII, S. 111 Mitte.

2) z. B. zum Ersatz von Konstruktionen, die wegen unzugänglicher Punkte schwerfällig werden oder zu viel Linien auf das Papier bringen.

III.

Zum Prüfungsgebiet in der angewandten Mathematik gehören weiter *die mathematischen Methoden der technischen Mechanik, insbesondere die graphische Statik*. Die Fassung ist mit Absicht sehr unbestimmt gehalten. Wie weit der Begriff sich fassen läßt, sieht man in Göttingen. Dabei ist allerdings zu bedenken, daß die Studenten in mittleren und höheren Semestern nicht entfernt Gelegenheit haben, alle diese Spezialgebiete kennen zu lernen. Studium und Prüfung beschränken sich von selbst, ganz wie in der reinen Mathematik.

In Marburg gebe ich der technischen Mechanik die engste Fassung. Die graphische Statik steht im Mittelpunkt. Ergänzt wird sie durch reine Statik, im Sinne von Poinsot und Möbius, aber zum Teil mehr analytisch gefaßt. Diese Statik bietet dem Mathematiker so viel, daß ich ungern darauf verzichten würde. Dem theoretischen Physiker liegt manches fern, und er hält sich aus Interesse und Zeitmangel mehr an die Dynamik. In der reinen Statik berücksichtige ich auch den Raum ausgiebig, nur kann ich in Marburg nach der projektiven Seite (z. B. Nullsystem) meist nicht weit gehen. In der graphischen Statik beschränke ich mich fast ganz auf die Ebene. Nach einem kurzen Einleitungsabschnitt komme ich rasch zum Seilpolygon und der ganzen damit zusammenhängenden Gruppe von Untersuchungen. Natürlich findet auch der Übergang zur Seilkurve (mit graphischer und analytischer Behandlung) Platz. Von der Theorie des ebenen statisch bestimmten Fachwerkes lasse ich einige höhere Kapitel fort, andererseits gehe ich stellenweise über das Graphische hinaus und meide die Rechnung nicht. Ferner gehe ich noch auf Fragen ein, die in das Gebiet gehören, was der Techniker Festigkeitslehre nennt. Ich bringe einfache Fälle des statisch unbestimmten Fachwerks und die einfache Theorie des geraden gebogenen Balkens. Dabei hebe ich die Hypothesen, welche dem Ansatz zugrunde liegen, stark hervor. Künftig denke ich die allgemeinen Untersuchungen von Maxwell, Mohr und Castigliano in kurzem Abriß zu bringen, ebenso in der Statik der starren Systeme die Momente beweglicher Lasten. Durch diese Erweiterung des Umfangs wird die Vorlesung künftig zwei Semester umfassen, oder ich werde bei den einzelnen Wiederholungen des Kollegs abwechselnd die verschiedenen höheren Gebiete in verschiedenem Maße berücksichtige, um bald das eine, bald das andere in größerem Umfang zu bringen.

In der historischen Entwicklung der graphischen Statik hat die synthetische Geometrie eine große Rolle gespielt. Vieles hat man heute anders herzuleiten gelernt, schon bei Bauschinger hat sich das

während der Abfassung seines Buches ganz von selbst gemacht. Die moderne Darstellungsweise ist für technische Hochschulen unbedingt vorzuziehen. Der Mathematiker an der Universität hat das Recht, vieles aus dem mathematisch Schönen der älteren Behandlung herauszuholen, soweit die Vorkenntnisse der Zuhörer es erlauben.

Kinematik habe ich mehrfach gelesen, jedoch immer als rein mathematisches Kolleg behandelt und nicht fürs Examen gefordert. Ich beschränkte mich auf einleitende allgemeine Untersuchungen und auf genauere Untersuchung der zyklischen Kurven, ferner auf die eine Art der kinematischen Krümmungstheorie. Die kinematische Behandlung der Beschleunigungen und die damit zusammenhängende kinematische Krümmungstheorie brachte ich nicht.

IV.

Über das Zeichnen in der darstellenden Geometrie und graphischen Statik hat Hauck sich ausgesprochen, ebenso hat Herr Krazer einige Angaben gemacht. Ich besitze keinen vollen Überblick über die einzelnen Hochschulen und will hier nur die folgende Zusammenstellung geben. Herr Burmester ließ in Dresden und München die Studenten bestimmte Blätter mit vorgeschriebenen zahlreichen und kleinen Figuren zeichnen und hängte dazu Musterblätter aus. So war dem Studenten die Einteilung des Blattes gegeben, und er konnte (nicht genau aber annähernd) die gegebenen Stücke der einzelnen Figuren kopieren und kam so fast immer zu günstigen Lagen. Neuerdings ist Herr Burmester dazu übergegangen, Figuren und Erklärung der Konstruktionen autographiert auszugeben. Lithographierte Skizzen mit kurzen Angaben der Grundzüge der Konstruktion sind für die Hannöverschen Studenten im Buchhandel. Ich durfte mir mehrere Tage in Karlsruhe den Unterricht der Herren Schur und Schilling ansehen (März 1898) und mehrere Wochen lang (1899) den Hauckschen Unterricht. Dafür ist der frühe Kollegschluß an der Universitität sehr günstig. Nachdem Herr Krazer über Karlsruhe schon berichtete, will ich nur sagen, daß Herr Schilling in Perspektive und graphischer Statik verkleinerte Daten auf lithographierten Blättern ohne Text ausgab, während Hauck in darstellender Geometrie vorwiegend in Anlehnung an die Handskizzen zeichnen ließ, welche die Zuhörer im Kolleg machten. Dazu waren in den Zeichensälen einzelne Figuren ausgehängt, nicht alljährlich dieselben. Die Studenten trafen fürs Zeichnen selbst eine Auswahl unter dem gegebenen Material. In graphischer Statik dagegen gab Hauck Übungsblätter (z. T. mit zahlreichen Figuren zur Auswahl) heraus, mit

genauer Festlegung wesentlicher Punkte, im übrigen aber in freier Federzeichnung.

Im Großbetriebe einer technischen Hochschule ist die Ausgabe von Zeichnungsvorlagen oder die Wiedergabe der Tafelskizzen des Dozenten wesentlich.[1]) Man kann nicht in den Übungen jedem einzelnen behilflich sein, gute Wahl der gegebenen Stücke zu treffen. Bei der geringen Zahl der Teilnehmer in Marburg mache ich mir die Mühe persönlicher Hilfe bei jedem einzelnen; ich weiß, daß dabei am meisten gelernt wird: Die Herren sollen später in dieser Richtung zu einiger Selbständigkeit kommen, obwohl ihnen zu graphischer Arbeit nur geringe Zeit zur Verfügung steht. Sie dürfen deshalb nicht bloß Figuren mit ihnen gegebenen guten Daten kennen lernen, sondern sie müssen oft mit selbstgewählten, also gelegentlich schlechten, Daten anfangen und mit angemessener Beihilfe des Dozenten gute daraus machen. Ich lasse nur teilweise zeichnen, was ich im Kolleg bringe, dazu gebe ich weitere Aufgaben. Dabei lasse ich meist jeden wählen, was er zeichnen will. Ich sehe nur darauf, daß die Figuren des einzelnen günstig aus den verschiedenen Gebieten ausgewählt sind, und daß wenige dasselbe zeichnen. Hierdurch erhält jeder Teilnehmer, wenn er nur die Figuren der anderen gründlich ansieht, einen Überblick über ein verhältnismäßig großes Zeichnungsmaterial, und ihm ist die Möglichkeit geboten, sich in fremde Zeichnungen hineinzudenken.

Trotz geringer Zahl von Übungsstunden läßt sich so ein gutes mathematisches Verständnis und einige Zeichentechnik erreichen. Zum Schönzeichnen, wie ich es bei Herrn Schilling in Göttingen sah, bringe ich die Studenten weniger. Im Ausziehen lasse ich jedem freie Hand. Wer in der darstellenden Geometrie oder graphischen Statik einen Vorteil im farbigen Ausziehen sieht — auch bei bestimmten Arten von Hilfslinien, die man dann nicht strichelt — mag es bei mir tun. Mancher findet wirklich, daß ihm so die Gedanken deutlicher heraustreten. Freilich sieht der Zeichnende nicht immer früh genug, ob ein Blatt zu bunt wird; und solche Blätter kommen vor, weil auch außerhalb meiner Übungsstunden gezeichnet wird. Ich wende für mich farbige Hilfslinien in mäßigen Grenzen an. — Dagegen lege ich großen Wert auf Exaktheit der Ausführung, z. B. Sicherung der einzelnen Punktbestimmung, wenn sich zunächst ein schlechter Schnitt ergibt. Ich lasse mathematisch

1) So habe ich als Burmesters einziger Assistent z. B. das erste seiner zehn Blätter (mit 24 Figuren) in mehr als zweihundert Exemplaren korrigiert. Darin erhält man schließlich einen sehr sicheren Blick und große Schnelligkeit, aber die Korrektur wäre nicht zu bewältigen, wenn selbständige Konstruktionsgedanken der Zuhörer anders als sehr vereinzelt vorkämen.

richtige, aber technisch verfehlte Konstruktionen meiden; bei mir dürfte keiner eine Ellipse aus konstanter Brennstrahlensumme zeichnen. — Oben sprach ich schon aus, daß für mich die darstellende Geometrie nicht bei den ebenflächigen Körpern aufhört, und ich will noch zufügen, daß ich das richtige Zeichnen aller Kurven 2. Ordnung gründlich lehre.[1]) Das tue ich auch in dem Kolleg über analytische Geometrie der Kegelschnitte.

V.

Über die *Geodäsie* hat sich zuerst G. Hauck in seinem Münchner Korreferat (Jahresbericht der Mathematiker-Vereinigung VIII, 108—110 oben) ausgesprochen. Zunächst ist der erzieherische Wert des Faches, die Wichtigkeit der Ausbildung des Sinnes für Präzision hervorgehoben. Außerdem ist die Verschmelzung des theoretischen und praktischen Teiles als wesentlich bezeichnet und damit die Minderwertigkeit einer Kathedergeodäsie betont. Weiter folgen Angaben über höhere Geodäsie und numerisches Rechnen.

In ähnlichem Sinne hat Herr Wellstein sich in einem Straßburger Vortrag geäußert, von dem hier besonders die letzte Seite zu beachten ist (Jahresbericht XI, Seite 198—202). Das numerische Rechnen wird im Anschluß an die Straßburger Verhältnisse mehr als selbständiges Fach hervorgehoben, im Gegensatz zu Hauck.

Kurz zuvor gab Herr Stäckel seinen Bericht über die Entwicklung des Unterrichtsbetriebes in der angewandten Mathematik an den deutschen Universitäten (Jahresbericht XI, Seite 26—37). Er machte darin über den geodätischen Unterricht an einer Reihe von Hochschulen nähere Angaben (Seite 35, 2. Hälfte), die deutlich erkennen lassen, wieviel damals noch anzustreben war. Aus dem zweiten Stäckelschen Bericht (Jahresbericht XIII, Seite 313—341) sind für die Geodäsie besonders Seite 327 Mitte — 328 unten, Seite 330 und These 3 zu nennen.[2])

In seinem Heidelberger Vortrag (Jahresbericht XIII, Seite 517—523) spricht Herr Gutzmer auf Seite 521 Mitte nur kurz von der Geodäsie.

Herr Holzmüller hat im Jahresbericht XIV auf Seite 249—274 ausführliche Bemerkungen über den Unterricht und die Lehramtsprüfung in der angewandten Mathematik veröffentlicht. Die letzten $1\frac{1}{2}$ Seiten

1) Die Krümmungskreise der Scheitel lasse ich benutzen. Je mehr ich selbst zeichne, um so wichtiger ist mir das.

2) Aus diesen Berichten könnte man schließen, daß in Marburg die Geodäsie vor 1902 unvertreten war. Heß und ich haben aber von Anfang an die sämtlichen Fächer vertreten, z. T. freilich in umfangreichen Vorlesungen mit dem Titel „Ausgewählte Kapitel aus der angewandten Mathematik.“ Das mußte zur Nichterwähnung des Marburger geodätischen Unterrichts führen.

betreffen die Geodäsie und ihre Hilfswissenschaften. In Rücksicht auf die relativ geringe Verwendung dieser Studien für die spätere Praxis des akademisch gebildeten Lehrers möchte er, daß die Ansprüche im Examen — und wohl auch das in den Vorlesungen Gebotene — recht eingeschränkt würden. Durch Literaturangaben wird dies näher charakterisiert.

Dieser Überblick über das Wichtigste, was bisher über den geodätischen Universitätsunterricht für Kandidaten der angewandten Mathematik geschrieben wurde, zeigt, daß die Ansichten noch stark voneinander abweichen.

Ich möchte — im Sinne Haucks — die Geodäsie an der Universität durchaus wissenschaftlich behandelt sehen, ohne Vernachlässigung der praktischen Seite. Sie ganz dem Vertreter der Land- oder Forstwirtschaft zu überlassen, ist wohl ein erträglicher Übergangszustand. Doch schon in der niederen Geodäsie wird nur der Mathematiker oder Astronom dem Unterricht den Gehalt geben können, der an der Universität für die Ausbildung von Mathematikern wünschenswert ist. Der Unterricht in höherer Geodäsie darf meiner Ansicht nach nicht wegfallen oder durch ein rein mathematisches Kolleg über Wahrscheinlichkeitsrechnung (ohne geodätische Anwendungen) ersetzt werden. Vielfach wird die Geodäsie dem Astronomen näher liegen als dem Mathematiker. Aber auch an Orten, wo ein Astronom die Geodäsie vertreten könnte, würde ich sie lieber in Händen des Vertreters der übrigen angewandten Mathematik sehen. Nachdem einmal so verschiedenartige Gebiete im Examen vereinigt sind, muß der Examinator sie ausreichend beherrschen; dazu gehört mindestens so viel, als zum Halten einer guten Vorlesung. Ich halte den Vertreter der angewandten Mathematik für den gegebenen Prüfenden.[1]) Allerdings muß der Vertreter der Geodäsie praktische Interessen und praktisches Können haben. So besteht die von Herrn Stäckel (XI, 36) hervorgehobene Schwierigkeit, geeignete Lehrkräfte für die technische Mechanik zu finden, ebenso in hohem Maße für die Geodäsie.

Im Folgenden gehe ich näher auf die Disposition meiner Vorlesung und Übungen über Geodäsie ein, um ein ausführliches Beispiel eines gangbaren und größtenteils erprobten Weges zu geben. Ich bemerke dazu, daß ich früher niedere und höhere Geodäsie in zwei getrennten Vorlesungen las, und daß ich im Sommersemester 1906 beides vereinige. Ich habe die Vorlesung dreistündig angezeigt, dazu Übungen nach Bedarf und Verabredung. Es wird sich dabei um kürzere Übungen

---

1) Vergl. Study Jahresbericht VIII, 134 unten.

im physikalischen Institut und um einzelne Nachmittage mit Messungen im Freien und mit anschließenden Rechnungsarbeiten handeln. Bisher war es durch schlechte Instrumente mit praktischen Übungen schlecht bestellt. — Im Winter folgen einige höhere Kapitel.

Natürlich lasse ich in diesem Berichte manche Einzelheiten fort. Die eigentliche Vorlesung, die Übungen im physikalischen Institut und die Übungen im Freien greifen stark ineinander. Die Abhängigkeit vom Wetter zwingt oft sogar in der Vorlesung zur langen Zurückstellung einzelner Kapitel, deshalb läßt sich die angegebene Reihenfolge nicht streng einhalten.

Daß ich im Kolleg einen tieferen Einblick in das Gebiet zu geben suche, daß ich mehr bringe, als ich für das Examen fordere, ist schon hervorgehoben. Vom Kandidaten verlange ich kein Formelgedächtnis, dagegen lasse ich oft die Ableitung einer Formel so weit entwickeln, bis ich mich vom Verständnis des Kandidaten überzeuge.

VI.

Ich beginne die *niedere Geodäsie* mit der Instrumentenkunde und den elementaren Messungsmethoden. Beide sind in den Büchern und im Unterricht an technischen Hochschulen häufig Gegenstand getrennter Kapitel, und dies hat dort volle Berechtigung. An der Universität wird man auf die Instrumentenkunde nur beschränkte Zeit verwenden, und dann halte ich es für gut, an die Besprechung der einzelnen Instrumente die zugehörigen Messungsmethoden ganz oder wenigstens zum Teil anzufügen.

Zuerst gehe ich auf das wichtigste geodätische Instrument ein, auf den Theodoliten. Die zusammengesetzten Fernrohrokulare, das Fadenkreuz, Libellen und Nonien werden kurz besprochen. Dann folgt weiteres über den Theodoliten, auch die genaue Justierung, ebenso die Ausgleichung von Fehlern durch Ablesung an beiden Nonien, durch Umlegen des Fernrohres u. dgl. Differentialformeln der sphärischen Trigonometrie geben den Einfluß von Fehlern der Justierung, besonders von den Achsenfehlern des Theodoliten.[1]) Daraus erhält man erst ein Urteil über die mit einem bestimmten Instrument erreichbare Genauigkeit der gemessenen Horizontal- und Vertikalwinkel. Man sieht auch die Berechtigung der zum Horizontieren kleinerer Theodoliten dienenden

1) Die Untersuchung läßt sich so führen, daß Beziehungen zum Problem der Reduktion eines Winkels auf den Horizont auftreten. Allgemein behandle ich dieses Problem nicht. Nur vor Einführung des Theodoliten hatte es große praktische Bedeutung in der Geodäsie. Deshalb tritt es auch noch in den darstellend geometrischen Büchern von Monge und seinen Schülern auf.

Dosenlibellen, so lange es sich nur um flache Zielungen handelt. Ferner sieht man z. B., wie groß die Verschiebungen der Libellenblasen an Kreuzlibellen während einer Beobachtung sein dürfen, ohne schädlich zu wirken. Auf Waldboden treten solche Verschiebungen häufig auf.

An den Vortrag schließen sich immer praktische Übungen an. Viel Zeit ist darauf nicht zu verwenden, und man muß berücksichtigen, daß das physikalische Praktikum und das Buch von Kohlrausch einen Teil (aber nur einen Teil) des oben Genannten bieten. Ich lasse zunächst mit dem Theodoliten Horizontalwinkel messen, wobei auf exakte Durchführung nach den heute wirklich verwendeten Methoden zu sehen ist. In erster Linie werden einige volle Sätze von Richtungsmessungen auf *einem* Standpunkt gemacht. Sie sind so einzurichten, daß sie das Material für spätere Rechnungsarbeiten (z. B. Rückwärtseinschneiden) liefern. Auch einige Höhenwinkel lasse ich messen.

Das Gaußsche Repetitionsverfahren wird natürlich besprochen, obwohl es heutzutage praktisch von geringerer Bedeutung ist. Später muß in der allgemeinen Fehlertheorie auf die mit diesem Verfahren zu erreichende Genauigkeit (die häufig überschätzt wurde) eingegangen werden.

Über die in den Übungen zu verwendenden Theodoliten spreche ich später noch ausführlich (Seite 370 ff.).

Die Streckenmessung mit Latten oder Stahlband, das Arbeiten mit Winkelspiegel und Winkelprisma, die Kleinmessung nach der Koordinatenmethode und die Messung eines Polygonzuges behandle ich ganz kurz. Ebenso spreche ich nur kurz von Absteckungsarbeiten. Ich verweise hier — und entsprechend in anderen Fällen — auf geeignete Literatur, darunter auch auf die Wiechertschen Ferienkursvorträge. Dadurch gewinne ich die Möglichkeit, das ganze Kolleg trotz seines Umfanges auf geringe Stundenzahl zu bringen. Zugleich vermeide ich völlig den ausführlichen Vortrag von Gegenständen, welche doch erfahrungsgemäß schlecht mitgeschrieben werden würden. Ich erwarte, daß die Zuhörer sich aus der Literatur den Überblick schaffen und ich fordere ihn in den Grundzügen auch im Examen.

Weiter behandle ich das Vorwärts- und Rückwärtseinschneiden und die einfachsten Triangulationsaufgaben; alles wird ziemlich kurz durchgeführt. Ausführung eines Beispieles ist wesentlich, etwa eine Standpunktsbestimmung durch Rückwärtseinschneiden auf Grund besonderer Messungen und im Anschluß an Zielpunkte, welche durch die Landesvermessung gegeben sind. Man läßt gleich genug Beobachtungen machen, um später in der höheren Geodäsie eine Ausgleichung durch-

zuführen. — Bei der Triangulation bringe ich keine Differentialformeln; sie kommen genug im Kolleg über Zeitbestimmung.

Dann gehe ich auf die Tachymetrie ein. Der Theodolit muß demnach mit dem Reichenbachschen Distanzmesser versehen sein. Die Distanzformel leite ich ab für das Ramsdensche Okular; für das Huygenssche oder orthoskopische (die oft vorhanden sind) gebe ich nur das Resultat an. Die mit der Porroschen Konstruktion erreichbare Vereinfachung der Formel (Wegfall der additiven Konstanten) berühre ich gar nicht

Mein starkes Interesse für Instrumentenkunde und Messungstechnik verleitet mich nicht dazu, auf die Kreutersche und Wagner-Fennelsche Form des Tachymeters[1]) oder den Puller-Breithauptschen (vom Tachymeter getrennten) Schiebermechanismus einzugehen; mathematisch sind es ganz einfache Dinge. Durch Verzicht auf Behandlung dieser Instrumente bleibt auch alles tachymetrische Arbeiten mit schiefer Lattenstellung unbesprochen. Die beiden neuen Puller-Breithauptschen Schiebetachymeter will ich ihres mathematischen und technischen Interesses wegen hier besonders nennen, wenn sie auch nicht in das Kolleg an der Universität gehören. Man liest an ihnen die Höhen ab, und die angezielten Punkte übertragen sich unmittelbar auf Pauspapierscheiben.

Das Tachymeter findet doppelte Anwendung: zur Geländeaufnahme und zur eigentlichen Höhenmessung. Weil es sich nur um wenige praktische Übungen handeln kann, so sind die Jordanschen Tafeln kaum von Vorteil; ich lege sie aber vor, weil sie für Tabulierung einer Funktion zweier Variablen nahezu das einzige Beispiel sind, welches der Mathematiker in die Hand bekommt.

Bei der Geländeaufnahme behandle ich auch sofort das Entwerfen eines Planes mit Höhenkurven und gehe auf darstellend-geometrische und topographische Fragen ein. Peschka, kotierte Projektion, Wiener, Rohn-Papperitz, bieten viel, dazu kommen die schönen Angaben von Hauck (Jahresbericht VIII, Seite 112 und Hoffmanns Zeitschrift 36, Seite 152—153). Leider ist man im Kolleg vielfach zum bloßen Zitieren gezwungen und für die praktischen Arbeiten bleibt wenig Zeit. (Im folgenden Semester komme ich hierauf zurück.)

Die Meßtischblätter der Landesvermessung werden mit der Kippregel durchaus tachymetrisch hergestellt im Anschluß an die aus der

1) Diese haben einen Vorläufer in einer Breithauptschen Tachymeter-Kippregel mit Schiebern, wobei die Punkte sich unmittelbar auf den Meßtisch übertragen und die Höhen abgelesen werden. Auch sonst finden sich moderne Instrumente in ganz alten Exemplaren, wofür ein Gang durch das Münchner Museum für Meisterwerke der Naturwissenschaft und Technik lehrreich ist.

Triangulation folgenden und auf das Blatt übertragenen Dreieckspunkte. Deshalb gehe ich schon hier etwas auf den Meßtisch und die Herstellung der Meßtischblätter ein.

Die tachymetrische Höhenmessung werde ich in einem einfachen Fall praktisch durchführen lassen. Vor einigen Jahren fehlte ein brauchbares Instrument.

Nach Besprechung der Tachymetrie gehe ich zum Nivellieren über. Der kleine Theodolit kann dazu eingerichtet sein durch eine auf dem Fernrohr sitzende Libelle (diese ist auch sonst für Messungen von Höhenwinkeln gut). Besser ist ein besonderes Nivellierinstrument von kleinen Dimensionen. Später folgen darüber nähere Angaben. Arbeiten lasse ich nur mit einspielender Libelle, wobei für eigentliche Höhenmessung Zehntel der Lattenteilung abgelesen werden. Das Einstellen auf die Mitte eines Feldes der Lattenteilung erwähne ich nur beiläufig. Genauer bespreche ich nur die Höhenbestimmung mittels Nivellierinstrumentes und lasse auch nur diese praktisch durchführen.[1]) Dagegen können die Angaben über das Flächennivellement kurz ausfallen, nach dem, was früher über tachymetrische Geländeaufnahme gesagt ist.

In Marburg hat die Stadt für die Kanalisation an verschiedenen Häusern Höhenbolzen angebracht, auch am physikalischen Institut. Dadurch hat man gute Anfangs- und Endpunkte mit beträchtlicher Höhendifferenz für tachymetrische Höhenbestimmung oder für Höhenbestimmung mit dem Nivellierinstrument, und man kann die gemessenen Höhen gut kontrollieren.

Einmal hat ein Examenskandidat freiwillig ein Nivellement über eine mehrere Kilometer lange Strecke auf Landstraße im Waldeckischen Hügelland gut durchgeführt und danach auch ein Längsprofil und einige Querprofile gezeichnet. Die Strecke wurde in beiden Richtungen nivelliert, hin mit 25, zurück mit 50 Meter Zielweite. Leider unterblieb durch mangelnde Rücksprache mit mir die Anbringung von Fixpunkten in geeigneten Abständen. Das ganze ausführliche Zahlenmaterial hat dadurch nicht die Ausnutzbarkeit als Beispiel zur Fehlertheorie des Nivellierens, die mit geringer Mühe erreichbar gewesen wäre.

Die trigonometrische Höhenmessung bespreche ich kurz, ausführlicher die barometrische. Zu dieser besitzt das physikalische Institut gute Instrumente Durch die städtischen Höhenbolzen ist man in der

1) Die genaue Fehlertheorie wird in der höheren Geodäsie behandelt. Damit hängt es auch zusammen, daß ich das Nivellierinstrument erst so spät bringe, obwohl hier alles auf den ersten Blick einfacher scheint als beim Tachymeter. Gutes Arbeiten mit dem Instrument setzt Einblick in die Fehlertheorie voraus; demnach lasse ich erst spät nivellieren.

Lage, rasch ein anschauliches Bild von der Leistungsfähigkeit der Aneroide zu gewinnen und die Berechtigung linearer Interpolation für die vorliegenden Höhenunterschiede zu bestätigen.

Angaben über die Genauigkeit der anderen Methoden zur Höhenmessung mache ich schon jetzt, wenn auch die Begründung dieser Angaben — soweit ich sie überhaupt gebe — zum großen Teil erst später folgen kann.

Den Rechenschieber bespreche ich kurz. Die Theorie der einfachsten Planimeter entwickle ich, ich lasse mit unserem Instrument arbeiten und lege zur Beurteilung der Genauigkeit Resultate eigener Messungen vor. Die Studenten, die von verschiedenen Hochschulen kommen, haben meist keine Gelegenheit gehabt, Theorie und Handhabung eines Planimeters kennen zu lernen. Die Behandlung dieses Instrumentes im Kolleg über Integralrechnung scheint ein Ausnahmefall.

Auf die einfachsten rechnenden Methoden der Photogrammetrie gehe ich im geodätischen Kolleg ein, während ich im Kolleg über Perspektive andere Teile der Photogrammetrie bespreche. Durch Untersuchungen, welche den beim Theodoliten vorgekommenen zum Teil entsprechen, aber von mir auch nur in den Hauptzügen gegeben werden, vervollständigt man ohne weiteres das Urteil über die erreichbare Genauigkeit.

Durch die Freundlichkeit von Herrn Professor Finsterwalder in München konnte ich mit seinem (größeren) photogrammetrischen Instrument arbeiten lassen. Ich danke auch an dieser Stelle dafür. Solches Arbeiten mit einem geliehenen Instrument ist aber immer unvollkommen; wir hatten das Instrument etwa 10 Tage, dann mußte es zu Gletschermessungen fortgeschickt werden. Dabei hatten wir den größten Teil der Zeit schlechtes Wetter, und ein Teil der Platten hat unter falscher Belichtung gelitten, da das Arbeiten mit Gelbscheibe gut ausprobiert sein will. Wir haben dabei auch den Fehler gemacht, mit hochempfindlichen, nicht genügend feinkörnigen Platten zu arbeiten, andere waren nicht rasch zu haben.

Ein photogrammetrisches Instrument (etwa die neue Finsterwaldersche Konstruktion für Platten 9 : 12 cm) stellt für Marburg eine fast ebenso wichtige Anschaffung dar, wie ein guter kleiner Theodolit.

Zu einer Spezialvorlesung über Photogrammetrie kam ich bisher noch nicht.

Der Sextant ist kaum noch ein geodätisches Instrument. Ich bespreche ihn in der Geodäsie nicht, weil astronomische Zeit- und Ortsbestimmung einer besonderen Vorlesung vorbehalten sind und regelmäßig gelesen werden. Wenn diese Vorlesung auch nicht durch die

Prüfungsbestimmungen vorgeschrieben ist, so trägt sie doch wesentlich zur Vervollständigung der Ausbildung in der angewandten Mathematik bei. Sie sollte auch von reinen Mathematikern gehört werden, und keineswegs bloß von solchen, die zugleich Geographie studieren.

VII.

Bisher bot sich in Marburg keine Gelegenheit, daß gleichzeitig mit der Geodäsie Wahrscheinlichkeitsrechnung gelesen wurde und in diesem Semester wird es wieder so sein. Ich schalte deshalb in die geodätische Vorlesung einen kurzen Abriß der Wahrscheinlichkeitsrechnung, der Fehlertheorie und der Methode der kleinsten Quadrate ein, unter Beschränkung auf das für die Geodäsie Wesentlichste.

Als erstes und einfachstes Beispiel für die Fehlertheorie behandle ich den mittleren Fehler beim Nivellieren in seiner Abhängigkeit von Zielweite und Länge der ganzen Strecke. Dann folgt die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf die Ausgleichung beim Annivellieren eines Punktes auf verschiedenen Wegen oder bei einem Nivellements-Netz. Von den Veröffentlichungen der Landesvermessung lege ich dabei den betreffenden Band für einige Zeit ins Seminarzimmer.

Dann bespreche ich die Ausgleichung bei Horizontalmessungen mit dem Theodoliten. Zuerst nehme ich den Fall, wo in einem Dreieck die drei Winkel gemessen sind; man wird zu gleicher Verteilung des Widerspruchs auf die drei Winkel geführt. Dann folgt die Ausgleichung beim Vorwärts- und Rückwärtseinschneiden. Ich führe aber im letzten Fall nicht alle Einzelheiten für die beiden Verfahrungsweisen der Winkel- und Richtungsmessungen durch, sondern behandle das Problem nur so weit, daß nach einer der Methoden die wirkliche Durchführung eines Beispieles möglich wird.

Bei der Ausgleichung einer Triangulation in der Ebene beschränke ich mich auf die Besprechung weniger, einfacher Fälle und lasse praktische Arbeiten dieser Art nicht durchführen.

Ich halte es für recht erwünscht, daß ein künftiger Oberlehrer sich mit numerischem Rechnen praktisch beschäftigt, mehr als dies in meinen Übungen möglich ist.[1]) Doch möchte ich nicht einführen, daß jeder Marburger Kandidat der angewandten Mathematik im Laufe seiner Studienzeit eine geodätische Arbeit macht und zum Examen einreicht (Messungen mit Berechnung und Ausgleichung).

Die Fehlertheorie bietet eine Reihe wichtiger und schöner Untersuchungen, auf die ich übrigens im Kolleg nur teilweise eingehe. Die

1) Vergl. die zweite Anmerkung auf folg. Seite.

Fehlertheorie der Basismessung, des Polygonzuges und des Repetitionsverfahrens beim Theodoliten gehört hierher, weiter die Untersuchung über die Genauigkeit der Punktbestimmung beim Vorwärts- und Rückwärtseinschneiden. Hierbei kommt man auf die Fehlerellipse und Verwandtes.

Ich gehe dann über zu geodätischen Aufgaben auf der Erdkugel; ich bespreche dabei z. B. Vorwärts- und Rückwärtseinschneiden und einfache Triangulationsaufgaben ganz kurz, auch die Ausgleichungsprobleme. Dabei beschränke ich mich zum Teil auf Literaturangaben. Manche Zuhörer zeigen in sphärischer Trigonometrie und weiterhin in allgemeiner Flächentheorie geringe Vorkenntnisse.

Es folgt die Berechnung sphärischer Dreiecke von verhältnismäßig kurzen Seiten mittels ebener Dreiecke. Dabei gehe ich auf die Additamente nicht, auf das Legendresche Verfahren kurz ein und zitiere den Schluß der Gaußschen Disquisitiones circa superficies curvas.

Dann folgt ein gedrängter Bericht über die Dreiecksketten und Füllnetze der Landesvermessung und über die zugehörigen Beobachtungs- und Ausgleichungsmethoden. Ich kann mich kurz fassen im Anschluß an das früher über ebene Triangulation Gesagte und benutze wieder die Veröffentlichungen der Landesvermessung, besonders den Band für Hessen-Nassau. Die rheinisch-hessische Dreieckskette bietet gerade besondere Eigentümlichkeiten und gehört zu den spät, also nach moderner Methode vermessenen. Ich verwende auf diese Schilderung nur ganz wenig Zeit, mache aber die bessere und dabei einigermaßen leicht lesbare Literatur bequem zugänglich.

Aus diesen kurzen Angaben über die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf die Triangulation in der Ebene und auf die Landestriangulation wird man ersehen, daß es mir im wesentlichen um den mathematischen Gehalt des Verfahrens zu tun ist und nicht um Einzelheiten der Beobachtungs- und Rechentechnik.[1]) Dabei halte ich übrigens aus prinzipiellen Gründen und aus persönlichem Interesse darauf, daß ich nicht in bequemer Idealisierung falsche Angaben über technische Einzelheiten mache. — Numerisches Rechnen ist mir in diesem Kolleg niemals Selbstzweck.[2])

---

1) Die von Herrn Holzmüller ausgesprochene Befürchtung, daß ein Mathematiker in geodätischen Vorlesungen den ganzen Umfang des Hansenschen Buches vortragen würde, trifft für mich nicht zu.

2) Dagegen hielt ich z. B. im vorigen Semester ein Kolleg über höhere Fragen der Elementar-Mathematik, in dem ich u. a. auf die Herstellung von Tafeln und die lineare und höhere Interpolation einging und damit eine Reihe von Fragen des numerischen Rechnens berücksichtigte.

Ferner behandle ich die geodätischen Polarkoordinaten und geodätische rechtwinklige Koordinaten im allgemeinen und für die Kugel. Dann gehe ich über zu den Soldnerschen inkonformen und den Gaußschen konformen rechtwinkligen Koordinaten — zur Vereinfachung unter der Annahme kugelförmiger Erde.

Vom kartographischen Teil der Arbeiten der Landesvermessung bringe ich dann auch einige wesentliche Punkte. Dabei verweise ich wieder auf geeignete Literatur, auch auf das kleine Buch von Häntzschel, natürlich mit Bezug auf die Gallesche Besprechung.

Diese kartographischen Angaben und die vorhergehende Untersuchung über die gebräuchlichen rechtwinkeligen Koordinaten in der Geodäsie führen zu Fragen der allgemeinen Abbildung krummer Flächen, die sehr viel rein mathematisches Interesse bieten, zu deren näherer Behandlung aber innerhalb der Vorlesung über Geodäsie keine Zeit bleibt. Die funktionentheoretische Seite dieser Probleme ist natürlich auch zu nennen, es ist aber hervorzuheben, daß damit nur ein kleiner Teil erledigt ist, daß die allgemeine, die inkonforme Abbildung mathematisch wichtig und kartographisch von größter Bedeutung ist. Eine Spezialvorlesung über solche Abbildungsprobleme, vom allgemeinen flächentheoretischen Standpunkt aus und mit Berücksichtigung geodätischer und kartographischer Gesichtspunkte halte ich im folgenden Semester. Freilich geht sie unbedingt über die Anforderungen des Examens hinaus.

Auf das Besselsche Erdellipsoid und das Geoid gehe ich kaum ein. Demnach bleibe ich hinter einer Forderung von Hauck zurück (Jahresbericht, VIII, 109 Mitte). Zu gründlicher mathematischer Behandlung fehlt es immer an Zeit und fast immer an ausreichender geometrischer Vorbildung der Zuhörer. Ich stehe überhaupt für die Abgrenzung des Stoffes in der höheren Geodäsie durchaus auf dem Standpunkt, daß es sich nicht um Halbheiten handeln darf; lieber lasse ich einzelne an sich wichtige Kapitel fort. In den vorher genannten Kapiteln läßt sich bei beschränktem Umfang noch eine gute Abrundung erreichen.

VIII.

Eine nähere Besprechung erfordern die für den geodätischen Universitätsunterricht nötigen oder erwünschten Instrumente.

Irgend ein alter Repetitionstheodolit wird wohl überall durch das physikalische Institut zur Verfügung stehen. In Marburg sind mehrere vorhanden, darunter sehr wertvolle mit großen Teilkreisen und feiner Teilung, die durch ihre Schwere und Unhandlichkeit gar nicht für den

Unterricht geeignet sind.[1]) Ich lasse höchstens einen von ihnen zur Messung eines Winkels durch Repetition verwenden, auf dem astronomischen Turm des physikalischen Institutes.

Für alle übrige Verwendung des Theodoliten ist ein kleines Instrument mit Nonien für ganze oder halbe Minuten ausreichend und sogar erwünscht. Einrichtung zur Repetition ist nicht nötig. Wenn sie vorhanden ist, benutzt man sie eigentlich nur zum Drehen des Limbus zwischen den einzelnen Messungssätzen und gelegentlich zum Einstellen des Limbus auf genäherte Azimute. Fehlt die Repetitionseinrichtung und ist der Limbus drehbar (nur durch Reibung gehalten, wie z. B. bei einigen Ertelschen und Hildebrandschen Instrumenten), so tut dies denselben Dienst. Bei festem Limbus wird der Dreifuß zwischen den einzelnen Sätzen auf dem Statif umgestellt.

Bei diesem kleinen Instrument, dem eigentlichen Gebrauchsinstrument für die Übungen, ist gute Ablesbarkeit der Teilungen im Freien — bei Sonne ohne Schirm — wesentlich. Nach meiner bisherigen Erfahrung sind dazu die in kleinen rechteckigen Rahmen befindlichen, an den Lupen befestigten, weißen Beleuchtungsvorrichtungen wesentlich schlechter, als die zylindrischen durchscheinenden Hülsen aus Celluloid, welche mit den Lupen konaxial bis fast an die Teilung gehen. Ich habe sie nur im Breithauptschen Katalog und bei Breithauptschen Instrumenten, außerdem als nachträgliche Zufügung bei dem Tesdorpfschen Reiseinstrument eines Geographen kennen gelernt.

In Marburg sind früher auf Grund einer einmaligen Bewilligung so geringe Mittel für angewandte Mathematik vorhanden gewesen, daß es nicht möglich war, einen brauchbaren kleinen Theodoliten anzuschaffen. Bei einem vorhandenen kleinen Instrument ist die Teilung zu schwer ablesbar. Bei Sonne mußten wir im zweiten Halbsatz aufhören und mußten deshalb auf die Bestimmung unseres Standpunktes durch Rückwärtseinchneiden verzichten. Ein neuer Theodolit konnte in diesem Semester beschafft werden.

Bei jedem Anzielen eines Punktes durch das Fernrohr ist wesentlich, daß das Fadenkreuz scharf sichtbar ist und in der Bildebene des Objektes liegt. So braucht jeder Beobachter eigentlich seine besondere Einstellung des Fadenkreuzes im Okularrohr. Die Folge ist gewöhnlich bei Benutzung durch aufeinanderfolgende Beobachter, daß das Okularrohr durch die Triebschraube verschoben wird, bis der Beobachter Faden-

1) Teils stammen sie aus dem Gerlingschen Institut, teils von der kurhessischen Landesvermessung und dem kurhessischen Polytechnikum.

kreuz und Objekt zugleich möglichst deutlich sieht, und dann sind beide im allgemeinen nicht mehr in einer Ebene. Das erzeugt ungenaue (von der Haltung des Auges abhängige) Zieleinstellung. Ähnliche Störungen treten ein, wenn mehrere Beobachter am Tachymeter oder Nivellierinstrument die Latteneinteilung ablesen. Es gibt ein sehr einfaches Mittel zur Abhilfe. Die äußerste Linse des Huygensschen Okulars oder das Ramsdensche Okular wird im Okularrohr beweglich angebracht, so daß sie bei Drehung sich vor- oder zurückschraubt. Dann kann jeder der sich ablösenden Beobachter mühelos und rasch das Fadenkreuz scharf einstellen, ohne dessen Abstand vom Objektiv zu ändern. Diese Einrichtung ist für den praktischen Geodäten überflüssig, deshalb auch sehr selten an Instrumenten vorhanden. Für den Unterricht ist sie wichtig; sie sollte bei Anschaffung für Unterrichtszwecke immer bestellt werden und läßt sich auch nachträglich leicht beschaffen.

So lange der kleine Theodolit nur geodätischen Zwecken dienen soll, wird man ein Instrument wählen, dessen Vertikalkreis entweder dieselbe oder eine weniger feine Einteilung hat, wie der Horizontalkreis. Ausreichend ist ein Instrument, welches am Horizontalkreis zwei Nonien für ganze Minuten hat, während am Vertikalkreis mit nur einem Nonius ganze Minuten abgelesen werden (*a*). Besser ist ein Theodolit, der an jedem Kreis zwei Nonien hat, und bei dem man die Horizontalwinkel auf ganze oder halbe, die Vertikalwinkel auf ganze Minuten abliest (*b*). Alhidadenlibelle am Höhenkreis darf fehlen. Eine noch größere Genauigkeit des Instrumentes würde dem Unterrichtszwecke nicht entsprechen und das Instrument zu unhandlich machen. Soll jedoch der Theodolit auch für Zeitbestimmung dienen, dann müssen Vertikalwinkel mindestens ebenso genau als Horizontalwinkel erhalten werden, und der Vertikalkreis braucht eine Alhidaden-Libelle. Das Fernrohr muß exzentrisch sein. Eine Reiterlibelle auf der Horizontalachse ist dringend erwünscht, Fadenkreuzbeleuchtung (durch die Horizontalachse oder durchs Objektiv) ist nötig. Gut ist eine Visiervorrichtung außen am Fernrohr. Ablesung ganzer oder halber Minuten am Vertikalkreis wird ausreichen, sonst wird das Instrument für die übrige Verwendung zu schwer (*c*). Für die Zeitbestimmung allein würde ich ein größeres Instrument vorziehen; geodätische Rücksichten entscheiden für ein so kleines Instrument. Dabei bin ich der Ansicht, daß es auch für die Zeitbestimmung dem Unterrichtszweck völlig genügt. Denn wesentlich sind nur das Kennenlernen der Methode, die Beurteilung der erreichbaren Genauigkeit und die sorgfältige praktische Durchführung der Messung und Rechnung.

Zu den oben mit a, b, c bezeichneten Theodoliten verschiedener Einrichtung und Genauigkeit mache ich noch die folgenden Angaben: Ein Instrument a ist in Göttingen neben größeren Theodoliten wirklich in Gebrauch, Breithaupts kleinster Theodolit, N. 44 des neuesten Kataloges, zu 210 ℳ. Im wesentlichen dasselbe Instrument mit größerem Vertikalkreis, Repetition, Ableselupen, Aufsatzbussole und Distanzfäden ist Breithaupts kleinster Grubentheodolit, N. 210, und kostet 315 ℳ, mit Silberlimbus 345 ℳ. Ich ziehe beiden das Instrument N. 46 vor, als guten Repräsentanten des oben mit b bezeichneten Typus: Horizontalkreis von 12 cm, Nonien zu 1′, auf Wunsch $^1/_2$′, Vertikalkreis 9,5 cm, Nonien zu 1′, Fernrohr mit 18-facher Vergrößerung, 315 ℳ. Distanzfäden sind besonders zu bestellen. Außer einer Dosenlibelle hat das Instrument nur noch eine Libelle, auf dem Fernrohr. Natürlich bauen auch andere Firmen Theodoliten von dem hier besprochenen Typen a und b, je nach der Ausführung und dem Fernrohr wird man bis zum Preis von 400 oder 420 ℳ kommen; ich nenne von Fennel Nr. 38, 39, 35 ff., 113, von Hildebrand (Freiberg i. S.) den Theodoliten N. 239, Ertel baut keine Theodoliten solcher Größe. — Auch für c möchte ich Beispiele nennen. Erstens Breithaupts Gruben- und Reisetheodoliten N. 222 zu 410 ℳ, mit verdeckten Teilungen, Alhidadenlibelle am Vertikalkreis, Fernrohrlibelle, Aufsatzbussole und Distanzfäden; Libelle auf Horizontalachse, Visiervorrichtung wären zuzufügen. Zweitens ein ziemlich kleines Reiseinstrument von Tesdorpf, drittens einen Hildebrandschen Theodoliten, welcher ganz besonders den Bedürfnissen der Reise angepaßt ist. Er hat exzentrisches Fernrohr von 11-facher Vergrößerung, verdeckte Kreise, der Horizontalkreis von 8 cm hat Nonien zu 1′, während der Vertikalkreis von $9^1/_2$ cm Nonien zu $^1/_2$′ hat. Okularprisma, Sonnenblende, Fadenkreuzbeleuchtung, Libelle auf der Horizontalachse und am Höhenkreis sind vorhanden. Das Gewicht ist nur 1,6 kg, Preis mit Stativ 350 ℳ. Für den allgemeinen geodätischen Gebrauch dürfte dieser Theodolit durch Kleinheit und geringe Fernrohrvergrößerung sich weniger empfehlen; der Breithauptsche und Tesdorpfsche sind allgemein verwendbar. Wir haben Breithaupts Nr. 223 (mit Ablesung halber Minuten) gewählt. — Als größeres Reiseinstrument ist das Ambronn-Fennelsche genügend bekannt.

Ist beim kleinen Theodoliten eine Fernrohrlibelle vorhanden, dann kann man auch ganz gut auf ein Nivellierinstrument verzichten, besser freilich ist ein eigentliches Nivellierinstrument neben dem Theodoliten; nur ein kleines, handliches, für leichtes und rasches Arbeiten geeignetes kommt in Betracht. 12 bis 20-fache Fernrohrvergrößerung reicht aus.

Die korrigierbare Libelle und das Fernrohr können fest mit dem Unterteil verbunden sein. Die Justierung ist dann freilich etwas erschwert, aber das Instrument ist recht stabil, und die bei mehrstündigem Arbeiten unvermeidlichen Veränderungen sind gering und stören beim Nivellieren aus der Mitte nicht. Bei einem zweiten Typus ist die korrigierbare Libelle fest am Träger und das Fernrohr ist drehbar und umlegbar. Bei einem dritten Typus ist auch die Libelle abnehmbar und umsetzbar, sie sitzt auf dem Fernrohr. Die Wahl zwischen diesen drei Typen ist einigermaßen Sache des persönlichen Geschmackes, komplizierte Instrumente kommen kaum in Frage. Eine Dosenlibelle und ein Libellenspiegel sind bequem. Unter den Ertelschen Instrumenten sind alle drei Typen vertreten; den ersten Typus liefert er bei 13-facher Vergrößerung je nach dem Träger zu 110—126 *M*, den zweiten bei 20-facher zu 165 *M*, den dritten bei ebenfalls 20-facher Vergrößerung zu 136 und 165 *M*. Breithaupt baut kleine Nivellierinstrumente nur vom ersten Typus, bei 18 und 24-facher Vergrößerung zu 120 und 145 *M*, beide mit Dreifuß, außerdem ein kleines Taschenniveau zu 110 *M*. (Bei allen Preisen ist das Statif inbegriffen). Gute Nivellierlatten, die auch zur Tachymetrie dienen, erhält man für 20—30 *M*. In Marburg haben wir ein altes Reichenbachsches Nivellierinstrument mit kleinem Horizontalkreis, und ein kleines Fennelsches.

Bei Beschaffung eines photogrammetrischen Apparates beschränkt man sich am besten auf vertikale Plattenstellung, sie ist doch für rechnendes und graphisches Arbeiten weitaus das Einfachste und i. a. ausreichend; natürlich ist ausgiebige Verschiebung des Objektivs nötig. Ein geteilter Horizontalkreis oder eine feste Bussole auf der Kamera hat manche Vorteile für das Aneinanderschließen und die Orientierung von Bildern. Professor Finsterwalder hat für Gletschermessungen mehrere sehr kompendiöse Apparate dieser Art gebaut. Sie sind meist mit einem hinten befindlichen Okular versehen, welches in Verbindung mit dem verschiebbaren Objektiv als Fernrohr dient und Höhenwinkel zu messen gestattet. Sein neuestes Modell für Platten 9 : 12 cm wird sich sehr gut für Unterrichtszwecke eignen. Nur wird man für unmittelbare graphische Verarbeitung der Aufnahmen Vergrößerungen anwenden müssen, was sehr gut geht. — Auch auf die Schillingsche Veröffentlichung betreffs graphischer Behandlung der Photogrammetrie sei hier verwiesen. Sein Apparat ist speziell für architektonische Zwecke gebaut, mit verschiedenen Brennweiten, großem Plattenformat, vielen auswechselbaren Teilen, trotzdem stabil.

Hiermit ergibt sich folgende Zusammenstellung der Kosten für geodätische Apparate, wobei ich annehme, daß ein größerer Theodolit ohnedies zur Verfügung steht.

Kleiner Theodolit mit Distanzfäden	(210)—315—420 ℳ.
Nivellierinstrument.	120—165 ℳ.
Nivellierlatte (auch zur Tachymetrie)	20— 30 ℳ.
Photogrammetrischer Apparat, etwa der neue Finsterwaldersche	380 ℳ.
Kleinere Instrumente: Winkelspiegel, Winkelprisma, Meßlatten oder Stahlband u. dergl., wobei man übrigens manche Beschränkung eintreten lassen kann; Planimeter, Rechenschieber.	75—150 ℳ.

Damit kommt man zu etwa 950—1100 ℳ, was ziemlich mit den Angaben von Hauck in seinem Münchener Korreferat, 1000—1200 ℳ, übereinstimmt (Jahresbericht der Mathematiker-Vereinigung VIII, S. 109). Durch Weglassung des Nivellierinstrumentes, durch Verzicht auf einige kleinere Anschaffungen läßt sich die Summe erniedrigen, auch kann man einen einfacheren photogrammetrischen Apparat beschaffen. Man sollte übrigens weit eher auf ein Nivellierinstrument verzichten, als auf einen photogrammetrischen Apparat. Wo die Mittel für einen solchen nicht ausreichen, sollte wenigstens die photogrammetrische Bearbeitung gewöhnlicher Photographien besprochen und in den Übungen durchgeführt werden. Man kann damit einen Zweck verbinden, z. B. in einem Gebirgspanorama die einzelnen Pnnkte bestimmen lassen.

Ich halte es nicht für überflüssig, einige Angaben über die geodätische Literatur zu machen, welche den Studenten in Marburg zur Verfügung steht. Hess hat das Buch seines Lehrers Gerling für das Seminar angeschafft, ebenso Kolls Ausgleichungsrechnung. Für Anschaffung von Baule, Miller, des kleinen Buches von Reinhertz sorgte ich, ebenso in letzter Zeit für die 5. Auflage von Jordan, soweit sie in der Reinhertzschen Bearbeitung erschienen ist. Auch für Landesvermessung und Topographie habe ich einige kleinere Bücher anschaffen lassen, die ich hier im einzelnen nicht nenne. In der Universitäts-Bibliothek ist die ältere geodätische Literatur, die für den Studenten nicht in Frage kommt, natürlich sehr reichhaltig vertreten; aber die Fürsorge für Geodäsie hat auch nach Gerlings Tod nicht aufgehört: Bauernfeind, eine alte Auflage von Jordan, Helmerts

Ausgleichungsrechnung und Helmerts großes Werk, ebenso Meidenbauers und Koppes photogrammetrische Bücher sind Zeuge davon. Die bevorstehende Neuauflage von Helmerts Ausgleichungsrechnung werde ich natürlich fürs Seminar beantragen.

Auf zwei der genannten Bücher will ich noch kurz eingehen: Baule bietet eine recht gute Instrumentenkunde; die Messungslehre ist ganz elementar. Auch abgesehen von der Ausgleichung und abgesehen von einigen kleinen Fehlern entspricht sie nicht dem an der Universität zu vertretenden Standpunkt. Millers Taschenbuch für Geometer (erschienen bei Jänecke in Hannover) bietet in gedrängter Form sehr viel und sehr Gutes. Freilich hat den vollen Nutzen nur der, welcher gut zwischen den Zeilen lesen kann: Die Technik der Justierungen und Messungen ist sehr genau beschrieben, die Gründe dafür fehlen. Den ausübenden Techniker befriedigt ein solches Buch durchaus, er muß jederzeit rasch sehen können, wie etwas gemacht wird, nach den tieferen Gründen zu fragen, hat er nicht Zeit und meist auch nicht das Bedürfnis. An einer technischen Hochschule liegt in jeder Abteilung eine solche Fülle von Stoff für die vierjährige Studienzeit vor, daß die Art des Unterrichtes und der Prüfungen weit mehr auf Erziehung zum Können als auf Erziehung zum Wissen zugeschnitten ist. Der Universitätsunterricht in Fächern, die beiden Hochschulen gemein sind, wird und soll anders sein, als der technische Unterricht. Damit will ich den technischen Unterricht nicht als minderwertig hinstellen, er erfordert eben einen anderen Maßstab. Unsere mathematischen Universitätsstudenten in mittleren Semestern und manchmal sogar die Examenskandidaten haben oft im Studiengebiet der beiden ersten Semester, in Infinitesimalrechnung und Geometrie der Kegelschnitte und Flächen 2. Ordnung, so geringe Kenntnisse, daß man wünschen möchte, sie hätten ihre ersten Semester an einer technischen Hochschule verbracht, wo der Unterricht hinsichtlich der Übungen intensiver ist und wo noch etwas dem schwächeren Zuhörer günstig ist: Wir Dozenten an der Universität müssen diese Anfangsvorlesungen oft gegen unser pädagogisches Gefühl schwer machen. Denn wir dürfen manche schwierigen Kapitel nicht ausscheiden, weil sonst die Gefahr besteht, daß unsere Studenten sie überhaupt nicht kennen lernen.

Über die Grundlagen der Geometrie.

Von G. Frege in Jena.

(Fortsetzung.)

II.

Bevor ich mich auf die Wendung einlasse, die Herr Korselt der Hilbertschen Lehre gibt, indem er sie als formale Theorie oder reinen Lehrbegriff kennzeichnet, möchte ich eine Betrachtung anstellen, deren Ergebnis für die Auffassung und Beurteilung jener Wendung wichtig ist.

Herr Korselt scheint nicht immer den Satz als das sinnlich Wahrnehmbare von dem Gedanken zu unterscheiden, der sein Sinn ist. Ich nenne Satz schlechtweg oder eigentlichen Satz eine Gruppe von Zeichen, die einen Gedanken ausdrückt; was aber nur die grammatische Form eines Satzes hat, nenne ich uneigentlichen Satz. Solche finden sich oft als Bedingungs- und Folgesätze in hypothetischen Satzgefügen. Man findet vielfach die Auffassung des hypothetischen Urteils, als ob dadurch Urteile (propositions) in Beziehung gesetzt würden. Aber dies trifft nur selten zu, auch wenn man statt „Urteil" „Gedanke" sagt; denn wir haben oft weder im Bedingungssatze, noch im Folgesatze einzeln einen Gedanken, sondern nur im ganzen Satzgefüge. Betrachten wir den Satz: „Wenn etwas größer als 1 ist, so ist es eine positive Zahl"! „Etwas" und „es" weisen hier aufeinander hin. Zerreißen wir diesen Zusammenhang, indem wir die Sätze trennen, so wird jeder von ihnen sinnlos. „Es ist eine positive Zahl" besagt nichts. In dem Satze „Etwas ist größer als 1" kann man zwar einen Gedanken ausgedrückt finden, nämlich daß es etwas gebe, was größer als 1 sei; aber in diesem Sinne kommt der grammatische Satz nicht als Bedingungssatz im Satzgefüge vor. Wir können jenen Gedanken auch ausdrücken, indem wir uns des Buchstaben »a« wie in der Arithmetik bedienen:

„Wenn $a > 1$, so ist $a > 0$".

Der Buchstabe »a« deutet hier nur an, wie vorhin die Wörter „etwas" und „es". Die Allgemeinheit erstreckt sich auf den Inhalt des ganzen Satzgefüges, nicht auf den des Bedingungssatzes für sich und auf den des Folgesatzes für sich. Da weder dieser noch jener einzeln einen Gedanken ausdrückt, so ist keiner von ihnen ein eigentlicher Satz. Das ganze Satzgefüge ist ein solcher; es drückt einen einzigen Ge-

danken aus, der nicht in Teilgedanken zerlegt werden kann. Wir können diesen Gedanken auch so ausdrücken:

„Was größer als 1 ist, ist eine positive Zahl“.

Der erste grammatische Satz nimmt eigentlich die Stelle des Subjekts ein, und der zweite enthält das zugehörige Prädikat. Auch hieraus erhellt, daß wir logisch gesprochen nur einen einzigen Satz haben. Wir haben hier nicht eine Beziehung zwischen Gedanken, sondern die Beziehung der Unterordnung des Begriffs *größer als* 1 unter den Begriff *positive Zahl.*

Den Gedanken des Satzes:

„Wenn das Quadrat von etwas 1 ist, so ist dessen vierte Potenz ebenfalls 1“

können wir auch so ausdrücken:

„Wenn $a^2 = 1$, so ist $a^4 = 1$“,

oder auch

„Was Quadratwurzel aus 1 ist, ist auch Biquadratwurzel aus 1“,

oder auch

„Jede Quadratwurzel aus 1 ist auch Biquadratwurzel aus 1“.

Und hier ist wieder die Unterordnung der Begriffe erkennbar, so daß wir auch hier nur einen einzigen Gedanken haben. Die grammatischen Teilsätze sind auch hier nur uneigentliche Sätze, ohne Gedankeninhalt. Der Buchstabe »a« in »$a^2 = 1$« weist ja hin auf »a« in »$a^4 = 1$« wie etwa im Lateinischen ein „*quot*“ in einem Vordersatze auf ein „*tot*“ im zugehörigen Nachsatze. Wie nun die Trennung dieser Sätze jeden von beiden sinnlos macht, so geht auch hier durch Zerreißung des Satzgefüges das verloren, was der Buchstabe »a« zum Gedankenausdrucke beiträgt. Er soll dem ganzen Satze Allgemeinheit des Inhalts verleihen, nicht den uneigentlichen Teilsätzen; und so kommt es, daß das ganze Satzgefüge einen wahren Gedanken ausdrückt, obwohl ein Buchstabe darin vorkommt, der nichts bezeichnet, während die uneigentlichen Teilsätze keinen Sinn haben, weil sie den Buchstaben »a« enthalten, der weder einen Sinn hat, noch auch einem dieser Teile Allgemeinheit des Inhalts verleihen soll. Sollte er dies, so drückte »$a^2 = 1$« allerdings einen Gedanken aus, wenn auch einen falschen, nämlich daß jeder Gegenstand eine Quadratwurzel aus 1 sei; aber mit diesem Sinne kommt »$a^2 = 1$« nicht als Teil im Satzgefüge vor. Wir sehen hieraus, daß ein Satz einen wahren Gedanken ausdrücken kann, obwohl er Wörter (»etwas«, »es«) oder Buchstaben enthält, die nichts bedeuten,

sondern nur andeuten, wenn diese Wörter oder Buchstaben den Zweck haben, dem Satze Allgemeinheit des Inhalts zu verleihen, daß aber ein grammatischer Teilsatz, der solche Wörter oder Buchstaben enthält, keinen Gedanken ausdrückt, wenn die durch diese zu verleihende Allgemeinheit sich nicht auf den Teilsatz beschränken soll. Dann besagt der grammatische Teilsatz nichts, ist nur ein uneigentlicher Satz; man kann weder sagen, daß er gelte, noch daß er ungültig sei, falls man nämlich einen Satz ungültig nennt, wenn er einen falschen Gedanken ausdrückt.

In »$a^2 = 1$« ist freilich etwas Bedeutungsvolles enthalten, und dessen Bedeutung ist der Begriff *Quadratwurzel aus* 1; aber das, was diesen Begriff bezeichnet, ist nicht das ganze »$a^2 = 1$«, sondern nur das, was übrig bleibt, wenn man »a« absondert. Ähnliches gilt von »$a^4 = 1$«.

Im allgemeinen können wir sagen: der uneigentliche Bedingungs- oder Folgesatz drückt keinen Gedanken oder Sinn aus, obwohl er Teil eines Satzgefüges ist, das einen Gedanken ausdrückt, und obwohl er selbst Teile haben kann, die einen Sinn haben.

Der Gebrauch des Buchstabens »a« in diesen Fällen ist übrigens grundsätzlich derselbe wie im Satze

$$»a^2 - 1 = (a - 1) \cdot (a + 1)«;$$

er soll auch hier dem Satze Allgemeinheit des Inhalts verleihen, und daß wir in jenen Fällen zwei grammatische Sätze haben, hier nur einen, ist nur ein unwesentlicher Formunterschied.

Die Einsicht in die logische Natur einer mathematischen Theorie wird oft dadurch erschwert, daß in scheinbar selbständige grammatische Sätze zerrissen wird, was sich eigentlich als einheitliches Satzgefüge darstellen sollte. Dies geschieht vielfach aus stilistischen Gründen, um ein Satzungetüm zu vermeiden; aber man darf sich dadurch die Einsicht in das Wesen der Sache nicht verbauen lassen. Man fängt z. B. so an: „Es sei a . . .“, dem man freilich oft das unrichtige „Es bedeute a“ vorzieht. Solche Sätze können mit verschiedenen Buchstaben teils der Ableitung vorhergehen, teils in sie eingeschoben sein. So gelangt man endlich zu einem Ergebnisse, ausgesprochen in einem Satze, der die Buchstaben enthält, die vorher scheinbar erklärt worden sind; denn Sätze wie „Es bedeute a . . .“ sehen aus wie Erklärungen, die den Buchstaben Bedeutungen verleihen sollen. Aber dieser Schein verschwindet bei näherer Prüfung. Nehmen wir ein Beispiel! Das Satzgefüge „Wenn a eine ganze Zahl ist, so ist $a \cdot (a - 1)$ eine gerade Zahl“ kann in zwei scheinbar selbständige Sätze zerlegt

werden: „Es sei a eine ganze Zahl. $a \cdot (a - 1)$ ist eine gerade Zahl". Aber man kann den ersten nicht als eine Erklärung des Buchstaben »a« auffassen, sodaß dies »a« mit der so erhaltenen Bedeutung im zweiten Satze vorkäme; denn dies »a« tritt in beiden Sätzen an der Stelle eines Eigennamens auf. Wenn ihm also eine Bedeutung gegeben werden sollte, so könnte das nur die eines Eigennamens, also ein Gegenstand sein. Aber durch den Satz „a sei eine ganze Zahl" kann dies nicht geschehen; denn dieser ist kein Identitäts-, sondern ein Subsumtionssatz. Man kann auch nicht sagen, daß hierdurch dem »a« zwar keine bestimmte, aber eine unbestimmte Bedeutung gegeben werde; denn eine unbestimmte Bedeutung ist keine Bedeutung; vieldeutige Zeichen darf es nicht geben. Auch folgende Überlegung zeigt, daß man einen uneigentlichen Bedingungssatz nicht als Erklärung eines darin vorkommenden Buchstaben ansehen darf. Unser Satz läßt sich nämlich in die Form bringen: „Wenn $a \cdot (a - 1)$ keine gerade Zahl ist, so ist a keine ganze Zahl". Und wenn man hiermit wie vorhin verfährt, käme man dahin, den Satz „Es sei $a \cdot (a - 1)$ keine gerade Zahl" als eine Erklärung des Buchstaben »a« anzusehen; und diese widerspräche jener ersten. Man lasse sich also dadurch nicht täuschen, daß zuweilen aus stilistischen Gründen ein uneigentlicher Bedingungssatz in einer Form auftritt, in der er, flüchtig betrachtet, als Erklärung eines oder mehrerer Buchstaben erscheint. Aber weder diese scheinbaren Erklärungen, noch der Satz, in dem das Endergebnis ausgesprochen wird, sind eigentliche Sätze, sondern sie gehören als uneigentliche Bedingungssätze und uneigentlicher Folgesatz untrennbar zusammen, sodaß erst das aus ihnen bestehende Ganze ein eigentlicher Satz ist. Die Einsicht in den logischen Bau gewänne sehr, wenn das, was sachlich ein einziger eigentlicher Satz ist, sich auch sprachlich als einheitliches Satzgefüge darstellte und nicht in selbständige Sätze zerfiele. Freilich nähme ein solches Satzgefüge in unsern Wortsprachen manchmal eine ungeheuerliche Länge an, während die Begriffsschrift durch ihre Übersichtlichkeit zur Wiedergabe des logischen Gewebes besser befähigt ist.

Der Gebrauch der Buchstaben ist in allen diesen Fällen eigentlich derselbe, wie verschieden er auch scheinen mag. Sie sollen immer dem Ganzen Allgemeinheit des Inhalts verleihen, wenn auch dieses Ganze aus scheinbar selbständigen Sätzen besteht. Statt der Buchstaben können natürlich auch Wörter wie „etwas" „es" stehen.

Ein System von allgemeinen Lehrsätzen, die in ihren uneigentlichen Bedingungssätzen übereinstimmen, kann man eine Theorie nennen. Da man die uneigentlichen Folgesätze durch „und" zu einem einzigen verbinden kann, ist wenigstens theoretisch die Möglichkeit gegeben, die

Theorie in einen einzigen Lehrsatz zu verwandeln, der aus uneigentlichen Bedingungssätzen und einem — im allgemeinen zusammengesetzten — uneigentlichen Folgesatze besteht, und dem durch Buchstaben oder entsprechende Wörter Allgemeinheit des Inhalts verliehen ist. Die uneigentlichen Bedingungssätze nennt man wohl auch Voraussetzungen.

Nun kann man durch einen Schluß vom Allgemeinen zum Besonderen übergehen. So gelangt man von dem Satze »$a^2 - 1 = (a-1)\cdot(a+1)$« z. B. zu dem Satze »$5^2 - 1 = (5-1)\cdot(5+1)$« und von dem Satze

„Wenn $a^2 = 1$, so ist $a^4 = 1$"

zu dem Satze

„Wenn $1^2 = 1$, so ist $1^4 = 1$"

oder auch zu dem Satze

„Wenn $2^2 = 1$, so ist $2^4 = 1$".

Wie man sieht ist der äußere Vorgang hierbei der, daß der nur andeutende Buchstabe durch ein bedeutungsvolles Zeichen ersetzt wird. Und so ist es auch sonst: beim Schluß vom Allgemeinen zum Besonderen werden die andeutenden Buchstaben oder Wörter durch bedeutungsvolle Zeichen ersetzt. Die allgemein bejahenden oder verneinenden Sätze müssen vorher in die hypothetische Form umgewandelt werden. Wir sehen nun an unserm zweiten Beispiele, daß die uneigentlichen Sätze »$a^2 = 1$« und »$a^4 = 1$« dabei die eigentlichen Sätze »$1^2 = 1$« und »$1^4 = 1$« oder auch die eigentlichen Sätze »$2^2 = 1$« und »$2^4 = 1$« ergeben. Daß letztere nicht gelten, ist eine Sache für sich. In der hypothetischen Verbindung, in der sie vorkommen, wird keiner von beiden behauptet, auch wenn das ganze Satzgefüge mit behauptender Kraft ausgesprochen wird. Wir sehen so, daß den uneigentlichen Sätzen, die Teile eines allgemeinen Lehrsatzes — einer Theorie — sind, eigentliche Sätze entsprechen, die in einem Satze vorkommen, der aus jenem durch einen Schluß vom Allgemeinen zum Besonderen gewonnen ist. Wenn nun einer dieser eigentlichen Sätze, der als Bedingungssatz erscheint, schon als geltend erkannt ist, so kann man ihn weglassen. So kann man in dem Satze »Wenn $1^2 = 1$, so ist $1^4 = 1$« den Bedingungssatz, nachdem man ihn als geltend erkannt hat, weglassen, so daß man nur den Folgesatz »$1^4 = 1$« übrig behält. In Worten wird man den Übergang etwa so machen: Da nun $1^2 = 1$ ist, so ist $1^4 = 1$. Durch solche Schlüsse kann man von einem allgemeinen Lehrsatze — einer Theorie — aus zu einem besonderen Satze gelangen, der weniger Bedingungssätze enthält. Dies Verfahren nennt man wohl

die Anwendung eines allgemeinen Lehrsatzes — einer Theorie — auf einen besondern Fall.

Ist nun etwa das, was Herr Korselt formale Theorie oder reinen Lehrbegriff nennt, ein allgemeiner Lehrsatz oder eine Theorie in dem Sinne, wie ich eben diese Wörter gebraucht habe? Es scheint, daß Herrn Korselt das wenigstens vorgeschwebt habe. Ich möchte annehmen, daß vieles in seinen Ausführungen klarer erscheint, wenn man beim Lesen das eben Bemerkte im Sinne behält. Er schreibt:

„Doch die moderne, immer mehr in die exakte Logik übergehende Mathematik bezeichnet mit ihren Axiomen (Grundaussagen) nicht mehr bestimmte Erfahrungstatsachen — sondern *deutet* sie höchstens *an*, wie in der Algebra ein Buchstabe eine Zahl nicht bestimmt, sondern andeutet."

Das Wort „andeuten" scheint Herr Korselt in dieser Verwendungsweise von mir entlehnt zu haben. Der Vergleich der Axiome mit den Buchstaben ist nicht glücklich. Denn in der reinen Arithmetik ist es gleichgültig, ob ich die Buchstaben »*a*« »*b*« »*c*« oder die Buchstaben »*r*« »*s*« »*t*« gebrauche, und jeder dieser Buchstaben gilt als einfach. Dagegen soll offenbar jedes der Hilbertschen Axiome seine Besonderheit haben, die auf seiner besondern Zusammensetzung aus einfachen auch in andern Verbindungen vorkommenden Zeichen beruht. Dagegen scheint der Vergleich eines Hilbertschen Axioms mit einem uneigentlichen Satze, wie »$a^2 = 1$« nicht unpassend zu sein. Was Herr Korselt wahrscheinlich meint, würde ich so ausdrücken:

Die neuere Mathematik — oder sagen wir einfach: Herr Hilbert — versteht unter einem Axiome nicht einen eigentlichen Satz, der einen Gedanken ausdrückt, sondern einen uneigentlichen, aus dem beim Schließen vom Allgemeinen zum Besondern verschiedene eigentliche Sätze hervorgehen können, die dann also Gedanken ausdrücken.

Mein „Gedankenausdrücken" entspricht hierbei dem Korseltschen „bestimmte Erfahrungstatsachen bezeichnen". Die Hilbertschen Axiome sind dann Teile eines allgemeinen Lehrsatzes, der sinnvoll ist, obwohl jene Teile es nicht sind. Und nur als Teile eines sinnvollen Ganzen sind jene Axiome berechtigt. Sie erscheinen als Bedingungssätze, wofür man auch sagen kann: Voraussetzungen, und hiermit stimmt sehr gut die Äußerung des Herrn Korselt:

„Durch das Axiom »Auf jeder Geraden gibt es wenigstens zwei Punkte« ist auch nicht »der ontologische Gottesbeweis glänzend gerechtfertigt«. Denn dieser will ja eine Existenz *beweisen*, das Axiom *setzt* sie für alle oder doch einige folgende Sätze *voraus*. Überhaupt sind die »Existenzsätze« der exakten Logik und Mathematik nichts als die

Voraussetzungen für gewisse hypothetische Sätze, in deren »Behauptungen« gewisse in diesen Existenzsätzen erwähnte Begriffe nicht mehr vorkommen."

Ohne jedes Wort zu unterschreiben, kann ich doch hierin eine Bestätigung des eben Vermuteten finden. Das Axiom setzt die Existenz für alle oder einige folgende Sätze voraus. Nun gut! es gehört also untrennbar mit diesen zusammen. Weder hat das Axiom, noch haben die folgenden Sätze für sich einen Sinn; sondern das Axiom ist uneigentlicher Bedingungssatz und jene folgenden Sätze sind uneigentliche Folgesätze, und diese uneigentlichen Sätze bilden einen oder mehrere eigentliche Sätze, deren Teile sie sind. Auch Herr Korselt spricht ja von hypothetischen Sätzen — das sind eben diese eigentlichen Sätze — und von deren Voraussetzungen und Behauptungen — das sind die uneigentlichen Bedingungs- und Folgesätze.

Eine Widerlegung meiner früheren Ausführungen kann hierin freilich nicht gefunden werden. Wenn Herr Korselt im Gebrauche der Wörter „Definition" und „Axiom" von mir abweicht und darauf eine Widerlegung zu gründen versucht, so widerlegt er etwas, was ich nicht gesagt habe. Man kann jeden Satz scheinbar widerlegen, wenn man sich erlaubt, die Wörter so zu verstehen, daß der Satz seine Geltung verliert.

Mein Gedankengang war folgender: Wenn es erlaubt ist, bei der Definition eines Begriffes erster Stufe die Existenz als Merkmal anzugeben, so kann dies auch bei der Definition des Begriffes *Gott*, der erster Stufe ist, geschehen, woraus dann die Existenz unmittelbar folgen würde. Nun ist das erwähnte Axiom nach Herrn Hilberts Auffassung ein Teil der Definition des Punktes, und es wird darin die Existenz als Merkmal angegeben. Hiermit wird also *das* Recht in Anspruch genommen, das in einem andern Falle den ontologischen Beweis ermöglichen würde. Ich wollte Herrn Hilbert hierdurch zum Nachdenken über das veranlassen, was er Definition nennt. Und ich vermutete, daß er seinen Gebrauch dieses Wortes als ganz verschieden von dem sonst üblichen erkennen und vielleicht in den Weg einbiegen würde, den Herr Korselt, wenn auch nicht mit klarem Bewußtsein, zu betreten scheint. Diese Klärung und Entwicklung, zu der ich den Anstoß geben wollte, ist nun freilich bei Herrn Hilbert wohl gar nicht und bei Herrn Korselt nur unvollständig erfolgt. Eine Definition im althergebrachten Sinne setzt nichts voraus, sondern setzt etwas fest. Was ich gesagt habe, bleibt bestehen, wenn man das Wort „Definition" so versteht, wie es von alters her in der Mathematik verstanden worden ist, und wenn das Axiom, wie Herr Hilbert will, ein Teil einer

Definition ist.[1]) Nun ist ja möglicherweise bei einem andern Sinne des Wortes „Definition" Herrn Hilberts Verfahren trotzdem gerechtfertigt; aber welcher Sinn ist dabei anzunehmen? Versuchen wir mit Hilfe der Korseltschen Aussprüche darüber ins Klare zu kommen! Zunächst ist jedenfalls das, was Herr Hilbert Definition des Punktes nennt, nicht eine Definition im alten Sinne des Wortes. Ferner besteht die Definition aus Axiomen, und diese setzen etwas voraus, sind also wohl Bedingungssätze und zwar uneigentliche Sätze. Diese enge Verbindung, in die hier die Wörter „Axiom" und „Definition" geraten sind, ist ihrer ursprünglichen Gebrauchsweise ganz fremd. In diesem Sinne ist dann eine Definition nichts anderes als ein Ganzes, bestehend aus mehreren durch „und" verbundenen Axiomen, die selbst wieder uneigentliche Sätze (Bedingungssätze) sind. Dann ist kein wesentlicher Unterschied zwischen Definition und Axiom mehr vorhanden. Die Definition ist dann ebenfalls ein uneigentlicher Bedingungssatz, der aus mehreren durch „und" verbundenen uneigentlichen Sätzen besteht. Ob mehrere von den Bedingungssätzen zu einem Ganzen erst vereinigt, und dieses dann als Bedingungssatz genommen wird, oder ob man die Bedingungssätze vereinzelt läßt, ist unwesentlich. Man sieht, daß die sogenannten Definitionen dann eigentlich überflüssig sind.

Doch forschen wir, ob sich unsere Vermutung über das Wesen des reinen Lehrbegriffes noch weiter bestätigt! Herr Korselt schreibt:

„Die »arithmetisierte«, besser gesagt: »rationalisierte« Mathematik richtet ihre Grundsätze nur so ein, daß gewisse bekannte Deutungen nicht ausgeschlossen sind."

Die Grundsätze werden hier wieder uneigentliche Bedingungssätze des allgemeinen Lehrsatzes sein. Das Wort „Deutung" ist zu beanstanden; denn ein Gedanke, richtig ausgedrückt, läßt für verschiedene Deutungen keinen Raum. Wir haben gesehen, daß die Vieldeutigkeit durchaus zu verwerfen ist, und wie der Schein ihrer Notwendigkeit bei mangelhafter logischer Einsicht entstehen kann. Ich erinnere nur an das, was ich über den Buchstabengebrauch oben S. 377 gesagt habe. Was Herr Korselt mit „Deutung" meint, ist auf Grund unserer Auffassung des Korseltschen reinen Lehrbegriffes leicht zu erraten. Wenn wir durch einen Schluß von dem allgemeinen Lehrsatze „Wenn $a > 1$, so ist $a^2 > 1$" zu dem besondern „Wenn $2 > 1$, so ist $2^2 > 1$" übergehen, so entspricht der uneigentliche Satz „$a > 1$" dem eigentlichen »$2 > 1$«. Nach Herrn Korselts Redeweise wird »$2 > 1$« oder der

1) Freilich im alten Sinne des Wortes setzt ein Grundsatz weder etwas voraus, noch etwas fest, sondern behauptet etwas. Ich nenne Grundsatz einen Satz, der ein Axiom ausdrückt.

Gedanke dieses Satzes eine Deutung von »$a > 1$« sein. Als ob der allgemeine Satz eine wächserne Nase wäre, die man bald so, bald anders drehen könnte. In Wahrheit liegt keine Deutung, sondern ein Schluß vor.[1])

In einem uneigentlichen Satze müssen Zeichen vorkommen, die nichts bezeichnen, sondern andeuten. Welche sind das in unserm Falle? Offenbar die Wörter „Punkt", „Gerade", „Ebene", „liegt in", „liegt auf", „liegt zwischen" usw. Diese Wörter bezeichnen also nichts in der Hilbertschen Geometrie, wenn diese nach Herrn Korselt ein reiner Lehrbegriff ist, und wenn wir den Sinn dieses Ausdruckes richtig erfaßt haben. Und wirklich sagt ja auch Herr Korselt, daß die Zeichen einer formalen Theorie überhaupt keine Bedeutung haben. Die Wörter „Punkt", „Ebene", usw. sollen also dazu dienen, dem Lehrsatze Allgemeinheit des Inhalts zu verleihen wie die Buchstaben in der Algebra. Und hiermit stimmt wieder sehr gut, was wir oben festgestellt haben, daß nämlich die Hilbertschen sogenannten Definitionen jenen Wörtern keine Bedeutungen geben. Wir sehen auch bestätigt, daß diese sogenannten Definitionen keine Definitionen sind, ebensowenig wie in dem Satze „Wenn $a > 1$ ist, so ist $a^2 > 1$" der uneigentliche Satz „$a > 1$" eine Definition ist. Buchstaben, die einem Satze Allgemeinheit des Inhalts verleihen sollen, werden nicht erklärt; denn sie sollen nichts bezeichnen, sondern nur andeuten. Da den Buchstaben keine Bedeutungen gegeben werden sollen, so haben Definitionen, die das als Zweck hätten, hier keine Statt. Was zuweilen so aussieht wie eine Erklärung von Buchstaben, ist in Wirklichkeit ein Bedingungssatz. So auch hier. Die Wörter „Punkt", „Ebene" usw. werden hier wie Buchstaben ge-

---

1) Bei dieser Gelegenheit mag folgender Ausspruch des Herrn Korselt beleuchtet werden:

„Sätze desselben Wortlauts sollen wenn möglich nur einmal bewiesen werden mögen sie auch in verschiedenen Gebieten auftreten."

Als ob es verschiedene Sätze desselben Wortlauts geben dürfe! Das widerspricht dem Gebote der Eindeutigkeit, dem obersten, das von der Logik an eine Sprache oder Schrift gestellt werden muß. Wenn Sätze desselben Wortlauts sich unterscheiden, so können sie es nur im Gedankeninhalte. Wie soll es nun einen einzigen Beweis verschiedener Gedanken geben? Das sieht so aus, als ob der bloße Wortlaut ohne Gedankeninhalt zu beweisen wäre, und daß diesem Wortlaute nachträglich in verschiedenen Gebieten verschiedene Gedanken zugeteilt werden sollten. Unsinn! Ein bloßer Wortlaut ohne Gedankeninhalt kann überhaupt nicht bewiesen werden. Herrn Korselt schwebt natürlich der Fall vor, daß ein allgemeiner Satz bewiesen werden soll, aus dem dann durch Schlüsse vom Allgemeinen zum Besonderen (oder zum minder Allgemeinen) Sätze gewonnen werden, die verschiedenen Gebieten angehören. Wir sind darauf gefaßt, auch hier wieder Herrn Korselt von Deutungen reden zu hören.

braucht. Was wie eine Erklärung solcher Wörter aussieht, ist ein uneigentlicher Bedingungssatz. Als Definition aufgefaßt genügt er auch nicht den bescheidensten Anforderungen an eine solche. Da das Wort „Bedingungssatz“ vollkommen genügt, so ist nicht einzusehen, warum dafür die irreführenden Wörter „Definition“ und „Axiom“ gebraucht werden sollen, die von alters her eine andere Gebrauchsweise haben. Was Herr Hilbert Definition nennt, wird in den meisten Fällen ein uneigentlicher Bedingungssatz, ein unselbständiger Teil eines allgemeinen Lehrsatzes sein.

Bei dieser Auffassung ist es nicht nur unzweckmäßig und unbillig, von einer formalen Theorie zu fordern, daß sie ihren nach Art von Eigennamen und Begriffswörtern gebildeten Figuren eine bestimmte Bedeutung gebe; sondern es ist unsinnig, überhaupt eine Bedeutung von ihnen zu verlangen; denn sie sollen nicht bezeichnende, sondern nur andeutende Zeichen sein.

Ich fordere die Auflösbarkeit eines Systems von Grundsätzen nach den in ihnen vorkommenden Unbekannten, und zwar die eindeutige Auflösung, wenn dies System von sogenannten Grundsätzen eine Definition sein soll, die den unbekannten Zeichen Bedeutungen zuerteilt; denn dieser Zweck kann nur erreicht werden, wenn jene Forderung erfüllt ist. Aber ich verlange durchaus nicht, daß man alles definieren solle; ich verlange insbesondere nicht, daß man, um etwas zu definieren, Systeme von sogenannten Grundsätzen aufstellen solle; und ich verlange am allerwenigsten, daß man Zeichen, die wie Buchstaben nur andeutend, nicht bedeutend gebraucht werden sollen, überhaupt erkläre; denn das hieße Unsinn verlangen.

Wenn man nun durch einen Schluß von dem allgemeinen Lehrsatze zu einem besonderen übergeht, so entspricht jedem uneigentlichen Teilsatze des ersteren ein eigentlicher des letzteren. Diese eigentlichen Sätze können nun Grundsätze — Ausdrücke von Axiomen — im alten und eigentlichen Sinne des Wortes sein. Da nun die Axiome der Euklidischen Geometrie wahr sind, können wir sie weglassen, wo sie als Bedingungen vorkommen. Wir haben dann eine Anwendung des allgemeinen Lehrsatzes gemacht und sind so zu einem Satz der Euklidischen Geometrie gekommen. Aber auch andere Anwendungen sind möglich; Herr Korselt nennt sie fälschlicherweise Deutungen.

Wir begreifen jetzt, wie die eigentümliche Verwirrung im Gebrauche des Wortes „Axiom“ bei Herrn Hilbert entstanden ist. Diese Bezeichnung ist von den eigentlichen Sätzen auf die ihnen entsprechenden uneigentlichen übertragen worden. Durch diesen Mißbrauch und den

des Wortes „Definition" ist die Einsicht in die logische Natur der Hilbertschen Geometrie ungemein erschwert worden.

Fahren wir in der Betrachtung der Korseltschen Äußerungen fort! Wir lesen da: „So läßt sich manchmal *eine* Reihe formaler Schlüsse auf *verschiedene* Weise deuten".

Deuten läßt sich vielleicht ein Zeichen oder eine Gruppe von Zeichen, wiewohl die Eindeutigkeit der Zeichen, an der wir unbedingt festhalten müssen, verschiedene Deutungen ausschließt. Aber ein Schluß besteht nicht aus Zeichen. Man kann nur sagen, daß sich zuweilen in dem Übergange von Zeichengruppen zu einer neuen Zeichengruppe äußerlich ein Schluß darstellt. Ein Schluß gehört gar nicht dem Gebiete der Zeichen an, sondern ist eine Urteilsfällung, die auf Grund schon früher gefällter Urteile nach logischen Gesetzen vollzogen wird. Jede der Prämissen ist ein bestimmter als wahr anerkannter Gedanke, und im Schlußurteil wird gleichfalls ein bestimmter Gedanke als wahr anerkannt. Für verschiedene Deutungen ist hier nirgends eine Statt.

Was ist ein formaler Schluß? Man kann sagen: in gewisser Hinsicht ist jeder Schluß formal, insofern er nach einem allgemeinen Schlußgesetze verläuft; in anderer Hinsicht ist jeder Schluß nicht formal, insofern sowohl die Prämissen, als auch der Schlußsatz ihre Gedankeninhalte haben, die in dieser besonderen Verknüpfungsweise eben nur in diesem Schlusse vorkommen. Aber vielleicht soll das Wort „formal" hier anders verstanden werden. Vielleicht soll eine Reihe formaler Schlüsse gar keine eigentliche Schlußkette sein, sondern nur das Schema einer solchen. Die Deutung bestände dann darin, daß eine Schlußkette angegeben würde, die nach diesem Schema verliefe. Was kann nun ein solches Schema nützen? Vielleicht dies, daß man in einem gegebenen Falle nicht die ganze Schlußkette zu durchlaufen braucht, sondern unmittelbar von den ersten Prämissen zum letzten Schlußsatze übergehen kann. Dann aber haben wir kein bloßes Schema mehr, sondern einen allgemeinen Lehrsatz.

Nehmen wir beispielsweise das Schema:

„a ist ein b; jedes b ist ein c; folglich ist a ein c; folglich gibt es ein c"!

Selbstverständlich haben wir hierin keine Schlüsse; denn wir haben keine eigentlichen Sätze, keine Gedanken. Aber eine Schlußkette kann nach diesem Schema verlaufen und besteht dann aus zwei Schlüssen, entsprechend dem zweimaligen „folglich". Das Schema an sich besagt nichts; aber es veranlaßt Sätze zu bilden, die etwas besagen, zunächst folgende:

„Wenn a ein b ist und wenn jedes b ein c ist, so ist a ein c“;

„Wenn a ein c ist, so gibt es ein c“.

Durch einen Schluß gewinnt man aus ihnen den allgemeinen Lehrsatz:

„Wenn a ein b ist und wenn jedes b ein c ist, so gibt es ein c“.

Statt nun in einem gegebenen Falle nach dem Schema der Schlußkette zu verfahren, kann man den allgemeinen Lehrsatz anwenden, indem man aus ihm durch einen Schluß vom Allgemeinen zum Besondern einen Satz ableitet, den man von den nunmehr erfüllten Bedingungen befreien kann. Das ist ja im allgemeinen der Nutzen eines Lehrsatzes, daß er das Ergebnis einer Reihe von Schlüssen zum beliebigen Gebrauche bereit aufbewahrt. Wir sind auf diesem Wege wieder zu etwas geführt worden, was Herr Korselt wohl eine formale Theorie oder einen reinen Lehrbegriff nennt.

Doch verlassen wir diese abstrakten Betrachtungen, um zu sehen, wie sich die Sache in der Hilbertschen Theorie selbst macht. Wenn, wie wir angenommen haben, die Wörter „Punkt“, „Gerade“ usw. nichts bezeichnen, sondern nur Allgemeinheit verleihen sollen wie die Buchstaben in der Arithmetik, so wird es zur Einsicht in den wahren Sachverhalt sehr nützlich sein, wirklich Buchstaben für diesen Zweck zu gebrauchen. Wir wollen demnach folgendes festsetzen. Statt „der Punkt A liegt in der Ebene α“ wollen wir sagen: „A steht in der p-Beziehung zu α“. Statt „der Punkt A liegt auf der Gerade a“ wollen wir sagen: „A steht in der q-Beziehung zu a“. Statt „A ist ein Punkt“ wollen wir sagen: „A ist ein Π“.

Das Hilbertsche Axiom I 1 spricht sich nun so aus;

„Wenn A ein Π ist und wenn B ein Π ist, so gibt es etwas, zu dem sowohl A, als auch B in der q-Beziehung steht.“

Hier sind zwei Allgemeinheiten zu unterscheiden. Die durch die Buchstaben »A« und »B« bewirkte beschränkt sich auf dies Pseudoaxiom[1]), während die durch »Π« und »q« bewirkte sich auf einen allgemeinen Lehrsatz (reinen Lehrbegriff, formale Theorie) erstreckt, von dem dies Pseudoaxiom nur ein unselbständiger und für sich allein sinnloser Teil ist.

1) Dieser Ausdruck mag Anstoß erregen. Die Allgemeinheit kann man sagen gehört doch dem Gedankeninhalte des Satzes an, wie kann hier bei einem uneigentlichen Satze davon die Rede sein, der gar keinen Gedanken ausdrückt? Es ist so zu verstehen, daß die durch »A« und »B« bewirkte Allgemeinheit dem Inhalte jedes eigentlichen Satzes zukommen soll, der aus diesem Pseudoaxiome dadurch hervorgeht, daß man die nur andeutenden Buchstaben »Π« und »q» durch bezeichnende Zeichen ersetzt.

Das Hilbertsche Axiom I 6 (I 5)[1]) ist nun so auszusprechen:

„Wenn A von B verschieden ist, wenn A und B zu α in der p-Beziehung stehen und wenn A, B und C zu a in der q-Beziehung stehen, so steht C zu α in der p-Beziehung."

Die durch die Buchstaben »A«, »B«, »C«, »a« und »α« bewirkte Allgemeinheit beschränkt sich auf dies Pseudoaxiom.

Das Hilbertsche Axiom I 7 (I 6)[1]) sieht nun so aus:

„Wenn A sowohl zu α, als auch zu β in der p-Beziehung steht, so gibt es etwas von A Verschiedenes, was sowohl zu α, als auch zu β in der p-Beziehung steht."

Die durch die Buchstaben »A«, »α« und »β« bewirkte Allgemeinheit beschränkt sich auf dies Pseudoaxiom.

Wir bedürfen nun noch eines Pseudoaxioms Σ, das bei Herrn Hilbert nicht vorkommt und das wir so aussprechen:

Σ. „Wenn A zu α in der p-Beziehung steht, so ist A ein Π".

Hier beschränkt sich die durch die Buchstaben »A« und »α« bewirkte Allgemeinheit auf dies Pseudoaxiom. Die Buchstaben »Π«, »p« und »q« bedeuten weder etwas, noch sollen sie den einzelnen Pseudoaxiomen Allgemeinheit des Inhalts verleihen; daher drücken diese keine Gedanken aus, sondern sind für sich allein sinnlos. Darum füge ich das „Pseudo" hinzu. Denn in den eigentlichen Grundsätzen muß man Gedanken haben. Die Buchstaben »Π«, »p« und »q« sollen zwar auch eine Allgemeinheit bewirken; aber diese soll sich auf einen Lehrsatz erstrecken, von dem die Pseudoaxiome uneigentliche Bedingungssätze sind.

Ein Vorteil, scheint mir, springt bei dieser Weise, die Hilbertschen Pseudoaxiome wiederzugeben, sofort in die Augen, nämlich daß niemand sich einbilden wird, er verstehe ein solches Pseudoaxiom, er finde in ihm einen Gedanken ausgedrückt, während doch in Wahrheit nichts Wesentliches geändert ist dadurch, daß man statt der Ausdrücke „Punkt", „liegen in", „liegen auf" Buchstaben gebraucht, sofern wenigstens diese Ausdrücke nichts bedeuten, sondern wie die Buchstaben einem reinen Lehrbegriffe, um mit Herrn Korselt zu reden, Allgemeinheit verleihen sollen.[2]) Wenn nun diese Pseudoaxiome in der Hilbertschen Fassung den Eindruck des Sinnvollen machen, so liegt das offenbar daran, daß wir von der Euklidischen Geometrie her

1) Das Eingeklammerte bezieht sich auf die erste Auflage.

2) Aber auch dann, wenn die Hilbertschen Axiome den Wörtern „Punkt" usw. Bedeutungen verleihen sollten, wäre nichts Wesentliches geändert; denn dieselben Bedeutungen würden nun den Buchstaben »Π« usw. verliehen. Erhalten diese Buchstaben dadurch keine Bedeutungen, so auch nicht jene Wörter.

gewohnt sind, mit jenen Wörtern „Punkt", „liegen in" usw. einen Sinn zu verbinden, und daß wir dies nicht, wie wir müßten, vergessen, wenn wir uns mit den Hilbertschen Grundlagen beschäftigen. In der Tat müssen wir uns hierbei auf den Standpunkt von Leuten stellen, die nie etwas von Punkten, Ebenen usw. gehört haben; und das gelingt uns schlecht. Viel besser gelingt es uns mit Zeichen, mit denen wir in der Tat noch keinen Sinn verbunden haben. Sachlich aber ist es einerlei.

Daraus, daß die Pseudoaxiome nicht Gedanken ausdrücken, folgt ferner, daß sie nicht Prämissen einer Schlußkette sein können. Eigentlich wird man ja überhaupt nicht Sätze — Gruppen von hörbaren oder sichtbaren Zeichen — Prämissen nennen können, sondern nur die in ihnen ausgedrückten Gedanken. In den Pseudoaxiomen haben wir nun gar keine Gedanken, also auch keine Prämissen. Wenn also Herr Hilbert scheinbar doch seine Axiome als Prämissen von Schlüssen benutzt, wenn er scheinbar Beweise auf sie gründet, so können das eben nur Scheinschlüsse, Scheinbeweise sein.

Nun mag man etwa folgende Auffassung versuchen. Die Schlüsse können rein formal ausgeführt werden so, als ob die Buchstaben »Π«, »p«, »q« bedeutungsvoll wären; denn was sie etwa bedeuten, ist ja für die Richtigkeit des Schlusses einerlei. Setzt man nun für diese Buchstaben bedeutungsvolle Zeichen der Art ein, daß aus den Pseudoaxiomen dadurch wahre Sätze hervorgehen, so wird auch aus dem sogenannten Schlußsatze ein wahrer Satz hervorgehen.

Führen wir das einmal beispielsweise durch! Zunächst gewinnen wir aus unsern Pseudoaxiomen I 1 und Σ den uneigentlichen Satz:

„Wenn sowohl A, als auch B zu α in der p-Beziehung steht, so gibt es etwas, zu dem sowohl A, als auch B in der q-Beziehung steht". **A**

Ferner gewinnen wir aus I 6, indem wir es mit sich selbst verbinden, den uneigentlichen Satz:

„Wenn A von B verschieden ist und sowohl A, als auch B sowohl zu α, als auch zu β in der p-Beziehung steht, und wenn A, B und C zu a in der q-Beziehung stehen, so steht C sowohl zu α, als zu β in der p-Beziehung". **B**

Hieraus leiten wir weiter den uneigentlichen Satz ab:

„Wenn A von B verschieden ist und sowohl A, als auch B sowohl zu α, als auch zu β in der p-Beziehung steht, und wenn es etwas gibt, zu dem sowohl A, als auch B in der q-Beziehung steht, so gibt es einen Gegenstand der Art, daß was zu ihm in der q-Beziehung steht, sowohl zu α, als auch zu β in der p-Beziehung steht". **Γ**

Hieraus und aus dem eben gefundenen A erhalten wir den uneigentlichen Satz:

„Wenn A von B verschieden ist und sowohl A, als auch B sowohl zu α, als auch zu β in der p-Beziehung steht, so gibt es einen Gegenstand der Art, daß was zu ihm in der q-Beziehung steht, sowohl zu α, als auch zu β in der p-Beziehung steht“ Δ

Hieraus leiten wir weiter den uneigentlichen Satz ab:

„Wenn A sowohl zu α, als auch zu β in der p-Beziehung steht, und wenn es etwas von A Verschiedenes gibt, das sowohl zu α, als auch zu β in der p-Beziehung steht, so gibt es einen Gegenstand der Art, daß was zu ihm in der q-Beziehung steht, sowohl zu α, als auch zu β in der p-Beziehung steht“. E

Verbinden wir nun hiermit unser Pseudoaxiom I 7, so erhalten wir:

„Wenn A sowohl zu α, als auch zu β in der p-Beziehung steht, so gibt es einen Gegenstand der Art, daß was zu ihm in der q-Beziehung steht, sowohl zu α, als auch zu β in der p-Beziehung steht“. Z

Und weiter gewinnen wir hieraus den uneigentlichen Satz:

„Wenn es etwas gibt, was sowohl zu α, als auch zu β in der p-Beziehung steht, so gibt es einen Gegenstand der Art, daß was zu ihm in der q-Beziehung steht, sowohl zu α, als auch zu β in der p-Beziehung steht“. H

Bei Herrn Hilbert finden wir dafür den Wortlaut:

„Zwei Ebenen haben keinen Punkt oder eine Gerade gemein“.

Ohne uns darüber aufzuregen, daß unser eigner Wortlaut bedeutend länger als der Hilbertsche ist, fragen wir: ist das, was wir soeben hergestellt haben, wirklich eine Schlußkette? Offenbar nicht; denn die Glieder sind nur uneigentliche Sätze, ebenso wie der Schlußsatz. Keiner von allen enthält einen Gedanken. Aber ebensowenig hätten die Sätze einen Sinn, die man erhielte, wenn man statt unserer Buchstaben die Hilbertschen Wörter „Punkt“, „liegen in“ usw. gebrauchen wollte, vorausgesetzt, daß diese Wörter ebensowenig einen Sinn haben sollen wie unsere Buchstaben. Was sollen aber alle diese Scheinschlüsse, was soll diese ganze Bewegung durch uneigentliche Sätze, wenn der zuletzt gewonnene Satz ebenso wie die vorhergehenden sinnlos ist? Nun, erinnern wir uns, daß uneigentliche Sätze zwar einzeln keine Gedanken ausdrücken, daß sie aber Teile eines sinnvollen Ganzen sein können. Wir dürfen unsre Pseudoaxiome nicht als selbständige Sätze behandeln, die wahre Gedanken enthalten und so als Grundsteine unsres logischen Aufbaues dienen können, sondern wir müssen sie als uneigentliche Be-

dingungssätze mitführen. Statt unsres uneigentlichen Satzes *A* haben wir nun zu schreiben:

Falls allgemein hinsichtlich *A* und *α* gilt

wenn *A* zu *α* in der *p*-Beziehung steht, so ist *A* ein *Π*,

und falls allgemein hinsichtlich *A* und *B* gilt

wenn *A* ein *Π* ist und wenn *B* ein *Π* ist, so gibt es etwas, zu dem sowohl *A*, als auch *B* in der *q*-Beziehung steht,

so gilt allgemein hinsichtlich *A*, *B* und *α*

wenn sowohl *A*, als auch *B* zu *α* in der *p*-Beziehung steht, so gibt es etwas, zu dem sowohl *A*, als auch *B* in der *q*-Beziehung steht.

Hierin hahen wir einen Satz, der einen Gedanken ausdrückt; aber wir haben auch nur einen einzigen Gedanken darin; die Teile, die sich grammatisch als Sätze darstellen, sind nur uneigentliche Sätze. Die Buchstaben »*Π*«, »*p*«, »*q*« verleihen dem ganzen Satze Allgemeinheit des Inhalts, während die durch die Buchstaben »*A*«, »*B*«, »*α*« bewirkte Allgemeinheit sich immer auf einen der drei uneigentlichen Teilsätze bezieht, die eingerückt sind.[1]) Hieraus wird sich klar erkennen lassen, wie die uneigentlichen Teilsätze, obwohl vereinzelt sinnlos, doch einen Satz bilden können, der einen Gedanken ausdrückt.

Ebenso wird man die übrigen uneigentlichen Sätze, die in unsrer Scheinschlußkette vorkommen, durch unsre Pseudoaxiome als Bedingungssätze ergänzen müssen, um eigentliche Sätze zu erhalten. Aus unsrer Scheinschlußkette erhalten wir eine wirkliche. Dann erst haben wir eigentliche Prämissen und eigentliche Schlußsätze. So wird dann schließlich auch unser uneigentlicher Endsatz *H* durch unsre vier Pseudoaxiome ergänzt werden müssen, die dabei als uneigentliche Bedingungssätze auftreten werden. Und so werden wir denn auch einen Endsatz erhalten, der wirklich einen Gedanken enthält. Freilich wird dieser Endsatz recht umfangreich; aber erst durch diese Ergänzung gewinnt man die volle Einsicht in den logischen Zusammenhang. Wir wollen uns deshalb die Mühe nicht verdrießen lassen, diesen Satz aufzustellen. Manche Unklarheiten in der Mathematik scheinen ja durch unnötige Sparsamkeit mit Druckerschwärze und durch eine falsche Eleganz verschuldet zu werden. Der Grundsatz, mit möglichst geringen Mitteln möglichst viel zu erreichen, ist ja, richtig verstanden, gewiß zu billigen; nur sind die Mittel nicht nach dem Verbrauch von Druckerschwärze abzuschätzen. Statt unseres früheren uneigentlichen Satzes *H* erhalten wir nun folgenden Schlußsatz:

---

1) Vgl. Anm. auf Seite 388.

Falls allgemein hinsichtlich A und α gilt

wenn A zu α in der p-Beziehung steht, so ist A ein Π,

und falls allgemein hinsichtlich A und B gilt

wenn A ein Π ist und wenn B ein Π ist, so gibt es etwas, zu dem sowohl A, als auch B in der q-Beziehung steht,

falls auch allgemein hinsichtlich A, B, C, a und α gilt

wenn A von B verschieden ist, wenn A und B zu α in der p-Beziehung stehen und wenn A, B und C zu a in der q-Beziehung stehen, so steht C zu α in der p-Beziehung,

falls auch allgemein hinsichtlich A, α und β gilt

wenn A sowohl zu α, als auch zu β in der p-Beziehung steht, so gibt es etwas von A Verschiedenes, was sowohl zu α, als auch zu β in der p-Beziehung steht,

so gilt allgemein hinsichtlich α und β

wenn es etwas gibt, was sowohl zu α, als auch zu β in der p-Beziehung steht, so gibt es einen Gegenstand der Art, daß was zu ihm in der q-Beziehung steht, sowohl zu α, als auch zu β in der p-Beziehung steht.

Die eingerückten uneigentlichen Sätze sind teils unsere Pseudoaxiome, teils unser früherer uneigentlicher Schlußsatz, die, wie wir sehen, nur unselbständige Teile des eigentlichen Schlußsatzes sind, der allein einen Gedanken ausdrückt. Die durch die Buchstaben »A«, »B«, »C«, »a«, »α« und »β« bewirkte Allgemeinheit beschränkt sich jedes Mal auf den eingerückten uneigentlichen Teilsatz, in dem sie vorkommen, während die durch »Π«, »p«, »q» bewirkte Allgemeinheit sich auf den ganzen Satz erstreckt. Wir sehen nun, was eigentlich bewiesen worden ist. Dies ist aus dem Schlußsatze des Herrn Hilbert

„Zwei Ebenen haben keinen Punkt oder eine Gerade gemein"

nicht zu erkennen; denn hier ist so gut wie alles unbekannt, wenn wir die Wörter nicht im Euklidischen Sinne verstehen sollen.

Fahren wir fort, die Ausführungen des Herrn Korselt darauf hin zu prüfen, wie sie mit unserer Auffassung seiner formalen Theorie übereinstimmen. Wir lesen nun auf S. 403:

„Man muß nun solche formale Theorien (»reine Lehrbegriffe«) unterscheiden, die sich auf anderweitige Erlebnisse beziehen lassen und solche, von denen bisher eine derartige Zuordnung nicht bekannt ist."

Was Herr Korselt hier „beziehen auf anderweitige Erlebnisse" und „Zuordnung" nennt, ist offenbar dasselbe, was er vorher „deuten", „Deutung" genannt hat, und es ist nichts anderes, als ein Schließen

vom Allgemeinen aufs Besondere. Wenn es also möglich ist, durch einen solchen Schluß von dem allgemeinen Lehrsatze zu einem besonderen der Art zu gelangen, daß in ihm die Bedingungssätze, die den uneigentlichen Bedingungssätzen des allgemeinen Satzes entsprechen, eigentliche, und zwar geltende Sätze sind, so wird Herr Korselt sagen, daß die formale Theorie (unser allgemeiner Lehrsatz) sich auf anderweitige Erlebnisse beziehen lasse, daß er sich anderweitigen Erlebnissen zuordnen lasse, und dies ist wohl auch die Gegenständlichkeit, von der er im Folgenden spricht:

„Die »Gegenständlichkeit« und umsomehr die Widerspruchslosigkeit eines reinen Lehrbegriffes wird immer und notwendig durch Darbietung von Gegenständen nachgewiesen, auf welche die Grundaussagen passen."

Man wird dies nun ungefähr verstehen können. Es sei z. B. der allgemeine Lehrsatz (die formale Theorie, der Lehrbegriff) folgender:

„Wenn a eine Quadratwurzel aus 1 ist, so ist a eine Biquadratwurzel aus 1."

Durch einen Schluß vom Allgemeinen zum Besonderen leiten wir aus ihm folgenden ab:

„Wenn 1 eine Quadratwurzel aus 1 ist, so ist 1 eine Biquadratwurzel aus 1."

Und hier ist nun nach Herrn Korselts Redeweise ein Gegenstand, nämlich 1 dargeboten, auf den die Grundaussage paßt, da ja 1 eine Quadratwurzel aus 1 ist. Und damit ist, um mit Herrn Korselt zu reden, die Gegenständlichkeit und umsomehr die Widerspruchslosigkeit unseres reinen Lehrbegriffes nachgewiesen. In dem vorhin betrachteten Beispiele aus der Hilbertschen Geometrie ist die Sache freilich nicht ganz so einfach, indem nicht nur ein einziger uneigentlicher Bedingungssatz, sondern mehrere vorkommen, indem auch nicht nur ein einziger Buchstabe, sondern drei (»Π«, »p«, »q«) erscheinen. Ferner haben wir den Unterschied, daß diese Buchstaben nicht Gegenstände andeuten, oder wie man auch sagen kann, Eigennamen vertreten, sondern teils Begriffe, teils Beziehungen. Gegenstände können hier also nicht dargeboten werden, sondern ein Begriff und Beziehungen, weil auf Gegenstände die sogenannten Grundaussagen nicht passen können. Es ist aber ein Schluß vom Allgemeinen zum Besonderen in der Weise möglich, daß an die Stelle von »Π«, »Punkt«, an die Stelle von »steht in der p Beziehung zu«, »liegt in der Ebene«, an die Stelle von »steht in der q-Beziehung zu«, »liegt auf der Gerade« tritt, wobei diese Ausdrücke im Euklidischen Sinne zu verstehen sind. Aus unsern Pseudoaxiomen erhalten wir dann eigentliche Grundsätze, die Axiome aus-

drücken; und dies ist die Darbietung eines Begriffs und von Beziehungen, durch die, um mit Herrn Korselt zu reden, die Gegenständlichkeit[1]) unseres reinen Lehrbegriffes (allgemeinen Lehrsatzes) nachgewiesen wird. Hierbei ist aber zu betonen, daß unser Lehrsatz bewiesen und und also wahr ist ganz unabhängig von dem Nachweise dieser sogenannten Gegenständlichkeit. Es ist also ganz richtig, was Herr Korselt sagt, man dürfe von einem reinen Lehrbegriffe nicht von vornherein Gegenständlichkeit verlangen. Auch folgender Ausspruch trifft ungefähr das Richtige, wenn auch dabei, wie es scheint, eine Verwechslung untergelaufen ist, auf die später zurückzukommen sein wird:

„Mag man ihn (den reinen Lehrbegriff) denn auch »leeres Zeichenspiel, nichts bedeutend« und dergleichen nennen, als streng gesetzlicher Zusammenhang von Sätzen hat er keine besondere »Würde« mehr nötig."

In der Tat: mehr Würde, als ihm dadurch zukommt, daß er einen wahren Gedanken ausdrückt, hat ein allgemeiner Lehrsatz nicht nötig. Das Einzige, woran ich hierin Anstoß nehme, ist der Ausdruck „von Sätzen". Unter einem eigentlichen Satze verstehe ich den Ausdruck eines Gedanken, also etwas Sinnliches, eine Folge von Worten, die gehört, oder eine Gruppe von Zeichen, die gesehen werden können. Auch von den uneigentlichen Sätzen gilt dies Letzte. Ein Zusammenhang von eigentlichen oder uneigentlichen Sätzen wird einer Grammatik angehören. Herr Korselt unterscheidet nicht streng zwischen dem Äußern, dem Sinnlichen und dem Gedankeninhalte. Hier wird er einen Zusammenhang der Gedanken meinen; aber auch darum kann es sich hier nicht handeln, weil wir hier uneigentliche Sätze haben, von denen keiner einen Sinn hat. Das hier Gemeinte bedarf also noch eines genaueren Ausdrucks, wobei freilich eine Neuprägung erforderlich wäre.

Sonst aber bin ich einverstanden, insbesondere auch damit, daß die Gegenständlichkeit in dem vorhin angegebenen Sinne nicht nötig ist, um dem Satze einen Gedankeninhalt zu sichern. Anders läge die Sache freilich, wenn die Wörter „Punkt", „liegen in" usw. nicht andeutend gebraucht werden sollen wie Buchstaben, um einem Satze Allgemeinheit des Inhalts zu verleihen, sondern als bedeutungsvolle Begriffs- und Beziehungswörter. Dann muß natürlich ein Begriff da sein, der mit dem Worte „Punkt" und eine Beziehung, die mit dem Ausdruck „liegt in" bezeichnet wird.

Aber ein Mißverständnis scheint mir hier vorzuliegen. Der Vorwurf, ein leeres Zeichenspiel zu sein, kann man mit Recht gewissen formalen Theorien machen, die aber ganz verschieden sind von all-

1) Allerdings paßt dies Wort in diesem Falle nicht ganz.

gemeinen Lehrsätzen der hier betrachteten Art. Denn in einem solchen haben wir immer einen Sinn. Jene andern formalen Theorien jedoch verfahren nach der Methode des Dr. Eisenbart. Da der Sinn zuweilen Schwierigkeiten macht, treibt man ihn kurz entschlossen ganz aus und behält dann natürlich die entseelten Zeichen zurück. Der Urheber einer solchen Theorie will mit seinen Zeichen keine Gedanken ausdrücken, sondern nur nach gewissen Regeln spielen. Also kann es sich dabei garnicht um Wahrheit handeln. Das Wort „Theorie" ist dabei eigentlich unpassend; man sollte „Spiel" sagen. So wäre es wenigstens bei folgerechter Durchführung; aber daran fehlt es immer; man will den Pelz waschen, ohne ihn naß zu machen. Man entleert die Zeichen, um unbequemen Fragen zu entgehen; aber die Zeichen dann auch wirklich als leer anzuerkennen, sträubt man sich. So verstrickt man sich in eine Wildnis von Widersprüchen. Was wir bisher formale Theorie genannt haben, ist etwas ganz anderes. Zwar benutzen wir auch Zeichen, die keine Bedeutung haben; aber diese tragen zum Gedankenausdrucke in bekannter Weise bei. Mit lauter Buchstaben ohne bedeutungsvolle Zeichen einen Gedanken auszudrücken, ist unmöglich. In jenen zu verwerfenden sogenannten formalen Theorien sind Zeichen wie »$\frac{1}{2}$«, »$\sqrt[3]{5}$« weder wie sonst bedeutungsvolle Eigennamen, noch dienen sie wie die Buchstaben dazu, einem Satze Allgemeinheit des Inhalts zu verleihen; sie sind nicht Mittel der Erkenntnis und der Mitteilung, sondern Gegenstände, mit denen nach gewissen Regeln gespielt wird. Herr Korselt vermischt diese ganz verschiedenen Fälle, weil er keinen von beiden in seiner Eigentümlichkeit scharf erfaßt hat. Er findet in einer Stellung von Schachfiguren einen Gedanken ausgedrückt. Vielleicht hat er ein geistiges Organ für die Erfassung von Gedanken, das mir abgeht. Tut sich da eine ganz neue Gedankenwelt vor uns auf? Sehr interessant! doch kann ich einige Zweifel nicht unterdrücken. Wenn Herr Korselt meint, daß eine Stellung von Schachfiguren einen Gedanken ausdrückt nur wegen der Regeln des Schachspiels, so zweifle ich daran und werde solange daran zweifeln, bis man mir diesen Gedanken in deutscher Sprache ausgedrückt vorlegt und zeigt, wie vermöge der Regeln des Schachspiels dieser Gedanke durch jene Stellung ausgedrückt wird. Regeln aufstellen für die Handhabung von Spielfiguren und die Bedeutung eines Zeichens festsetzen sind doch auf den ersten Blick ganz verschiedene Sachen. Wenn nun jemand meint, daß unter Umständen mit jenem dieses verbunden sein könne, so hat er das zu begründen. Bis jetzt ist aber, soviel ich weiß, nicht einmal ein Versuch dazu gemacht worden.

Wenn ein Axiom ein bis dahin unbekanntes Zeichen enthält, so ist es nach Herrn Korselt eine Regel über den Gebrauch dieses Zeichens. Wenn man sich über die Bedeutung eines Zeichens nicht einigen könne, müsse sich der eine oder andere mehr Sätze über das Zeichen oder mit dem Zeichen aneignen. Hieraus schließt Herr Korselt: »„Das Zeichen hat keine Bedeutung« wird also heißen: »Uns sind keine Sätze bekannt, die den Gebrauch dieses Zeichens überhaupt oder in einem gegebenen Gebiete regeln«". Wie dieser Schluß zustande kommt, weiß ich nicht, da im Vorhergehenden nirgends von der Regelung des Gebrauchs eines Zeichens die Rede gewesen ist. Doch soviel ist zu erkennen, daß eine solche Regelung auf eine freilich rätselhafte Weise dem Zeichen eine Bedeutung geben soll. Nehmen wir ein Beispiel! Das Axiom „Jedes Anej bazet wenigstens zwei Ellah" regelt den Gebrauch der Wörter „Anej" „bazen" und „Ellah". Sollten wir uns trotzdem über die Bedeutung des Wortes „Anej" nicht einigen können, so wäre das ein Zeichen dafür, daß einer von uns sich noch mehr Sätze über das Wort „Anej" oder mit diesem Worte zu eigen machen müßte. Ich wäre in diesem Falle gerne bereit, noch mehr Sätze mit dem Worte „Anej" zur Verfügung zu stellen, wenn es sein muß, auch Sätze über dieses Wort.

Die Regel „Jedes Anej bazet wenigstens zwei Ellah" verdient von allen modernen Mathematikern aufs gewissenhafteste befolgt zu werden. Doch hier vernehme ich eine Stimme aus der Unterwelt: „Wie kann das eine Regel sein! In einer Regel muß doch etwas geboten, verboten oder erlaubt werden. Ich erwarte da Imperative oder Verba wie »müssen« »sollen« »dürfen« »verboten sein« usw. Nichts der Art finde ich in dieser sogenannten Regel. Es scheint doch von einem Begriffe die Rede zu sein, der mit dem Worte »Anej« bezeichnet werde. Wenn aber in diesem eigentümlichen satzartigen Gebilde eine Regel über den Gebrauch des Wortes »Anej« gefunden werden soll, so ist eben von diesem Worte selbst die Rede. Grundsätze und Lehrsätze sind Sätze mit dem Zeichen, Regeln sind Sätze über das Zeichen".

Woher wissen Sie denn, Verehrtester, möchte ich darauf antworten, daß das Wort „Regel" hier in dem Ihnen geläufigen Sinne gebraucht wird? Und wenn auch, so ist es doch ganz verständlich, daß in einem Wurstgemenge, wie wir es hier vor uns haben, die Eigenart eines einzelnen Bestandteils nicht mehr deutlich erkennbar ist.

Manchmal macht sich Herr Korselt unnötige Mühe, z. B. mit dem Anwendungsgebiet der Axiome. Wenn ein Axiom eine Regel ist über den Gebrauch der in ihm vorkommenden unbekannten Zeichen, so

bilden diese natürlich das Anwendungsgebiet der Regel, also des Axioms, und so ist diese Frage auf das einfachste beantwortet.

Ungültige Axiome, die Herr Korselt annimmt, kann es nicht geben, wenn man „Axiom" im Euklidischen Sinne gebraucht. Aber hier ist ein ungültiges Axiom, das unbekannte Zeichen enthält, eine ungültige Regel über den Gebrauch dieser Zeichen. Es wäre ungehörig, zu fragen, zu welchem Zwecke eine solche Regel dienen könnte.

Hiermit will ich diese sogenannten Regeln und was damit zusammenhängt abgetan sein lassen. Streicht man dies aus den Korseltschen Ausführungen, so befreit man sie von Unklarheiten.

Was nun die Widerspruchslosigkeit und desgleichen die Unabhängigkeit betrifft, so sollen sie nach Herrn Hilberts Meinung von den Axiomen bewiesen werden. Hier entsteht nun die Frage: sind seine Pseudoaxiome oder die Axiome im alten Euklidischen Sinne gemeint?

Herr Korselt schreibt: „Es ist gleichgültig, ob man die Axiome oder die Merkmale der eingeführten Begriffe widerspruchslos nennt. Ersteres entspricht mehr dem Sprachgebrauche, nach dem zwei Sätze voneinander »unabhängig« heißen, wenn sie unter gewissen Umständen beide, unter andern Umständen nicht beide bestehen, während sie »unverträglich« sind, wenn sie unter keiner Bedingung beide erfüllt sind".

Was heißt das, „der Satz besteht"? Doch wohl: Der Satz drückt einen wahren Gedanken aus. Nun drückt ein eigentlicher Satz einen Gedanken aus. Dieser ist entweder wahr, oder falsch: *tertium non datur.*[1]) Daß also ein eigentlicher Satz unter gewissen Umständen bestände, unter andern nicht, könnte nur vorkommen, wenn ein Satz unter gewissen Umständen einen Gedanken ausdrücken könnte, unter andern Umständen einen andern. Dies widerspräche aber der Forderung der Eindeutigkeit der Zeichen, an der wir unter allen Umständen festhalten müssen, wie oben ausführlich begründet worden ist. Ein uneigentlicher Satz drückt überhaupt keinen Gedanken aus; folglich kann man von ihm auch nicht sagen, er bestehe. Daß also ein Satz unter Umständen bestehe, unter andern Umständen nicht bestehe, darf also überhaupt nicht vorkommen, weder wenn er ein eigentlicher, noch wenn er ein uneigentlicher ist.[2]) Und doch kann man sich denken,

1) Wir befinden uns hier nämlich in der Wissenschaft. In Sage und Dichtung freilich können Gedanken vorkommen, die weder wahr noch falsch sind, sondern eben Dichtung.

2) Auch wenn Herr Korselt sagt: „Andrerseits darf aber eine formale Theorie auf ein gegebenes Gebiet nur angewandt werden, wenn man sich der Geltung der Grundsätze für das Gebiet versichert hat", scheint er zu meinen, daß ein und derselbe Satz auf einem Gebiete gelten, auf einem andern nicht

was Herr **Korselt** meint. Es kann sich nur um uneigentliche Sätze handeln; und da wird Herr **Korselt** wieder mit seinen Deutungen kommen. Er deutet einen Satz so; dann besteht er; er deutet ihn anders; dann besteht er nicht. Er dreht die wächserne Nase rechts; er dreht sie links, ganz nach Belieben. Nehmen wir z. B. den Satz: „Auf einer Geraden gibt es wenigstens zwei Punkte"! Nun deuten wir das Wort „Punkt" als Fuß, das Wort „Gerade" als Wurm, und die Worte „es gibt auf" deuten wir als hat. So deuten wir unsern Satz so: Ein Wurm hat wenigstens zwei Füße. Fast ebenso leicht, wie wir hier etwas Falsches erhalten haben, können wir durch andere Deutungen etwas Wahres aus dem Satze gewinnen. Nun sehen wir, wie Recht Herr **Korselt** hat, wenn er meint, ein Satz könne unter Umständen bestehen, unter Umständen nicht; es kommt eben ganz auf die Deutung an. Doch kehren wir zum Ernste zurück! Ein Satz, der nur unter Umständen gilt, ist kein eigentlicher Satz. Wir können aber die Umstände, unter denen er gilt, in Bedingungssätzen aussprechen und als solche dem Satze anfügen. Der so ergänzte Satz gilt nun nicht mehr nur unter Umständen, sondern schlechthin. Der ursprüngliche Satz erscheint in diesem als Folgesatz, und zwar als uneigentlicher. Nun, wie wir auch die Sache betrachten mögen, das Ergebnis ist dasselbe. Wenn wir meinen, ein Satz könne unter gewissen Umständen gelten, unter andern nicht, so lassen wir uns durch selbstgetroffene Ungenauigkeiten des Ausdrucks an der Nase herumführen.

Herr **Korselt** sagt an der angeführten Stelle: „Es ist gleichgültig, ob man die Axiome oder die Merkmale der eingeführten Begriffe widerspruchslos nennt."

Nun ja, gleichgültig für den, der auf Genauigkeit des Ausdrucks nichts gibt, dem nichts daran gelegen ist, eine tiefere Einsicht in den Sachverhalt zu gewinnen. Axiome sind doch nicht Merkmale von Begriffen. Von vornherein ist also die Widerspruchsfreiheit der Axiome zu unterscheiden von der Widerspruchsfreiheit der eingeführten Begriffe. Wer nun behauptet, daß kein Unterschied bestehe, hat das zu beweisen. Die bloße Behauptung des Herrn **Korselt** genügt nicht, um diese Einerleiheit zu einem gesicherten Besitze der Wissenschaft zu machen. Zunächst sind »4^2« und »2^4« zu unterscheiden, und erst, nachdem das Zusammenfallen der Bedeutungen bewiesen ist, dürfen sie mit einander vertauscht werden.

---

gelten könne. Genauer ist das, was Herr **Korselt** meint, so auszudrücken: „Wenn man durch einen Schluß vom Allgemeinen zum Besondern aus dem allgemeinen Satze einen besondern gewonnen hat, darf man in diesem die Bedingungsätze nur dann weglassen, wenn sie gelten".

Herr Korselt fährt fort: „Ersteres entspricht mehr dem Sprachgebrauche, nach welchem zwei Sätze von einander »unabhängig« heißen, wenn sie unter gewissen Umständen beide, unter anderen Umständen nicht beide bestehen".

Wirklich? Ist so der Sprachgebrauch? In dem Satzgefüge: „Wenn $a > 1$ ist, so ist $a > 0$", haben wir zwei uneigentliche Sätze »$a > 1$« und »$a > 0$«. Heißen diese nach dem Sprachgebrauche voneinander unabhängig? Und doch haben wir nach der Korseltschen, freilich zu verwerfenden Redeweise Umstände, unter denen sie beide bestehen ($2 > 1$ und $2 > 0$, $3 > 1$ und $3 > 0$), und andere Umstände, unter denen sie nicht beide bestehen ($1 > 1$ und $1 > 0$, $0 > 1$ und $0 > 0$). Das kann man vielleicht zugeben, daß nach dem Sprachgebrauche »$a > 1$« unabhängig heißt von »$a > 0$«. Aber für den, der sich nicht durch Worte täuschen, sondern der Sache auf den Grund gehen will, kann der Sprachgebrauch nichts entscheiden. Es fragt sich immer wieder: ist der Sprachgebrauch der Sache angemessen?

Aus verschiedenen Gründen also wird man der Korseltschen Erklärung der Unabhängigkeit von Sätzen nicht zustimmen können. Aber soviel ist zu erkennen, daß es sich dabei nur um uneigentliche Sätze handeln soll. Nach Herrn Korselts Meinung wird also die Frage nach der Unabhängigkeit nicht die Axiome im Euklidischen Sinne sondern die Pseudoaxiome des Herrn Hilbert betreffen. Und darin hat er wahrscheinlich recht, da die eigentlichen Axiome in Herrn Hilberts Darstellung wohl überhaupt keine Stelle haben.

Wovon ist denn nun in Wahrheit die Rede, wenn man z. B. die Sätze »$a > 0$« und »$a < 1$« voneinander unabhängig nennt? Sind es die Gruppen von Zeichen, einerlei ob diese Zeichen einen Sinn haben oder nicht? Doch wohl nicht! Andererseits: einen Sinn hat weder die Zeichengruppe »$a > 0$« noch »$a < 1$«. Und doch ist »$a > 0$« nicht von jedem Sinne ganz entfernt, indem es einem größeren Ganzen angehören kann, das einen Gedanken ausdrückt, und indem es selbst einen bedeutungsvollen Teil enthält. Der größte noch bedeutungsvolle Teil von »$a > 0$« ist der prädikative und seine Bedeutung ist der Begriff der positiven Zahl. Ebenso ist die Bedeutung des größten noch bedeutungsvollen Teils von »$a < 1$« der Begriff der Zahl, die kleiner als 1 ist. Es ist nun zu vermuten, daß von diesen Begriffen in Wahrheit etwas ausgesagt wird, wenn man scheinbar von den Sätzen behauptet, daß sie voneinander unabhängig seien. Und in der Tat: man meint eigentlich, daß weder jener Begriff diesem, noch dieser jenem untergeordnet sei. Man kann es auch so ausdrücken: „Einige positive Zahlen sind nicht kleiner als 1 und einige Zahlen, die kleiner als 1 sind, sind

nicht positiv". Hieraus ist deutlich zu erkennen, daß es sich um Beziehungen zwischen Begriffen handelt.

Ein Satz, in dem nach Herrn Korselts freilich ungenauer Redeweise ein Satz als abhängig von andern hingestellt wird, besteht aus einem uneigentlichen Folgesatze und einem oder mehreren uneigentlichen Bedingungssätzen. Sie sind uneigentliche Sätze, weil in ihnen Bestandteile vorkommen, die nichts bezeichnen, sondern nur andeuten, um dem ganzen Satze Allgemeinheit des Inhalts zu verleihen. Dieser Satz wird, sofern er gilt, nach Herrn Korselt reiner Lehrbegriff oder formale Theorie zu nennen sein. Wenn der Satz aber nicht gilt, also Unabhängigkeit statt Abhängigkeit besteht, ist der Gedanke des ganzen Satzes zu verneinen. Ein Satz demnach, in dem eine Unabhängigkeit dieser Art behauptet wird, verneint die Geltung eines solchen allgemeinen Satzes. Durch einen solchen werden nun nicht die uneigentlichen Bedingungssätze und der uneigentliche Folgesatz in Beziehung gesetzt, auch nicht die in diesem etwa ausgedrückten Gedanken; denn solche sind nicht vorhanden; sondern in Beziehung gesetzt werden die Bedeutungen von Teilen dieser uneigentlichen Sätze, und diese Teile drücken keine Gedanken aus. Dies von dem allgemeinen Satze Gesagte gilt auch von seiner Verneinung, also von einem Satze, in dem nach Herrn Korselts Redeweise die Unabhängigkeit eines Satzes von andern behauptet werden soll. Auch ein solcher setzt also nicht Sätze in Beziehung, noch Gedanken, sondern Bedeutungen von Theilen der uneigentlichen Sätze. Diese uneigentlichen Sätze sind nun in einem Unabhängigkeitsbeweise des Herrn Hilbert dessen Pseudoaxiome. Es folgt hieraus, daß die von Herrn Hilbert bewiesene Unabhängigkeit nicht diese Pseudoaxiome betrifft.

Wenn man in der Mathematik die Worte gebraucht „einen Satz beweisen", so meint man offenbar mit dem Worte „Satz" nicht eine Folge von Worten oder eine Gruppe von Zeichen, sondern einen Gedanken, etwas, von dem man sagen kann, es sei wahr. Und so wird man auch, wenn von der Unabhängigkeit von Sätzen, von Axiomen die Rede ist, dies als Unabhängigkeit von Gedanken verstehen. Darum ist es durchaus nicht unnötig festzustellen, daß diese Auffassung falsch ist, und eine Ausdrucksweise zu verwerfen, die zu diesem Mißverständnisse Anlaß gibt.

Wir müssen unterscheiden zwischen dem Äußern, Hörbaren oder Sichtbaren, das einen Gedanken ausdrücken soll, und diesem selbst. Vorzuziehen scheint mir die in der Logik wohl vorherrschende Redeweise, nach der nur das erstere ein Satz heißt. Danach wird man einen Satz überhaupt nicht wohl unabhängig von den anderen Sätzen

nennen können; denn von dem Hörbaren oder Sichtbaren wird man doch die Unabhängigkeit nicht aussagen wollen. Da die uneigentlichen Sätze, mithin auch die Pseudoaxiome keinen Gedankeninhalt haben, so wird man von diesen überhaupt nur in dem zuletzt empfohlenen Sinne etwas aussagen können; aber eben die Unabhängigkeit wird man nicht aussagen können.

Fassen wir das Ergebnis zusammen, so werden wir sagen: Bei den Hilbertschen Unabhängigkeitsbeweisen handelt es sich weder um die Unabhängigkeit von Sätzen in dem eben empfohlenen Sinne des Wortes, noch um die Unabhängigkeit von Gedanken; sondern es handelt sich um die Unabhängigkeit der Bedeutungen von Teilen uneigentlicher Sätze. Diese Teile sind die größten noch bedeutungsvollen; aber sie sind keine Sätze, drücken also keine Gedanken aus. Für die Bedeutungen solcher Teile fehlt uns eine kurze alle Fälle umfassende Benennung. In einfacheren Fällen haben wir Begriffe (positive Zahl, Zahl kleiner als 1). Gegen Ende meines ersten Aufsatzes[1]) habe ich sie, mich einer brieflichen Äußerung des Herrn Hilbert anbequemend, Merkmale genannt, obwohl das mit meiner eigenen Gebrauchsweise nicht ganz übereinstimmt.

Festzustellen ist, daß die Hilbertschen Unabhängigkeitsbeweise die eigentlichen Axiome, die Axiome im Euklidischen Sinne gar nicht betreffen; denn diese sind doch wohl Gedanken. Nun findet sich bei Herrn Hilbert nirgends eine Unterscheidung, die unserer von eigentlichen und uneigentlichen Sätzen, von eigentlichen und Pseudoaxiomen, entspräche; sondern Herr Hilbert scheint seine vermeintlich von seinen Pseudoaxiomen bewiesene Unabhängigkeit ohne weiteres auf die eigentlichen Axiome zu übertragen, weil er den Unterschied überhaupt nicht bemerkt. Das wäre immerhin ein beträchtlicher Fehlschluß. Und alle Mathematiker, die meinen, Herr Hilbert habe die Unabhängigkeit der eigentlichen Axiome voneinander bewiesen, sind wohl in denselben Irrtum verfallen. Sie sehen nicht, daß Herr Hilbert, indem er diese Unabhängigkeit beweist, das Wort „Axiom" gar nicht im Euklidischen Sinne gebraucht. Schuld hieran ist der doppelte Gebrauch der Wörter „Punkt", „Gerade" usw., die einerseits wie Buchstaben dem ganzen Lehrgebäude Allgemeinheit verleihen sollen und in diesem Falle nichts bezeichnen, und die andrerseits in den Euklidischen Axiomen ihre hergebrachten Bedeutungen haben. In jenem Falle sind seine Axiome eben nur Pseudoaxiome ohne Sinn, indem nur das Ganze (die formale Theorie, der reine Lehrbegriff des Herrn Korselt), dessen unselb-

1) Jahresbericht 12. Bd., S. 323 u. 324.

ständige Teile sie sind, einen Sinn hat. Dann kommt das Euklidische Parallelenaxiom überhaupt nicht vor, und von ihm ist also auch nichts bewiesen worden. Im andern Falle kommen eigentliche Axiome vor; aber die Unabhängigkeitsbeweise passen dann nicht, weil es nicht möglich ist, andere Begriffswörter für „Punkt", „Gerade" usw. einzusetzen, und auf dieser Möglichkeit beruht denn doch ein solcher Beweis.

Diese Kehrseite der Sache scheint auch Herr Korselt zu übersehen, wenn er die Verschiedenheit der Axiome in der modernen Mathematik von denen der Euklidischen betont. Diese Verschiedenheit darf im Endergebnisse nicht verleugnet werden, nachdem man anfangs ihre Vorteile ausgenutzt hat.

Das die Hilbertsche Darstellung beherrschende Zwielicht muß erst einer einheitlichen Beleuchtung gewichen sein, ehe Klarheit in die Sache kommen kann. Dann wird ja auch wohl die Vermischung von Axiom und Definition ein Ende nehmen.

(Schluß folgt.)

Bemerkung über Funktionen des elliptischen Zylinders.

Von M. Lerch in Freiburg (Schweiz).

Die Integration der Differentialgleichung

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + (2m \cos 2x + n)\psi = 0$$

wurde von Heine auf Berechnung der Näherungselemente gewisser Kettenbrüche zurückgeführt, und es ist seinen Überlegungen auch ein Verfahren zur Bestimmung des Parameters n, der die Existenz einer periodischen Lösung $\psi_1(x)$ sichert, zu entnehmen. Ich habe diese Methode namentlich für den Fall, daß n gewisse Grenzen überschreitet, ausgebildet; durch Anwendung dieses Verfahrens, verbunden mit anderen Überlegungen, gelangte ich zur Aufstellung einer Anzahl von Koeffizienten der trigonometrischen Entwicklung von $\psi_1(x)$ für den Fall $m = -1$ und n nahe bei 100; der genaue Wert ist $n = 100{,}005\,050\,676\,018$ und die Entwicklung hat die Gestalt

$$\begin{aligned}\psi_1(x) = \cos 10x - c_1 \cos 12x + c_2 \cos 14x - c_3 \cos 16x + \cdots \\ - c_{-1} \cos 8x + c_{-2} \cos 6x - c_{-3} \cos 4x + c_{-4} \cos 2x \\ - \frac{1}{2} c_{-5},\end{aligned}$$

wobei

$$
\begin{aligned}
c_1 &= 0{,}022\,735\,26 \\
c_2 &= 0{,}000\,236\,853\,9 \\
c_3 &= 0{,}000\,001\,518\,388 \\
c_4 &= \frac{6{,}9367}{10^9}, \quad c_5 = \frac{2{,}3123}{10^{11}}, \dots \\
c_{-1} &= -\,0{,}027\,785\,94 \\
c_{-2} &= 0{,}000\,434\,20 \\
c_{-3} &= -\,0{,}000\,005\,169\,4 \\
c_{-4} &= 0{,}000\,000\,053\,85 \\
c_{-5} &= -\,0{,}000\,000\,000\,538.
\end{aligned}
$$

Solange es sich um die Berechnung von $\psi_1(x)$ für reelle x und für kleine komplexe Werte von x handelt, ist diese trigonometrische Entwicklung sehr bequem; anders wird es, wenn es sich darum handelt, $\psi_1(x)$ für größere komplexe Werte zu bestimmen, oder sogar die *rein imaginären* Wurzeln von $\psi_1(x) = 0$ zu berechnen, eine Aufgabe, die z. B. für die Untersuchung einer elliptischen Membran unumgänglich ist.

Dieser Umstand kann nicht überraschen, denn fast jede analytische Entwicklung, selbst wenn sie in der ganzen Ebene konvergiert, kann nur in einem verhältnismäßig beschränkten Gebiet wirklich verwendet werden; z. B. wird es kaum jemand einfallen, die Exponentialfunktion e^x durch die Maclaurinsche Entwicklung zu berechnen, sobald x ungefähr gleich 10 ist.

Hier könnte also eine halbkonvergente Entwicklung von $\psi_1(x)$ von großem Nutzen sein; ob solche durch die divergenten Reihen, welche vor mehreren Jahren von Herrn Häntzschel aufgestellt und unlängst im Jahresbericht wieder in Erinnerung gebracht wurden, tatsächlich geleistet ist, mag vorläufig dahingestellt bleiben. Das Beweisverfahren des Herrn Häntzschel läßt mich darüber vollkommen im Dunkeln, und die kritischen Bemerkungen, welche Herr Häntzschel aus seinen Formeln gegen die richtigen und genau bewiesenen Sätze des Herrn Bruns geschöpft hat, verstärken nur mein Mißtrauen in dieser Hinsicht.

Durch die Mängel des Beweises braucht jedoch ein mathematisches Resultat nicht unbedingt als unrichtig erklärt zu werden; ich bin weit davon, mich gegen die Formeln des Herrn Häntzschel als solche auszusprechen, bevor dieselben genau geprüft werden. Vielmehr geht meine Absicht dahin, diese genaue Prüfung anzuregen; da solche in analytischer Allgemeinheit Schwierigkeiten bereiten dürfte, würde ich schon mit Freude begrüßen, wenn jemand das obige Zahlenbeispiel mit Hilfe der Häntzschelschen Formeln in Angriff nehmen möchte, namentlich um die kleinste positive Wurzel von $\psi_1(i\beta) = 0$ zu ermitteln.

Mitteilungen und Nachrichten.

Geeignete Mitteilungen wird der Herausgeber stets mit größtem Danke entgegennehmen.

1. Akademien. Gesellschaften. Vereinigungen. Versammlungen.

Veränderungen im Personalbestande der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Juni 1905.

Neu aufgenommen als Mitglied:

Dr. J. Plemely, Privatdozent an der Universität Wien, XVIII. 2. Bastiengasse 4.

Adressenänderungen:

Hagen, J. G., Professor, Direktor der Specola Vaticana, Rom.

Schlink, W., Privatdozent an der Technischen Hochschule, Darmstadt, Wittmannstr. 27. [Die auf S. 227 und S. 272 dieses Jahresberichts enthaltenen Angaben beruhen auf falschen Angaben der Tagesblätter.]

Sobotka, J., Professor an der böhmischen Universität, Prag-Smichow, Ferdinandskai 26.

Deutsche Mathematiker-Vereinigung. Für die nächste Jahresversammlung, welche in Gemeinschaft mit den Sitzungen der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte vom 16. bis 22. September d. J. in Stuttgart stattfinden wird, sind bis heute folgende Vorträge angemeldet worden:

A. Mathematik:

1. O. Blumenthal-Aachen: Über die ganzen transzendenten Funktionen und den Picardschen Satz (Referat).
2. G. Faber-Karlsruhe: Über Reihen nach Legendreschen Polynomen.
3. F. Hartogs-München: Über neuere Untersuchungen auf dem Gebiete der analytischen Funktionen mehrerer Variablen (Referat).
4. D. Hilbert-Göttingen: Über Wesen und Ziele der Theorie der Integralgleichungen.
5. C. Juel-Kopenhagen: Über nicht analytische Raumkurven.
6. P. Koebe-Göttingen: Über konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Bereiche.
7. G. Kowalewski-Bonn:
   a) Über S. Lie.
   b) Über eine Klasse projektiver Transformationsgruppen.
8. M. Krause-Dresden: Zur Theorie der Funktionen reeller Veränderlichen.
9. R. Mehmke-Stuttgart:
   a) Über neue Mechanismen zur Lösung von Aufgaben der Dynamik, mit Anwendung auf die mechanische Integration von Differentialgleichungen 2. und höherer Ordnung und von Systemen solcher.
   b) Über neue Anwendungen der Rolle auf das Zeichnen verschiedener Klassen von Kurven und auf die Ausführung von Berührungstransformationen.
   c) Vorführung verschiedener Apparate.

10. F. Meyer-Königsberg: Anwendung des erweiterten Euklidischen Algorithmus auf Resultantenbildungen.
11. H. Minkowski-Göttingen: Über ein noch zu bestimmendes Thema aus der theoretischen Physik.
12. R. Müller-Braunschweig: Polbestimmung für Verzweigungslagen bei der Bewegung eines ebenen ähnlich-veränderlichen Systems in seiner Ebene.
13. O. Perron-München: Über die singulären Punkte auf dem Konvergenzkreise.
14. C. Runge-Göttingen: Über graphische Lösung von Differentialgleichungen.
15. P. Schafheitlin-Berlin: Zur Theorie der Besselschen Funktionen.
16. Th. Schmid-Wien: Zur konstruktiven Behandlung des Achsenkomplexes.
17. A. Schoenflies-Königsberg: Bericht über die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. II. Teil (Geometrie und Funktionentheorie).
18. P. Stäckel-Hannover: Über Potenzreihen von mehreren Veränderlichen.
19. A. Wagenmann-Stuttgart: Mathematische Theorie des Entwicklungsgedankens.

B. Astronomie und Geodäsie.

1. F. S. Archenhold-Treptow: Über die Resultate der Sonnenfinsternis-Expedition der Treptow-Sternwarte zu Burgos.
2. L. Driencourt-Paris: Sur l'astrolabe à prisme (instrument Claude-Driencourt) et sur ses résultats dans la détermination de l'heure et de la latitude.
3. E. Hammer-Stuttgart: Demonstration einiger neuerer geodätischer und topographischer Instrumente.
4. J. Kübler-Eßlingen: Das Gleichgewichtsverhältnis der Materie zum Weltraum und die dadurch bedingte stufenweise Entwicklung.
5. A. Markuse-Berlin: Die astronomische Ortsbestimmung im Luftballon.
6. C. Stechert-Hamburg: Über die Methoden der Zeit- und Breitenbestimmungen durch Beobachtung gleicher Zenithdistanzen.
7. R. v. Sterneck-Czernowitz: Über die scheinbare Form des Himmelsgewölbes.
8. S. Wellisch-Wien: Die Bestimmung der Erdgestalt durch Ausgleichung von Breitengradmessungen nach der Methode der kleinsten Produkte.

Indem wir die Mitglieder zu recht zahlreichem Besuche unserer Versammlung einladen, bedauern wir zugleich eine Tagesordnung für unsere Versammlung erst im nächsten Hefte in Vorschlag bringen zu können, da das allgemeine Programm der Naturforscherversammlung zur Zeit noch nicht erschienen ist.

A. Pringsheim, Vorsitzender. A. Krazer, Schriftführer.

Mathematische Gesellschaft in Göttingen. *6. Sitzung vom 12. Juni 1906.* Herr Mollerup trägt vor über die Grundlagen der Mengenlehre. Der Vortragende zeigt durch Beispiele, daß ein System von arithmetisch widerspruchslosen Axiomen im allgemeinen keine Menge aller Zahlen, die den Sätzen genügen, definieren; vielmehr müssen solche Sätze die Eigenschaft haben, daß der Hilbertsche Vollständigkeitssatz eine Folge der

Sätze ist. Hierdurch gelingt es, eine Definition des Mengenbegriffs zu geben. — *7. Sitzung vom 19. Juni 1906.* Herr Zermelo berichtet über seinen Versuch einer axiomatischen Begründung der Mengenlehre. Zugrunde gelegt wird ein Bereich von „Dingen", welche sämtlich voneinander unterscheidbar und z. T. „Mengen", z. T. aber unzerlegbare Dinge sein sollen. Die Eigenschaft eines Dinges a, „Element" einer Menge M zu sein, wird als nicht weiter zurückführbare Grundbeziehung behandelt. Über Mengen und ihre Elemente werden nun 8 Postulate aufgestellt und angedeutet, wie aus ihnen alle Hauptsätze der Mengenlehre, einschließlich derer über Äquivalenz und Wohlordnung logisch streng abgeleitet werden können. Um aber den Ordnungstypus der natürlichen Zahlenreihe zu gewinnen, muß man noch die Existenz irgend einer „unendlichen" Menge postulieren. Die Arithmetik und Funktionentheorie bedürfen dieses letzten Postulates, während die „allgemeine Mengenlehre", welche endliche und unendliche Mengen in gleicher Weise behandelt, es ganz wohl entbehren kann. — *8. Sitzung vom 26. Juni 1906.* Herr Minkowski berichtet über eine in den Göttinger Nachrichten erschienene Abhandlung von W. Nernst „Über chemisches Gleichgewicht", und zeigt wie die daselbst zur Bestimmung der Konstanten in dem Massenwirkungsgesetz gemachte Annahme mit der Aussage äquivalent ist, daß beim absoluten Nullpunkt alle Systeme gleiche Entropie besitzen.

Mathematische Gesellschaft in Wien. *Freitag, den 23. Februar 1906:* Hanni, Die Verwendung des Laplace-Abelschen Integrals in der neueren Funktionentheorie. — *Freitag, den 9. März 1906:* Josef Grünwald, Die Geometrie der Berührungselemente II. Ordnung in der Ebene (nach E. Study). — *Freitag, den 4. Mai 1906:* Gustav Kohn, Über das System der Flächen zweiter Ordnung mit fünf gemeinsamen Punkten. — *Freitag, den 18. Mai 1906:* Gustav Kohn, Über das System der Flächen zweiter Ordnung mit fünf gemeinsamen Punkten (Fortsetzung). — *Freitag, den 1. Juni 1906:* L. v. Schrutka, Über die Auflösung linearer Quaternionengleichungen. — *Freitag, den 15. Juni 1906:* A. Prey, Über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten.

Kgl. Preuß. Akademie der Wissenschaften. Die Akademie hat Professor Bauschinger in Berlin zur Förderung wissenschaftlicher Arbeiten eine Unterstützung von 3500 Mark bewilligt.

American Mathematical Society. Die American Mathematical Society wird am 3.—4. September 1906 ihre 13. Sommerversammlung in New Haven, Conn., abhalten und damit das 5. „Colloquium" verbinden. Die Dauer dieses Colloquiums ist vom 5.—8. September bemessen. Zur Verhandlung stehen folgende Themata: E. H. Moore, On the theory of bilinear functional operations (5 Stunden); M. Mason, Selected topics in the theory of boundery value problems of differential equations (4 Stunden); E. J. Wilczynski, Projective differential geometry (4 Stunden).

2. Preisaufgaben und gekrönte Preisschriften.

Kgl. Preuß. Akademie der Wissenschaften. Die Akademie hat einen Preis von 5000 *M* Professor Mertens in Wien zuerkannt für sein Werk über zyklische Gleichungen.

3. Hochschulnachrichten.

Handelshochschule zu Berlin. Das erste Vorlesungsverzeichnis der jüngsten Handelshochschule für das kommende Wintersemester gewährt eine Übersicht über die Vielseitigkeit der behandelten Gegenstände. Erwähnt sei, daß die Versicherungsmathematik von Professor v. Bortkiewicz (im Nebenamt) in 2 Wochenstunden vorgetragen wird. Die Vorlesungen über das Versicherungswesen hält Dr. Manes.

Deutsche Universität in Prag. Als Nachfolger von Professor Gmeiner, der nach Innsbruck auf den Lehrstuhl von Stolz übergesiedelt ist, sind in Vorschlag gebracht worden: Professor Liebmann-Leipzig, Privatdozent Dr. Grünwald-Wien und Privatdozent Dr. Ludwig-Karlsruhe.

4. Personalnachrichten.

Ernennungen, Auszeichnungen usw.:

Dr. R. B. Allen an der Clark Universität wurde zum Professor der Mathematik am Kenyon College, Gambier, Ohio, ernannt.

Professor E. W. Brown wurde zum Professor der Mathematik an der Yale Universität ernannt.

Professor G. Castelnuovo und Professor V. Cerruti in Rom, sowie Professor A. Capelli in Neapel wurden zu Mitgliedern des Reale Istituto Lombardo gewählt.

Dr. A. S. Eve wurde zum ao. Professor der Mathematik an der Mc Gill Universität ernannt.

Dr. J. Graham am Williams College wurde zum ao. Professor daselbst ernannnt.

Dr. Franz Gruner, Privatdozent an der Universität Bern, wurde zum ao. Professor für theoretische Physik daselbst ernannt.

Dr. J. G. Hardy am Williams College wurde zum ao. Professor der Mathematik daselbst befördert.

Dr. E. Kasner wurde zum ao. Professor der Mathematik an der Columbia Universität ernannt.

Professor Dr. Ernst Lange, Direktor der Realschule in Chemnitz, wird vom 1. Oktober d. J. ab im Kgl. Sächs. Kultusministerium als vortragender Rat tätig sein.

Professor Dr. R. Müller an der Technischen Hochschule zu Braunschweig ist zum Rektor gewählt worden.

Professor Dr. Papperitz wurde für die Amtsperiode 1. August 1906/07 zum Rektor der Bergakademie in Freiberg i. S. wiedergewählt.

Professor H. Poincaré an der Sorbonne in Paris wurde von der Universität Dublin zum Ehrendoktor der Naturwissenschaften ernannt.

Professor Dr. E. Selling an der Universität Würzburg ist wegen hohen Alters von der Verpflichtung, Vorlesungen zu halten, entbunden worden.

Professor S. E Slocum an der Universität von Illinois wurde zum Professor der angewandten Mathematik an der Universität von Cincinnati ernannt.

Professor Dr. E. Wiechert an der Universität Göttingen hat einen Ruf als Professor der theoretischen Physik an der Universität München abgelehnt.

Professor E. T. Whittaker, Royal Astronomer of Ireland, wurde von der Universität Dublin zum Ehrendoktor der Naturwissenschaften ernannt.

Dr. J. K. Whittemore wurde zum ao. Professor der Mathematik an der Harvard Universität ernannt.

Professor F. S. Woods am Massachusetts Institute of Technology wurde zum o. Professor daselbst befördert.

Zu Mitgliedern der Kaiserlich Leopoldinisch-Carolinischen Deutschen Akademie der Naturforscher in Halle wurden gewählt: Professor B. G. Guccia in Palermo. — Professor T. Levi-Civita in Padua. — Professor J. Molk in Nancy. — Professor Niels Nielsen in Kopenhagen. — Professor F. Gomes Teixeira in Porto. — Professor F. Pietzker in Nordhausen.

Habilitationen:

Dr. O. Perron hat sich an der Universität zu München mit einer Probevorlesung über das Thema: „Was sind und was sollen die Irrationalzahlen?“ als Privatdozent der Mathematik habilitiert.

Gestorben:

Professor Dr. F. Drude, Direktor des Physikalischen Instituts der Universität Berlin, ist am 5. Juli d. J. im Alter von 42 Jahren gestorben.

Professor D. G. Lindhagen, lange Jahre Astronom an der Sternwarte in Upsala, Sekretär der Schwedischen Akademie der Wissenschaften, ist Anfang Juni 1906 zu Stockholm im Alter von 87 Jahren gestorben.

Professor A. Rayel, Professor der physikalischen Astronomie an der Universität und Direktor der Sternwarte zu Bordeaux, ist gestorben.

Professor George A. Wentworth, ehemals Professor der Mathematik an der Phillips Exeter Akademie, ist am 24. Mai d. J. im Alter von 71 Jahren gestorben.

5. Vermischtes.

Änderungen im Prüfungswesen Englands. Der Special Board for Mathematics hat einen Bericht herausgegeben, der eine wesentliche Änderung in dem Charakter der Prüfungen („Mathematical Tripos“) in Cambridge vorschlägt. Bisher unterziehen sich die besseren Studenten am Ende des dritten und vierten Jahres den Prüfungen. Es wird nun geplant, die Examina in zwei Teile zu teilen, von denen der eine am Ende des ersten Studienjahres zu absolvieren ist; er würde umfassen: elementare Mathematik, Differential- und Integralrechnung und die Elemente der Dynamik, Elektrizität und Optik. Der zweite Teil der Prüfung würde am Ende des dritten Jahres stattfinden; er ist in zwei Abschnitte geteilt, von denen der eine, Abschnitt A, sich auf Funktionentheorie, Differentialgleichungen, Hydromechanik und Astronomie bezieht. Der Abschnitt B umfaßt höhere Gebiete. Die Studierenden der Physik würden den Teil I und von Teil II den Abschnitt A zu absolvieren haben. — Es wird durch diese Vorschläge erstrebt, den übertriebenen Examendrill, wie er jetzt herrscht, zu beseitigen und die fähigen Köpfe zur wissenschaftlichen Vertiefung anzuregen.

Literarisches.

1. Notizen und Besprechungen.

Deutsche Mathematiker-Vereinigung. Die Mitglieder der Vereinigung werden darauf aufmerksam gemacht, daß der erste Ergänzungsband des Jahresberichts, enthaltend: „Über die Entwicklung der Elementar-Geometrie im XIX. Jahrhundert. Bericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung erstattet von Max Simon“, im Verlage von B. G. Teubner in Leipzig, Poststraße 3, erschienen ist und bei *direkter* Bestellung zu dem ermäßigten Preise (ℳ 6.— statt ℳ 8.—) bezogen werden kann.

Nachforschungen nach alten mathematischen Handschriften und Büchern. Professor Dr. E. Smith von der Columbia Universität stellt während des gegenwärtigen Sommers in Spanien Nachforschungen nach alten mathematischen Handschriften und Büchern an.

2. Bücherschau.

Ahrens, R., Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate und ihre spezielle Anwendung auf die Geodäsie, nebst einem Anhang von Beispielen. IV, 102 S. 8° m. 13 Fig. Leipzig 1906. ℳ 2.—.

Antomari, C., Cours de géométrie descriptive. 3e édition, conforme au nouveau programme de mathématiques spéciales. 623 p. avec figures. Paris 1906.

Clebsch, A., Vorlesungen über Geometrie, mit besonderer Benutzung der Vorträge von Clebsch bearbeitet und herausgegeben von F. Lindemann. 2. verb. Aufl. 1. Bd. 1. Teil. 1. Lieferung (S. 1—480). Leipzig 1906. ℳ 16.—.

Fischer, O., Theoretische Grundlagen für eine Mechanik der lebenden Körper. Leipzig 1906. ℳ 14.—.

Lorentz, H. A., Abhandlungen über theoretische Physik. 1. Band, 1. Lieferung. Leipzig 1906. ℳ 10.—.

Oettingen, A. v., Die perspektivischen Kreisbilder der Kegelschnitte. Mit 85 Abbildungen im Text und auf 4 Tafeln. VIII, 118 S. 8°. Leipzig 1906. ℳ 5.—.

Traub, K., Elementare Berechnung der Seiten der regulären Vierunddreißig- und Siebenzehn-Ecke. 23 S. m. 1 Taf. Karlsruhe 1906. ℳ 0.60.

Weinbaum, O., Die Spiegelung einer unendlichen Ebene in einem zu ihr senkrechten elliptischen Zylinder. Dissertat. Berlin 1906. ℳ 1.80.

Wilczynski, E. J., Projective differential geometry of curves and ruled surfaces. Leipzig 1906. ℳ 10.—.

3. Zeitschriftenschau.

(Von dem Inhalt der Zeitschriften werden nur die Aufsätze erwähnt, welche dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften angehören.)

Mathematische Annalen. 62. Band. 3. Heft.

Herglotz, Über die Gestalt der auf algebraischen Kurven nirgends singulären linearen Differentialgleichungen 2ter Ordnung. — Mayer, Über den Hilbertschen Unabhängigkeitssatz in der Theorie des Maximums und Minimums der einfachen Integrale. — Hilbert, Zur Variationsrechnung. — Egorow, Die hinreichenden Bedingungen des Extremums in der Theorie des Mayerschen Problems. — Wendt, Eine Verallgemeinerung der Hamiltonschen Gruppen. — v. Thielmann, Die Zerlegung von Zahlen mit Hilfe periodischer Kettenbrüche. — Tamarkine et Friedmann, Sur les congruences du second degré et les nombres de Bernoulli. — Jourdain, The derivation of equations in generalised coordinates from the principle of least action and allied principles. — Klein, Zur Schraubentheorie von Sir Robert Ball.

Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. 131. Heft III.

Farkas, Beiträge zu den Grundlagen der analytischen Mechanik. Schlesinger, Zur Theorie der linearen homogenen Differentialsysteme. Fejer, Über Stabilität und Labilität eines materiellen Punktes im widerstrebenden Mittel. Horn, Bewegungen in der Nähe einer Gleichgewichtslage.

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. 37. Jahrgang. 4. Heft.

Wieleitner, Die Evoluten der Kegelschnitte. Pfaff, Geometrische Örter als Übungsstoff für die Prima. Schlesinger, Zur Lehre von der Proportionalität der Linien am Kreise. Lehnen, Teilung eines jeden gegebenen Winkels in den Primzahlen 3, 5, 7, 11, 13 usw. entsprechende gleiche Teile. Zühlke, Einfacher Beweis des Satzes vom Neunpunktekreis. Vogel, Über die mechanische Ermittlung des Durchdringungspolygons. Grosse, Die graphische Behandlung der Gleichungen im Unterricht. Literarische Berichte. Pädagogische Zeitung.

Journal de Mathématiques pures et appliquées. 5ième série. Tome 10. Année 1904. 4me fascicule.

J. Boussinesq, Compléments au mémoire intitulé: Recherches théoriques sur l'écoulement des nappes d'eau infiltrés dans le sol et sur le débit des sources. — S. Zaremba, Les fonctions fondamentales de H. Poincaré et la méthode de Neumann pour une frontière composée de polygones curvilignes. — M. Mason, Sur les solutions satisfaisant à des conditions aux limites données de l'équation différentielle $\Delta u + \lambda A(x, y) u = f(x, y)$.

— 6ième série. Tome 1. Année 1905.

L. Zoretti, Sur les fonctions analytiques uniformes qui possèdent un ensemble parfait discontinu de points singuliers. — N. Saltykow, Etude sur les transformations infinitésimales. — P. Duhem, Sur l'équilibre de température d'un corps invariable et la stabilité de cet équilibre. — Sur la Médaille Guccia. — W. Ermakov, Calcul des variations d'après Weierstraß. — H. Lebesgue, Sur les fonctions représentables analytiquement. — C. Jordan, Mémoire sur les formes quadratiques, suivant un module premier p, invariantes par une substitution linéaire donnée. — J. Boussinesq, Calcul du pouvoir refroidissant des courants fluides. — Th. Pepin, Relations qui existent entre les formes quadratiques de deux déterminants D et De^2. — Jouguet, Sur la propagation des réactions chimiques dans le gaz, premier mémoire.

Revue de mathématiques spéciales. 16ième année. [Novembre 1905 — Mai 1906.]

Ch. Michel, Enoncé exact du théorème de Rolle. — J. Richard, Sur un théorème d'Analyse [série de Taylor]. — G. Maupin, Volume des foudres ovales. — J. Richard, Dérivée $n$ième de e^{-x^2}. — Th. Leconte, Equation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, sans second membre. — E. Humbert, Dérivée de la fonction x^m. — L. Bickart, Somme des puissances semblables des n premiers nombres. — L. Bickart, Mouvement d'une figure plane semblable à une figure donnée et dont deux points décrivent deux droites concourantes. — Ch. Michel, Rapport anharmonique de quatre points d'un cercle. — Lagrange (de St. Etienne), Calcul approché des séries. — M. Rougié, Sur les cubiques circulaires. — G. Cotty, Epicycloïdes et hypocycloïdes. — Solution de diverses questions proposées aux Concours d'entrée des Ecoles du gouvernement.

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. XII. No. 8.

Miller, The february meeting of the San Francisco Section. Wrigth, An application of differential invariants to triply orthogonal systems of surfaces. Snyder, Surfaces generated by conics cutting a twisted quartic curve and an axis in the plane of the conic. Operation groups fo order $p_1^{m_1\mu_1} p_2^{m_2\mu_2}$. Miss Carstens, A definition of quarternions by independent postulates. Lennes, Note on the Heine-Borel theorem. Young, Functions of real variables. Notes.

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. III. Nr. 9.

Cole, The April meeting of the American Mathematical Society. — Slaught, The April meeting of the Chicago Section. — Miller, Groups in which all the operators are contained in a series of subgroups such that any two have only identity in common. — Morehead, Notes on the factors of Fermat's numbers. — Wilson, Theoretical mechanics. — Smith, Some recent foreign textbooks. — Notes.

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. XII. Nr. 10.

Johnson, Note on the transcendents S_n and $s_n = S_n - 1$. — Curtiss, On certain properties of Wronskians and related matrices. — Shaw, Significance of the term hypercomplex number. — White, How should the College teach analytic geometry? — Slaught, Four books on the calculus. Notes.

4. Kataloge.

Alfred Lorentz, Leipzig, Kurprinzstr. 10. Katalog 165. Logik. (Logik der Mathematik: Arithmetische, geometrische u. Infinitesimal-Methoden. Funktionsbegriff.) Mit einer Einleitung: Wilhelm Wundt, Aufgabe und Richtungen der Logik.

Franz Pietzker, Tübingen. 366. Verzeichnis. Naturwissenschaften. (Mathematik. Physik. Astronomie usw.)

5. Bei der Redaktion eingegangene Schriften.

[Titel, Preis usw. der eingesandten Schriften werden hier regelmäßig veröffentlicht. Besprechungen geeigneter Bücher bleiben vorbehalten. Eine Rücksendung der eingegangenen Schriften kann nicht erfolgen.]

Ernst Blaschke, Vorlesungen über mathematische Statistik (die Lehre von den statistischen Maßzahlen). VIII, 268 S. gr. 8. B. G. Teubner, Leipzig 1906. ℳ 7.40.

Alfred Clebsch, Vorlesungen über Geometrie. Mit besonderer Benutzung der Vorträge von Alfred Clebsch bearbeitet und herausgegeben von Ferdinand Lindemann. 2., vermehrte Auflage. Ersten Bandes erster Teil. Erste Lieferung. (S. 1—480). gr. 8. B. G. Teubner, Leipzig 1906. ℳ 16.—.

Fr. Ebner, Leitfaden der technisch wichtigen Kurven. Mit 93 Figuren im Text. VIII, 197 S. gr. 8. B. G. Teubner, Leipzig 1906. ℳ 4.—.

Otto Fischer, Theoretische Grundlagen für eine Mechanik der lebenden Körper. Mit speziellen Anwendungen auf den Menschen sowie auf einige Bewegungsvorgänge an Maschinen in möglichst elementarer Weise dargestellt. Mit 67 in den Text gedruckten Figuren und 4 Tafeln. X, 372 S. gr. 8. B. G. Teubner, Leipzig 1906. ℳ 14.—.

A. Hochheim, Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene. Heft II. Die Kegelschnitte. Abteilung I. A. Aufgaben. 3., vermehrte Auflage, bearbeitet von Oswald Jahn und Franz Hochheim. 90 S. gr. 8. B. G. Teubner, Leipzig 1906. ℳ 1.80.

A. Lippmann, Die absolute Wahrheit der Euklidischen Geometrie. Eine kritische Untersuchung der Grundlagen der Geometrie. Beweise für die Wahrheit der Axiome und Postulate, insbesondere für die des Parallelenaxioms. (V. Postulat Euclids.) 68 S. Verlag von Rudolf Gerstäcker, Leipzig 1906.

F. Paulsen, Das deutsche Bildungswesen in seiner geschichtlichen Entwicklung. 192 S. 8. B. G. Teubner, Leipzig 1906. ℳ 1.25.

J. Tews, Schulkämpfe der Gegenwart. 158 S. 8. B. G. Teubner, Leipzig 1906. ℳ 1.25.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, mit Einschluß ihrer Anwendungen. Hrsg. im Auftrage der Akademien der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München und Wien, sowie unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen. In 7 Bänden zu je 6—8 Heften. gr. 8. geh.

Bisher erschien:

I. Arithmetik und Algebra, 2 Teile, red. von W. Frz. Meyer.
I. Teil. [XXXVIII u. 554 S.] geh. ℳ 17.—, in Halbfranz geb. ℳ 20.—
II. Teil. [X u. S. 555—1197.] geh. ℳ 19.—, in Halbfranz geb. ℳ 22.—.

II. Analysis, 2 Teile, red. von H. Burkhardt und W. Wirtinger.
I. Teil. Heft: 1. [160 S.] 1899. ℳ 4.80; 2./3. [240 S.] 1900. ℳ 7.50; 4. [160 S.] ℳ 4.80. 5. [199 S.] 1904. ℳ 6.—. 6. [57 S.] 1906. ℳ 1.60.
II. Teil. Heft: 1. [175 S.] 1901. ℳ 5.20.

III. Geometrie, 3 Teile, red. von W. Frz. Meyer.
II. Teil. Heft: 1. [160 S.] 1903. ℳ 4.80.
II. Teil. Heft: 2. [96 S.] 1904. ℳ 2.80.
III. Teil. Heft: 1. [183 S.] 1902. ℳ 5.40.
——— Heft: 2/3. [256 S.] 1903. ℳ 6.80.

IV. Mechanik, 2 Teile, red. von F. Klein u. C. H. Müller.
I. Teil. I. Abt. Heft: 1. [121 S.] 1901. ℳ 3.40; 2. [156 S.] 1902. ℳ 4.60. 3. [156 S.] 1903. ℳ 4.60.
—— II. Abt. Heft: 1. [152 S.] 1904. ℳ 4.40.
II. Teil. Heft: 1. [147 S.] 1901. ℳ 3.80; 2. [131 S.] 1903. ℳ 3.60; 3. [192 S.] 1906. ℳ 5.80.

V. Physik, 2 Teile, red. von A. Sommerfeld.
I. Teil. Heft: 1. [160 S.] 1903. ℳ 4.80.
——— Heft: 2. [159 S.] 1905. ℳ 4.80.
——— Heft: 3. [170 S.] 1906. ℳ 5.20.
II. Teil. Heft: 1. [280 S.] 1904. ℳ 8.—

VI. 1: Geodäsie und Geophysik, red. von Ph. Furtwängler und E. Wiechert.
Heft: 1. [116 S.] 1906. ℳ 3.40.

VI. 2: Astronomie, red. von K. Schwarzschild.
Heft: 1. [193 S.] 1905. ℳ 5.80.

In Vorbereitung:

VII. Historische, philosophische und didaktische Fragen behandelnd, sowie Generalregister.

Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées. Publiée sous les auspices des Académies des sciences de Göttingue, de Leipzig, de Munich et de Vienne avec la collaboration de nombreux savants. Édition française, rédigée et publiée d'après l'édition allemande sous la direction de Jules Molk, professeur à l'université de Nancy. En sept tomes. gr. 8. Tome I: vol. I, fasc. 1. [160 p.] 1904. n. ℳ 4.—, vol. III. fasc. 1. [96 p.] 1906. n. ℳ 2.40, vol. IV. fasc. 1. [160 p.] 1906. n. ℳ 4.—

Abraham, Dr. M., Privatdozent an der Universität Göttingen, Theorie der Elektrizität. I. Band: Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität. Mit einem einleitenden Abschnitte über das Rechnen mit Vektorgrößen in der Physik. Von Dr. A. Föppl. Zweite, umgearbeitete Auflage von Dr. M. Abraham. Mit 11 Figuren im Text. [XVIII u. 443 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. geb. n. ℳ 12.—. II. Band: Elektromagnetische Theorie der Strahlung. Von Dr. M. Abraham. [X u. 404 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. ℳ 10.—

Ahrens, Dr. W., in Magdeburg, Scherz und Ernst in der Mathematik. Geflügelte und ungeflügelte Worte. [X u. 522 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. geb. n. ℳ 8.—
——— mathematische Unterhaltungen und Spiele. [X u. 428 S.] gr. 8. 1901. In Original-Leinwandband mit Zeichnung von P. Bürck in Darmstadt. n. ℳ 10.—

Blaschke, Dr. E., Professor an der Technischen Hochschule zu Wien, Vorlesungen über mathematische Statistik. Die Lehre von den statistischen Maßzahlen. Mit 17 Textfiguren und 5 Tafeln. [VIII u. 268 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb.

Bolyai de Bolya, Wolfgang, tentamen iuventutem studiosam in elementa matheseos purae elementaris ac sublimioris methodo intuitiva evidentiaque huic propria introducendi, cum appendice triplici. Editio secunda. Tomus II: Elementa geometriae et appendices. Mandato Academiae Scientiarum Hungaricae suis adnotationibus adiectis ediderunt Josephus Kürschák, Mauritius Réthy, Béla Tötössy de Zepethnek, Academiae Scientiarum Hungaricae sodales. 2 partt. 4. 1904. Pars I. Textus. [LXIII u. 437 S.] Pars II. Figurae. [VIII u. 82 lithogr. Tafeln.] In Halbkalbleder geb. n. ℳ 40.—

Börnstein, Dr. R., und **Dr. W. Marckwald,** Professoren an der Universität Berlin, sichtbare und unsichtbare Strahlen. Mit 82 Abbildungen im Text. [VI u. 142 S.] 8. 1905. geh. ℳ 1.—, in Leinw. geb. ℳ 1.25.

Bruns, Dr. Heinrich, Professor der Astronomie an der Universität Leipzig, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmaßlehre. [VIII u. 310 S. u. Anhang 18 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. ℳ 8.40.

Bucherer, Dr. A. H., Privatdozent an der Universität Bonn, mathematische Einführung in die Elektronentheorie. Mit 14 Figuren im Text. [IV u. 148 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. geb. n. ℳ 3.20.
——— Elemente der Vektoranalysis. Mit Beispielen aus der theoretischen Physik. 2. Auflage. [VIII u. 103 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. ℳ 2.40.

Clebsch, A., Vorlesungen über Geometrie. Mit besonderer Benutzung der Vorträge von A. Clebsch, bearbeitet und herausgegeben von Dr. F. Lindemann, Professor an der Universität München. I. Band. 1. Lieferung. 2., vermehrte Auflage. [480 S.] gr. 8. 1906. geh. n. ℳ 16.—

Czuber, Hofrat Emanuel, Professor an der Technischen Hochschule zu Wien, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. 2 Bände. gr. 8.

I. Band. 2. sorgfältig durchgesehene Auflage. Mit 115 Figuren im Text. [XIV u. 5.. S.] 1906. In Leinw. geb. n. ℳ 12.—

II. — Mit 78 Figuren im Text. [IX u. 428 S.] 1898. In Leinw. geb. n. ℳ 10.—

Ebner, Dr. F., Oberlehrer an der Kgl. Maschinenbauschule zu Einbeck, Leitfaden der technisch wichtigen Kurven. Mit 93 Figuren im Text. [VIII u. 197 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. ℳ 4.—

Festschrift Adolph Wüllner gewidmet zum 70. Geburtstage 13. Juni 1905 von der Königl. Technischen Hochschule zu Aachen, ihren früheren und jetzigen Mitgliedern. Mit dem Bildnis A. Wüllners in Heliogravüre, 8 Tafeln u. 91 Fig. im Text. [VIII u. 264 S.] gr. 8. 1905. geh. n. ℳ 8.—, in Leinw. geb. n. ℳ 9.—

Fischer, Dr. Otto, Professor an der Universität Leipzig, theoretische Grundlagen für eine Mechanik der lebenden Körper mit speziellen Anwendungen auf den Menschen, sowie auf einige Bewegungsvorgänge an Maschinen. In möglichst elementarer und anschaulicher Weise dargestellt. Mit 67 in den Text gedruckten Figuren und 4 Tafeln. [X u. 372 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. ℳ 14.—

Fleming, J. A., Professor der Elektrotechnik am University College zu London, elektrische Wellen-Telegraphie. 4 Vorlesungen. Autorisierte deutsche Ausgabe von Professor Dr. E. Aschkinaß, Privatdozent an der Universität Berlin. Mit 53 Abbild. [IV u. 185 S.] gr. 8. 1906. geh. n. ℳ 4.20, in Leinw. geb. n. ℳ 5.—

Föppl, Dr. Aug., Professor an der Königl. Technischen Hochschule zu München, Vorlesungen über technische Mechanik. In 4 Bänden. gr. 8. Preis des ganzen Werkes in 4 Leinwand-Bänden n. ℳ 42.—

I. Band. Einführg. i. d. Mechanik. 3. Aufl. M. 136 Fig. i. Text. [XVI u. 428 S.] 1905. geb. n. ℳ 10.—
II. — Graphische Statik. 2. Aufl. Mit 176 Fig. i. Text. [XII u. 471 S.] 1903. geb. n. ℳ 10.—
III. — Festigkeitslehre. 3. Aufl. Mit 83 Fig. i. Text. [XVI u. 434 S.] 1905. geb. n. ℳ 10.—
IV. — Dynamik. 2. Aufl. Mit 69 Fig. i. Text. [XV u. 506 S.] 1901. geb. n. ℳ 12.—

Gans, Dr. Richard, Privatdozent an der Universität Tübingen, Einführung in die Vektoranalysis. Mit Anwendungen auf die mathematische Physik. Mit 31 Figuren im Text. [X u. 98 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. ℳ 2.80.

Heffter, Dr. L., Professor an der Universität Kiel, und **Dr. C. Koehler**, Professor an der Universität Heidelberg, Lehrbuch der analytischen Geometrie. I. Band: Geometrie in den Grundgebilden erster Stufe und in der Ebene. Mit 136 Figuren im Text. [XVI u. 526 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. ℳ 14.—

Höfler, Dr. A., Professor an der Universität Prag, Vorschläge zu einer zeitgemäßen Umgestaltung des mathematischen Unterrichts an den österreichischen Gymnasien und Realschulen. Im Auftrage der Deutschen Mittelschule in Prag erstattet. (Sonderabdruck aus der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. 37. Jahrgang.) [15 S.] gr. 8. 1906. geh. n. ℳ —.40.

Jahnke, Dr. E., etatsmäßiger Professor an der Königl. Bergakademie zu Berlin, Vorlesungen über die Vektorenrechnung. Mit Anwendungen auf Geometrie, Mechanik und mathematische Physik. Mit 32 Figuren im Text. [XII u. 235 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. ℳ 5.60.

Kohlrausch, Dr. Friedr., Lehrbuch der praktischen Physik. 10., vermehrte Auflage des Leitfadens der praktischen Physik. Mit zahlreichen Figuren im Text. [XXVIII u. 656 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. ℳ 9.—

Lamb, H., Professor an der Universität Manchester, Lehrbuch der Hydrodynamik. Deutsche autorisierte Ausgabe unter Mitwirkung des Verfassers besorgt von Dr. Joh. Friedel in Charlottenburg. Mit zahlreichen Figuren im Text. [ca. 700 S. in 2 Teilen.] gr. 8. In Leinw. geb.

[Teil I erscheint im Sommer 1906.]

Leibniz, G. W., nachgelassene Schriften physikalischen, mechanischen und technischen Inhalts. Herausgegeben und mit erläut. Anmerk. versehen von Dr. E. Gerland, Professor an der Kgl. Bergakademie in Klausthal. Mit 200 Figuren im Text. A. u. d. T.: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. XXI Heft. [VI u. 256 S.] gr. 8. 1906. geh. n. ℳ 10.—

Lorentz, Dr. **H. A.**, Professor an der Universität Leiden, Abhandlungen über theoretische Physik. In 2 Bänden. I. Band, 1. Lieferung. Mit 8 Figuren im Text. [298 S.] gr. 8. 1906. geh. n. ℳ 10.—
[Die 2. (Schluß-) Lieferung des I. Bandes erscheint im Herbst 1906.]

Müller, Dr. **Felix**, Professor in Friedenau, Karl Schellbach. Rückblick auf sein wissenschaftliches Leben. Nebst zwei Schriften aus seinem Nachlaß und Briefen von Jacobi, Joachimsthal und Weierstraß. Mit einem Bildnis Karl Schellbachs. A. u. d. T: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. XX. Heft. [86 S.] gr. 8. 1905. geh. n. ℳ 2.80.

Neumann, Franz, gesammelte Werke. In 3 Bänden. II. Band. Bei der Herausgabe dieses Bandes sind tätig gewesen die Herren: E. Dorn (Halle), O. E. Meyer (Breslau), C. Neumann (Leipzig), C. Pape (früher in Königsberg), L. Saalschütz (Königsberg), K. von der Mühll (Basel), A. Wangerin (Halle), H. Weber (Straßburg). Mit einem Bildnis Franz Neumanns aus dem 86. Lebensjahre in Heliogravüre. [XVI u. 620 S.] gr. 4. 1906. geh. n. ℳ 36.—

Nielsen, Dr. **Niels**, Dozent der reinen Mathematik an der Universität Kopenhagen, Inspektor des mathematischen Unterrichts an den Gymnasien Dänemarks, Handbuch der Theorie der Gammafunktion. [X u. 326 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. ℳ 12.—

——— Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen. [XIV u. 408 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. geb. n. ℳ 14.—

Osgood, Dr. **W. F.**, Professor an der Harvard-Universität, Cambridge, Mass., V. St. A., Lehrbuch der Funktionentheorie. In 2 Bänden. I. Band. 1. Hälfte. Mit zahlreichen Figuren im Text. [306 S.] gr. 8. 1906. geh. n. ℳ 7.—
[Die 2. Hälfte des I. Bandes wird im Herbst 1906 erscheinen.]

Pockels, Dr. **F.**, Professor an der Universität Heidelberg, Lehrbuch der Kristalloptik. Mit 168 Figuren im Text und 6 Doppeltafeln. [X u. 519 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. ℳ 16.—

Poincaré, Henri, Membre de l'Institut, Wissenschaft und Hypothese. Autorisierte deutsche Ausgabe mit erläuternden Anmerkungen von F. und L. Lindemann. 2., verbesserte Auflage. [XVI u. 346 S.] 8. 1906. In Leinw. geb. n. ℳ 4.80.

——— der Wert der Wissenschaft. Mit Genehmigung des Verfassers ins Deutsche übertragen von E. Weber. Mit Anmerkungen und Zusätzen von H. Weber, Professor in Straßburg i. E., und einem Bildnis des Verfassers. [V u. 252 S.] 8. 1906. In Leinwand geb. n. ℳ 3.60.

Reformvorschläge für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Entworfen von der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte. Nebst einem allgemeinen Bericht über die bisherige Tätigkeit der Kommission von Professor A. Gutzmer in Halle a. S. [IV u. 48 S.] gr. 8. 1905. geh. n. ℳ 1.—

Serret-Harnack, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. 3 Bände. gr. 8. [Von der 3. Aufl. an hat Prof. G. Scheffers in Darmstadt die Neubearbeitung übernommen.]

Einzeln:

I. Band: Differentialrechnung. 3. Aufl. besorgt von Dr. G. Scheffers, Professor an der Technischen Hochschule zu Darmstadt. Mit Figuren im Text. [ca. 600 S.] geh. ca. n. ℳ 10.—, in Leinw. geb. ca. n. ℳ 11.— [Erscheint im Sommer 1906.]

II. Band: Integralrechnung. 2. durchgesehene Auflage, mit Unterstützung von H. Liebmann und E. Zermelo, herausgegeben von Dr. G. Bohlmann, Professor in Berlin. [XII u. 428 S.] 1899. geh. n. ℳ 8.—, in Leinw. geb. n. ℳ 9.—

III. Band: Differentialgleichungen und Variationsrechnung. 2., durchgesehene Auflage von Dr. G. Bohlmann, Professor in Berlin, und E. Zermelo, Professor an der Universität Göttingen. Mit 33 Fig. im Text. [XII u. 480 S.] 1904. geh. n. ℳ 9.—, in Leinw. geb. n. ℳ 10.—

Simon, Dr. **Max**, Professor an der Universität Straßburg i. E., über die Entwicklung der Elementar-Geometrie im XIX. Jahrhundert. Bericht erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. A. u. d. T.: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Ergänzungsband I. Mit 28 Figuren im Text. [VIII u. 278 S.] gr. 8. 1906. geh. n. ℳ 8.—, in Leinw. geb. n. ℳ 9.—

JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN
MATHEMATIKER-VEREINIGUNG

IN MONATSHEFTEN HERAUSGEGEBEN VON

A. GUTZMER

IN HALLE A. S.

15. BAND. 8/9. HEFT. AUGUST/SEPTEMBER.

AUSGEGEBEN AM 31. AUGUST 1906.

LEIPZIG.

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1906.

JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG.

IN MONATSHEFTEN HERAUSGEGEBEN VON A. GUTZMER IN HALLE A. S.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

☞ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Bücher usw.) sind an

Prof. Dr. A. Gutzmer in Halle a. S., Martinsberg 8,

zu richten.

☞ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich: von größeren Aufsätzen 25 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen und Mitteilungen 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☞ Jeder Band des Jahresberichts in Monatsheften umfaßt vom 12. Bande ab 38 Bogen (= 608 Druckseiten) und kostet für Mitglieder der Vereinigung, Porto inbegriffen, Mark 14.70, für Nichtmitglieder Mark 18.—. Mitglieder haben ihr Abonnement bei der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig, Poststraße 3, aufzugeben, Nichtmitglieder dagegen bei einer Sortimentsbuchhandlung.

☞ Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung zählt z. Zt. über 660 Mitglieder. Der jährliche Mitgliedsbeitrag beträgt 2 Mark, kann aber auch durch einmalige Zahlung von 30 Mark abgelöst werden. Beitrittserklärungen nimmt der Schriftführer der Vereinigung, Prof. Dr. A. Krazer, Karlsruhe in Baden, Westendstraße 57, oder die oben genannte Verlagsbuchhandlung entgegen. Die Ablösungssumme bezw. der Jahresbeitrag ist an die Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig einzusenden.

INHALT DES VORLIEGENDEN (DOPPEL-)HEFTES.

Über einige Formeln der Integralrechnung.

Von G. Kowalewski in Bonn.

§ 1. Das Integral $\int_a^b \sum F_\nu df_\nu$.

Wir erinnern zunächst kurz an die Definition des obigen Integrals und an seine einfachsten Eigenschaften.

$F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x)$ und $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ seien reelle Funktionen der reellen Veränderlichen x in[1]) dem Intervall (a,b). Durch Einschaltung von $x_1 < x_2 < \ldots < x_{q-1}$ zwischen $x_0 = a$ und $x_q = b$ zerlegen wir (a,b) in die Teilintervalle $(x_0, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{q-1}, x_q)$. Jedem Teilintervall $(x_{\varkappa-1}, x_\varkappa)$ entnehmen wir einen Wert $\xi_\varkappa$ und bilden den Ausdruck

$$S = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \{ F_1(\xi_\varkappa)[f_1(x_\varkappa) - f_1(x_{\varkappa-1})] + \ldots + F_n(\xi_\varkappa)[f_n(x_\varkappa) - f_n(x_{\varkappa-1})] \}.$$

Die Maximallänge der Teilintervalle $(x_{\varkappa-1}, x_\varkappa)$ wollen wir den zu S gehörigen *Teilungsmodul* nennen. Unter $S_1, S_2, S_3, \ldots$ verstehen wir eine Folge von Ausdrücken S und mit $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ bezeichnen wir die zugehörigen Teilungsmoduln. Ist jede Folge $S_1, S_2, S_3, \ldots$, welcher die Eigenschaft $\lim \delta_n = 0$ zukommt, konvergent, so streben sie alle demselben Grenzwert zu. Wir schreiben ihn

$$\int_a^b (F_1 df_1 + F_2 df_2 + \ldots + F_n df_n)$$

und nennen ihn ein Integral. Dieses Integral existiert dann und nur dann, wenn es möglich ist, jedem positiven ε ein positives δ entgegenzustellen derart, daß alle Ausdrücke S, deren Teilungsmoduln kleiner als δ sind, um weniger als ε voneinander abweichen.

Wenn es darauf ankommt, die Zugehörigkeit des Ausdrucks S zu dem Intervall (a,b) hervorzuheben, bezeichnen wir ihn mit $S(a,b)$.

1) Die Grenzen des Intervalls werden immer mitgerechnet.

Liegen zwei auf dasselbe Intervall bezügliche S vor, so werden wir das eine S überstreichen. Hiernach ist der Sinn und die Richtigkeit der folgenden Formeln klar, in denen (a', b') ein beliebiges in (a, b) enthaltenes Intervall bedeutet[1]):

$$S(a, a') + S(a', b') + S(b', b) = S(a, b),$$
$$S(a, a') + \bar{S}(a', b') + S(b', b) = \bar{S}(a, b).$$

Durch Subtraktion ergibt sich

$$S(a', b') - \bar{S}(a', b') = S(a, b) - \bar{S}(a, b).$$

Sind nun die Teilungsmoduln alle kleiner als δ, so folgt

$$S(a', b') - \bar{S}(a', b') \,| < \varepsilon.$$

Daraus geht hervor, daß die Existenz des Integrals $\int\limits_a^b \sum F_\nu df_\nu$ die des Integrals $\int\limits_{a'}^{b'} \sum F_\nu df_\nu$ nach sich zieht. Außerdem sieht man, daß jeder Ausdruck $S(a', b')$, dessen Teilungsmodul kleiner als δ ist, von dem Integral $\int\limits_{a'}^{b'} \sum F_\nu df_\nu$ höchstens um ε abweicht, wie man auch (a', b') in (a, b) wählen mag.

$S(x_{\varkappa-1}, x_\varkappa)$ sei ein beliebiger auf $(x_{\varkappa-1}, x_\varkappa)$ bezüglicher Ausdruck S. Dann ist

$$S(x_0, x_1) + S(x_1, x_2) + \ldots + S(x_{q-1}, x_q) = \bar{S}(a, b)$$

ein auf (a, b) bezüglicher Ausdruck S. Neben $\bar{S}(a, b)$ wollen wir jetzt unsern alten Ausdruck

$$S(a, b) = \sum \sum F_\nu(\xi_\varkappa)\,[f_\nu(x_\varkappa) - f_\nu(x_{\varkappa-1})]$$

betrachten. Von den beiden Werten

$$S(x_{\varkappa-1}, x_\varkappa) \text{ und } \sum_{\nu=1}^{\nu=n} F_\nu(\xi_\varkappa)\,[f_\nu(x_\varkappa) - f_\nu(x_{\varkappa-1})]$$

sei $M_\varkappa$ der größere, $m_\varkappa$ der kleinere. Dann sind offenbar auch

$$M_1 + M_2 + \ldots + M_q \text{ und } m_1 + m_2 + \ldots + m_q$$

Ausdrücke S, die sich auf (a, b) beziehen. Ihre Differenz

$$(M_1 - m_1) + (M_2 - m_2) + \ldots + (M_q - m_q),$$

---

1) Wir setzen fest $S(c, c) = 0$ und entsprechend $\int\limits_c^c \Sigma F_\nu df_\nu = 0$ $(a \leq c \leq b)$.

d. h.

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}\left| S(x_{\varkappa-1}, x_\varkappa) - \sum_{\nu=1}^{\nu=n} F_\nu(\xi_\varkappa)[f_\nu(x_\varkappa) - f_\nu(x_{\varkappa-1})]\right|$$

wird kleiner sein als ε, sobald die Teilintervalle $(x_{\varkappa-1}, x_\varkappa)$ alle kleiner sind als δ. Es wird also unter derselben Bedingung auch

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q}\left|\int_{x_{\varkappa-1}}^{x_\varkappa}\sum F_\nu df_\nu - \sum_{\nu=1}^{\nu=n} F_\nu(\xi_\varkappa)[f_\nu(x_\varkappa) - f_\nu(x_{\varkappa-1})]\right| \leqq \varepsilon$$

sein.

§ 2. Beziehung zwischen den Integralen

$$\int_a^b \sum F_\nu df_\nu \text{ und } \int_a^b \sum f_\nu dF_\nu.$$

Wir beweisen jetzt den folgenden Satz:

Wenn eins der beiden Integrale

$$\int_a^b \sum F_\nu df_\nu, \quad \int_a^b \sum f_\nu dF_\nu$$

existiert, so existiert auch das andre, und sie stehen in der Beziehung

$$\int_a^b \sum F_\nu df_\nu + \int_a^b \sum f_\nu dF_\nu = \left(\sum f_\nu F_\nu\right)_a^b.$$

Wir beschränken uns auf den Fall $n = 1$ und setzen $F_1 = F$, $f_1 = f$. Für ein beliebiges n verläuft der Beweis genau ebenso.

Angenommen, es existiere das zweite der beiden Integrale

$$\int_a^b F df, \quad \int_a^b f dF.$$

Wir schreiben

$$\begin{aligned} &F(\xi_\varkappa)[f(x_\varkappa) - f(x_{\varkappa-1})] \\ &= F(\xi_\varkappa)[f(\xi_\varkappa) - f(x_{\varkappa-1})] + F(\xi_\varkappa)[f(x_\varkappa) - f(\xi_\varkappa)] \end{aligned}$$

und beachten, daß

$$F(\xi_\varkappa)[f(\xi_\varkappa) - f(x_{\varkappa-1})] = (fF)_{x_{\varkappa-1}}^{\xi_\varkappa} - f(x_{\varkappa-1})[F(\xi_\varkappa) - F(x_{\varkappa-1})],$$

$$F(\xi_\varkappa)[f(x_\varkappa) - f(\xi_\varkappa)] = (fF)_{\xi_\varkappa}^{x_\varkappa} - f(x_\varkappa)[F(x_\varkappa) - F(\xi_\varkappa)]$$

ist. Dann erweist sich $F(\xi_\varkappa)[f(x_\varkappa) - f(x_{\varkappa-1})]$ gleich

$$(fF)_{x_{\varkappa-1}}^{x_\varkappa} - \{f(x_{\varkappa-1})[F(\xi_\varkappa) - F(x_{\varkappa-1})] + f(x_\varkappa)[F(x_\varkappa) - F(\xi_\varkappa)]\},$$

und der Ausdruck

$$S = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} F(\xi_\varkappa)\,[f(x_\varkappa) - f(x_{\varkappa-1})]$$

läßt sich so schreiben:

$$S = (fF)_b^a \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \{f(x_{\varkappa-1})\,[F(\xi_\varkappa) - F(x_{\varkappa-1})] + f(x_\varkappa)\,[F(x_\varkappa) - F(\xi_\varkappa)]\}.$$

Wendet man dieses Resultat auf eine Folge $S_1, S_2, S_3, \ldots$ mit nach Null konvergierendem Teilungsmodul an, so ergibt sich der zu beweisende Satz.

§ 3. Das Integral $\int\limits_a^b \varphi\, d\left(\int\limits_a^x \sum F_\nu df_\nu\right)$.

$\varphi(x)$ sei eine reelle Funktion, die in (a, b) zwischen endlichen Grenzen bleibt, und es existiere das Integral $\int\limits_a^b \sum F_\nu df_\nu$. Wenn dann eins[1]) *der beiden Integrale*

$$\int\limits_a^b \varphi\, d\left(\int\limits_a^x \sum F_\nu df_\nu\right), \quad \int\limits_a^b \sum \varphi F_\nu df_\nu$$

existiert, so existiert auch das andere, und sie sind beide gleich.

Um diesen Satz zu beweisen, betrachten wir die Differenz

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \varphi(\xi_\varkappa) \int\limits_{x_{\varkappa-1}}^{x_\varkappa} \sum F_\nu df_\nu - \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \varphi(\xi_\varkappa)\, F_\nu(\xi_\varkappa)\,[f_\nu(x_\varkappa) - f_\nu(x_{\varkappa-1})]$$

$$= \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \varphi(\xi_\varkappa) \left\{ \int\limits_{x_{\varkappa-1}}^{x_\varkappa} \sum F_\nu df_\nu - \sum_{\nu=1}^{\nu=n} F_\nu(\xi_\varkappa)\,[f_\nu(x_\varkappa) - f_\nu(x_{\varkappa-1})] \right\}.$$

Ist beständig $|\varphi(x)| < K$, so kann ihr Betrag nicht größer sein, als

$$K \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \left| \int\limits_{x_{\varkappa-1}}^{x_\varkappa} \sum F_\nu df_\nu - \sum_{\nu=1}^{\nu=n} F_\nu(\xi_\varkappa)\,[f_\nu(x_\varkappa) - f_\nu(x_{\varkappa-1})] \right|.$$

Sobald aber die Intervalle $(x_{\varkappa-1}, x_\varkappa)$ alle kleiner sind als δ, ist die obige Größe (vgl. den Schluß von § 1) kleiner oder gleich $K\varepsilon$. Nehmen wir also an, daß eins von den beiden Integralen

$$\int\limits_a^b \varphi\, d\left(\int\limits_a^x \sum F_\nu df_\nu\right), \quad \int\limits_a^b \sum \varphi F_\nu df_\nu$$

existiert, so muß auch das andre existieren und jenem gleich sein.

---

1) Es kann natürlich vorkommen, daß keins der beiden Integrale existiert. Beispiel: $n = 1$, $F_1 = 1$, $f_1 = x$, $\varphi(x)$ nichtintegrierbar im Riemannschen Sinne, aber doch zwischen endlichen Grenzen liegend.

Durch ein Beispiel überzeugt man sich, daß die der Funktion $\varphi(x)$ auferlegte Bedingung notwendig ist. Setzen wir $n = 1$ und[1])

$$\varphi(x) = \frac{1}{x}, \quad F_1 = x, \quad f_1 = x,$$

so existieren die Integrale

$$\int_0^1 \varphi F_1 df_1 = \int_0^1 dx \quad \text{und} \quad \int_0^1 F_1 df_1 = \int_0^1 x dx.$$

Dagegen existiert das Integral

$$\int_0^1 \varphi d\left(\int_0^x F_1 df_1\right) = \tfrac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x}\, d(x^2)$$

nicht.

Wenn $\varphi(x)$ in (a, b) monoton und $\int_a^x \sum F_\nu df_\nu$ in (a, b) stetig ist, so existiert das Integral

$$\int_a^b \varphi d\left(\int_b^x \sum F_\nu df_\nu\right).$$

Wir dürfen also behaupten, daß auch

$$\int_a^b \sum \varphi F_\nu df_\nu$$

existiert, und daß

$$\int_a^b \sum \varphi F_\nu df_\nu = \int_a^b \varphi d\left(\int_a^x \sum F_\nu df_\nu\right)$$

ist.

Man kann die Ergebnisse dieses Paragraphen noch verallgemeinern. Statt der F_ν nehmen wir $m \cdot n$ Funktionen $F_{\mu\nu}$, ebenso statt der f_ν die $m \cdot n$ Funktionen $f_{\mu\nu}$ und statt φ die m Funktionen φ_μ. Wir setzen voraus, daß die φ_μ in (a, b) zwischen endlichen Grenzen bleiben und daß die Integrale

$$\int_a^b \sum^{\nu} F_{\mu\nu} df_{\mu\nu} \qquad (\mu = 1, \ldots, m)$$

existieren. Dann läßt sich (genau so wie im Falle $m = 1$) zeigen, daß, wenn eins der beiden Integrale

$$\int_a^b \sum^{\mu} \varphi_\mu d\left(\int_a^x \sum^{\nu} F_{\mu\nu}\, df_{\mu\nu}\right), \quad \int_a^b \sum^{\mu} \sum^{\nu} \varphi_\mu F_{\mu\nu} df_{\mu\nu}$$

existiert, auch das andre existiert und ihm gleich ist.

---

1) $\varphi(0)$ habe irgend einen bestimmten Wert.

§ 4. Verallgemeinerung der partiellen Integration.

Wir nehmen jetzt an, daß $\varphi(x)$ in (a,b) zwischen endlichen Grenzen bleibt und daß die Integrale

$$\int_a^b \sum F_\nu df_\nu, \quad \int_a^b \sum \varphi F_\nu df_\nu$$

existieren. Dann ist nach § 3

$$\int_a^b \sum \varphi F_\nu df_\nu = \int_a^b \varphi d\left(\int_a^x \sum F_\nu df_\nu\right).$$

Nach der in § 2 bewiesenen Formel hat man aber

$$\int_a^b \varphi d\left(\int_a^x \sum F_\nu df_\nu\right) = \varphi(b)\int_a^b \sum F_\nu df_\nu - \int_a^b \left(\int_a^x \sum F_\nu df_\nu\right) d\varphi.$$

Mithin ist

$$(1) \qquad \int_a^b \sum \varphi F_\nu df_\nu = \varphi(b)\int_a^b \sum F_\nu df_\nu - \int_a^b \left(\int_a^x \sum F_\nu df_\nu\right) d\varphi$$

oder, unter C eine Konstante verstanden,

$$(\mathrm{I}) \quad \int_a^b \sum \varphi F_\nu df_\nu = \left(\varphi \cdot \left(C + \int_a^x \sum F_\nu df_\nu\right)\right)_a^b - \int_a^b \left(C + \int_a^x \sum F_\nu df_\nu\right) d\varphi.$$

Das ist eine Verallgemeinerung der partiellen Integration.

Wenn $\varphi(b) - \varphi(a) \neq 0$ ist, so läßt sich (1), nachdem man das erste Glied rechts mit

$$1 = \frac{1}{\varphi(b) - \varphi(a)} \int_a^b d\varphi$$

multipliziert hat, in folgender Weise schreiben:

$$(2) \int_a^b \sum \varphi F_\nu df_\nu = \frac{1}{\varphi(b) - \varphi(a)} \int_a^b \left(\varphi(a) \int_a^x \sum F_\nu df_\nu + \varphi(b) \int_x^b \sum F_\nu df_\nu\right) d\varphi.$$

Nehmen wir an, daß die $\varphi_\mu(x)$ in (a,b) zwischen endlichen Grenzen bleiben und daß die $m+1$ Integrale

$$\int_a^b \sum^\nu F_{\mu\nu} df_{\mu\nu}, \quad \int_a^b \sum^\mu \sum^\nu \varphi_\mu F_{\mu\nu} df_{\mu\nu}$$

existieren. Dann haben wir

$$\int_a^b \sum^\mu \sum^\nu \varphi_\mu F_{\mu\nu} df_{\mu\nu} = \int_a^b \sum^\mu \varphi_\mu d\left(\int_a^x \sum^\nu F_{\mu\nu} df_{\mu\nu}\right).$$

Da nun nach § 2

$$\int_a^b \sum^\mu \varphi_\mu d\Big(\int_a^x \sum^\nu F_{\mu\nu} df_{\mu\nu}\Big)$$

$$= \sum^\mu \varphi_\mu(b) \int_a^b \sum^\nu F_{\mu\nu} df_{\mu\nu} - \int_a^b \sum^\mu \Big(\int_a^x \sum^\nu F_{\mu\nu} df_{\mu\nu}\Big) d\varphi_\mu$$

ist, so ergibt sich

$$(1^*) \qquad \int_a^b \sum^\mu \sum^\nu \varphi_\mu F_{\mu\nu} df_{\mu\nu} = \sum^\mu \varphi_\mu(b) \int_a^b \sum^\nu F_{\mu\nu} df_{\mu\nu} - \int_a^b \sum^\mu \Big(\int_a^x \sum^\nu F_{\mu\nu} df_{\mu\nu}\Big) d\varphi_\mu$$

oder allgemeiner

$$(\mathrm{I}^*) \qquad \int_a^b \sum^\mu \sum^\nu \varphi_\mu F_{\mu\nu} df_{\mu\nu} = \Big(\sum^\mu \varphi_\mu \Big(C_\mu + \int_a^x \sum^\nu F_{\mu\nu} df_{\mu\nu}\Big)\Big)_a^b - \int_a^b \sum^\mu \Big(C_\mu + \int_a^x \sum^\nu F_{\mu\nu} df_{\mu\nu}\Big) d\varphi_\mu.$$

Dabei sind die C_μ willkürliche Konstanten.

§ 5. Folgerungen.

$\varphi(x)$ sei in (a, b) monoton und $\int_a^x \sum F_\nu df_\nu$ in (a, b) stetig. Dann gilt (wenn wir von dem trivialen Fall eines konstanten $\varphi(x)$ absehen) die Formel (2), und aus ihr folgt sofort

$$(3) \qquad \int_a^b \sum \varphi F_\nu df_\nu = \varphi(a) \int_a^\xi \sum F_\nu df_\nu + \varphi(b) \int_\xi^b \sum F_\nu df_\nu.$$

$$(a \leqq \xi \leqq b)$$

Man kann dieses Resultat noch etwas allgemeiner fassen. Ersetzt man nämlich die Funktionswerte $\varphi(a)$ und $\varphi(b)$ durch A bezw. B, so bleibt, weil wir $\int_a^x \sum F_\nu df_\nu$ als stetig vorausgesetzt haben, das Integral auf der linken Seite von (3) ungeändert. Richten wir es so ein, daß $\varphi(x)$ bei jener Modifikation der Werte $\varphi(a)$, $\varphi(b)$ monoton bleibt, so gilt nach wie vor die Formel (3). Es wird sich höchstens ξ geändert haben. Wir dürfen also schreiben:

$$(3') \qquad \int_a^b \sum \varphi F_\nu df_\nu = A \int_a^\xi \sum F_\nu df_\nu + B \int_\xi^b \sum F_\nu df_\nu.$$

$$(a \leqq \xi \leqq b)$$

Die Funktionen
$$F_{\mu\nu}(x),\ f_{\mu\nu}(x) \qquad (\mu = 1, \ldots, m;\ \nu = 1, \ldots, n)$$
seien so beschaffen, daß die Integrale
$$\int_a^x \sum_\nu F_{\mu\nu}\,df_{\mu\nu} \qquad (\mu = 1, \ldots, m)$$
in (a, b) stetig sind. $\varphi(x)$ sei nach wie vor in (a, b) monoton (aber nicht konstant). Dann haben wir für $\mu = 1, \ldots, m$
$$(4) \qquad \int_a^b \sum_\nu \varphi F_{\mu\nu}\,df_{\mu\nu} = \frac{1}{\varphi(b) - \varphi(a)} \int_a^b \left\{ \varphi(a) \int_a^x \sum_\nu F_{\mu\nu}\,df_{\mu\nu} \right.$$
$$\left. + \varphi(b) \int_x^b \sum_\nu F_{\mu\nu}\,df_{\mu\nu} \right\} d\varphi.$$

Werden die m Werte
$$\varphi(a) \int_a^x \sum_\nu F_{\mu\nu}\,df_{\mu\nu} + \varphi(b) \int_x^b \sum_\nu F_{\mu\nu}\,df_{\mu\nu} \qquad (\mu = 1, \ldots, m)$$
als cartesische Koordinaten eines Punktes in einem m-dimensionalen Raum betrachtet, so entsteht, wenn x das Intervall (a, b) durchläuft, in diesem Raum ein stetiger Kurvenbogen. Auf Grund der Formeln (4) dürfen wir nun behaupten, *daß der Punkt mit den Koordinaten*
$$\int_a^b \sum_\nu \varphi F_{\mu\nu}\,df_{\mu\nu} \qquad (\mu = 1, \ldots, m)$$
in jedem Eigebiet liegt, welches jenen Kurvenbogen enthält. Das ist eine Verallgemeinerung des zweiten Mittelwertsatzes.[1])

§ 6. Die Formel I für komplexe Funktionen.

$F_\nu(x)$, $G_\nu(x)$ und $f_\nu(x)$, $g_\nu(x)$ seien reelle Funktionen $(\nu = 1, \ldots, n)$. $\varphi(x)$ sei ebenfalls reell und bleibe in (a, b) zwischen endlichen Grenzen. Wir betrachten die komplexen Funktionen
$$\mathfrak{F}_\nu(x) = F_\nu(x) + iG_\nu(x), \quad \mathfrak{f}_\nu(x) = f_\nu(x) + ig_\nu(x).$$

Das Integral
$$\int_a^b \sum \mathfrak{F}_\nu\,d\mathfrak{f}_\nu$$

1) Vgl. meine Note in Bd. XIV dieses Jahresberichts, wo ein spezieller Fall dieser Verallgemeinerung behandelt wird. Mit einem andern Spezialfall beschäftigt sich Herr Brunn in seiner interessanten Studie „über die Beziehungen des Dubois-Reymondschen Mittelwertsatzes zur Ovaltheorie" (Berlin, Georg Reimer, 1905).

definieren wir durch die Gleichung

$$\int_a^b \sum \mathfrak{F}_\nu d\mathfrak{f}_\nu = \int_a^b \sum (F_\nu df_\nu - G_\nu dg_\nu) + i\int_a^b \sum (F_\nu dg_\nu + G_\nu df_\nu).$$

Es existiert also dann und nur dann, wenn die beiden Integrale rechts existieren.

Wir wollen nun annehmen, daß die Integrale

$$\int_a^b \sum \mathfrak{F}_\nu d\mathfrak{f}_\nu \quad \text{und} \quad \int_a^b \sum \varphi \mathfrak{F}_\nu d\mathfrak{f}_\nu$$

existieren. Da nach Formel (1)

$$\int_a^b \sum \varphi (F_\nu df_\nu - G_\nu dg_\nu) = \varphi(b) \int_a^b \sum (F_\nu df_\nu - G_\nu dg_\nu)$$
$$- \int_a^b \left\{ \int_a^x \sum (F_\nu df_\nu - G_\nu dg_\nu) \right\} d\varphi$$

und

$$\int_a^b \sum \varphi (F_\nu dg_\nu + G_\nu df_\nu) = \varphi(b) \int_a^b \sum (F_\nu dg_\nu + G_\nu df_\nu)$$
$$- \int_a^b \left\{ \int_a^x \sum (F_\nu dg + G_\nu df_\nu) \right\} d\varphi$$

ist, so folgt

$$(1') \qquad \int_a^b \sum \varphi \mathfrak{F}_\nu d\mathfrak{f}_\nu = \varphi(b) \int_a^b \sum \mathfrak{F}_\nu d\mathfrak{f}_\nu - \int_a^b \left(\int_a^x \sum \mathfrak{F}_\nu d\mathfrak{f}_\nu \right) d\varphi.$$

Allgemeiner hat man, wenn $\mathfrak{C}$ eine komplexe Konstante bedeutet,

$$(\mathrm{I}') \quad \int_a^b \sum \varphi \mathfrak{F}_\nu d\mathfrak{f}_\nu = \left(\varphi \cdot \left(\mathfrak{C} + \int_a^x \sum \mathfrak{F}_\nu d\mathfrak{f}_\nu \right) \right)_a^b - \int_a^b \left(\mathfrak{C} + \int_a^x \sum \mathfrak{F}_\nu d\mathfrak{f}_\nu \right) d\varphi.$$

Man kann sich auch von der Voraussetzung befreien, daß $\varphi(x)$ reell ist. Es gilt nämlich, wie sich mit Hilfe von (1*) beweisen läßt, der folgende Satz:

Wenn die komplexen Funktionen $\mathfrak{w}(x)$, $\mathfrak{F}_\nu(x)$, $\mathfrak{f}_\nu(x)$ *so beschaffen sind* ($\nu = 1, \ldots, n$), *daß die Integrale*

$$\int_a^b \sum \mathfrak{F}_\nu d\mathfrak{f}_\nu \quad \text{und} \quad \int_a^b \sum \mathfrak{w} \mathfrak{F}_\nu d\mathfrak{f}_\nu$$

existieren und wenn außerdem der Betrag von $\mathfrak{w}(x)$ *zwischen endlichen Grenzen liegt, so besteht die Gleichung*

$$(\mathrm{I}) \quad \int_a^b \sum \mathfrak{w} \mathfrak{F}_\nu d\mathfrak{f}_\nu = \left(\mathfrak{w} \cdot \left(\mathfrak{C} + \int_a^x \sum \mathfrak{F}_\nu d\mathfrak{f}_\nu \right) \right)_a^b - \int_a^b \left(\mathfrak{C} + \int_a^x \sum \mathfrak{F}_\nu d\mathfrak{f}_\nu \right) d\mathfrak{w}.$$

Das ist die Formel (I), ausgedehnt auf lauter komplexe Funktionen.
(1′) kann man, wenn $\varphi(b) - \varphi(a) \neq 0$ ist, so schreiben:

$$(2')\quad \int_a^b \sum \varphi \mathfrak{F}_\nu d\mathfrak{f}_\nu = \frac{1}{\varphi(b) - \varphi(a)} \int_a^b \left(\varphi(a) \int_a^x \sum \mathfrak{F}_\nu d\mathfrak{f}_\nu + \varphi(b) \int_x^b \sum \mathfrak{F}_\nu d\mathfrak{f}_\nu \right) d\varphi.$$

Ist $\varphi(x)$ monoton (aber nicht konstant), so liegt der durch die komplexe Zahl

$$\int_a^b \sum \varphi \mathfrak{F}_\nu d\mathfrak{f}_\nu$$

charakterisierte Punkt in jedem Eigebiet, welches die Punkte

$$(4)\qquad \varphi(a) \int_a^x \sum \mathfrak{F}_\nu d\mathfrak{f}_\nu + \varphi(b) \int_x^b \sum \mathfrak{F}_\nu d\mathfrak{f}_\nu$$

enthält. Für den Fall, daß $\int_a^x \sum \mathfrak{F}_\nu d\mathfrak{f}_\nu$ stetig ist[1]), bilden die Sehnen des Kurvenbogens (4) ein solches Eigebiet[2]), und wir können daher schreiben:

$$\int_a^b \sum \varphi \mathfrak{F}_\nu d\mathfrak{f}_\nu = \begin{cases} \lambda_1 \left[\varphi(a) \int_a^{x_1} \sum \mathfrak{F}_\nu d\mathfrak{f}_\nu + \varphi(b) \int_{x_1}^b \sum \mathfrak{F}_\nu d\mathfrak{f}_\nu \right] \\ + \lambda_2 \left[\varphi(a) \int_a^{x_2} \sum \mathfrak{F}_\nu d\mathfrak{f}_\nu + \varphi(b) \int_{x_2}^b \sum \mathfrak{F}_\nu d\mathfrak{f}_\nu \right] \end{cases}$$

Dabei ist

$$a \leqq x_1,\ x_2 \leqq b;\ \lambda_1, \lambda_2 \geqq 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1,$$

und die Formel gilt immer, sobald $\varphi(x)$ monoton und $\int_a^x \sum \mathfrak{F}_\nu d\mathfrak{f}_\nu$ stetig ist.[3]) Man darf auch hier wieder auf der rechten Seite $\varphi(a)$, $\varphi(b)$ durch A, B ersetzen, wenn bei dieser Ersetzung $\varphi(x)$ monoton bleibt. Herr Brunn gibt in seiner oben zitierten Studie unsere Formel nicht in dieser einfachen Gestalt.

---

1) Dann haben wir einen Spezialfall des am Schluß von § 5 aufgestellten allgemeinen Satzes.

2) Einen Beweis dieses Satzes findet man in meiner Note in Bd. 117 des Crelleschen Journals, sowie in meiner Arbeit in Bd. XIV dieses Jahresberichts. Auch Herr Brunn hat einen Beweis geliefert.

3) Dann existiert auch das Integral auf der linken Seite unserer Formel.

Über die Grundlagen der Geometrie.

Von G. Frege in Jena.

(Schluß.)

III.

Nun kann noch die Frage aufgeworfen werden, ob man nicht von dem Hilbertschen Ergebnisse aus zum Nachweise der Unabhängigkeit der eigentlichen Axiome gelangen kann.

Zunächst wird zu fragen sein, was hierbei unter Unabhängigkeit zu verstehen sei; denn das, was bei den uneigentlichen Sätzen Unabhängigkeit, wenn auch ungenau, genannt wird, kann hier nicht in Betracht kommen. Nehmen wir in dem Hilbertschen sogenannten Axiome II 1 die Wörter „Punkt“ und „Gerade“ im eigentlichen Euklidischen Sinne und dem entsprechend auch die Wörter „liegen“ und „zwischen“, so erhalten wir einen sinnvollen Satz, und den in ihm ausgedrückten Gedanken können wir als eigentliches Axiom anerkennen. Bezeichnen wir ihn durch „[II 1]“! Ebenso gehe [II 2] hervor aus dem Hilbertschen II 2. Wenn man nun [II 1] als wahr anerkannt hat, so hat man den Sinn der Wörter „Punkt“ „Gerade“ „liegen zwischen“ erfaßt, und aus diesem fließt unmittelbar die Wahrheit von [II 2], sodaß man sich auch deren Anerkennung nicht wird entziehen können. So könnte man [II 2] abhängig von [II 1] nennen. Freilich haben wir hier keinen Schluß; und es scheint nicht zweckmäßig, das Wort „abhängig“ so zu gebrauchen, wiewohl es sprachlich möglich sein dürfte.

Was ich unter Abhängigkeit im Gebiete der Gedanken verstehe, mag aus Folgendem erhellen. Ich sage hier „Gedanke“ statt „Satz“, da vom Satze doch nur sein Gedankeninhalt in Betracht kommt und da ein solcher bei eigentlichen Sätzen — und nur von solchen sprechen wir jetzt — immer vorhanden ist. Was ich eine Gruppe von Gedanken nenne, wird man daraus erkennen, daß ich sage: der sprachliche Ausdruck einer Gruppe von Gedanken besteht aus eigentlichen durch „und“ verbundenen Sätzen. Man kann eine Gruppe von Gedanken als einen Gedanken auffassen, der aus Gedanken zusammengesetzt ist.

Es sei nun Ω eine Gruppe von wahren Gedanken. Aus einem oder einigen Gedanken dieser Gruppe möge durch einen logischen Schluß ein Gedanke G folgen, sodaß dabei außer logischen Gesetzen kein nicht zur Gruppe Ω gehörender Satz gebraucht wird. Wir bilden nun eine neue Gruppe von Gedanken, indem wir der Gruppe Ω den

Gedanken G hinzufügen. Was wir so getan haben, mag ein logischer Schritt heißen. Wenn wir nun durch eine Folge von solchen Schritten, bei der jeder Schritt das Ergebnis des vorangehenden zum Ausgang nimmt, eine Gruppe von Gedanken erreichen können, die den Gedanken A enthält, so nennen wir A abhängig von der Gruppe Ω. Wenn dies nicht möglich ist, so nennen wir A unabhängig von Ω. Dies wird immer stattfinden, wenn A falsch ist.

Herr Hilbert wirft im § 10 seiner Grundlagen der Geometrie die Frage auf, ob die Axiome voneinander unabhängig seien, und fährt dann fort:

„In der Tat zeigt sich, daß keines der Axiome durch logische Schlüsse aus den übrigen abgeleitet werden kann." Hiernach scheint er das Wort „unabhängig" ebenso zu gebrauchen, wie oben festgesetzt worden ist; aber es scheint auch wohl nur so; denn bei uns handelt es sich um Gedanken; Herrn Hilberts Axiome aber sind uneigentliche Sätze, die also keine Gedanken ausdrücken. Dies ersieht man daraus, daß nach Herrn Hilbert ein Axiom bald gilt, bald nicht gilt. Ein eigentlicher Satz aber drückt einen Gedanken aus, und dieser ist entweder wahr, oder falsch; tertium non datur.[1]) Ein falsches Axiom — das Wort „Axiom" im eigentlichen Sinne verstanden — ist wert, neben einem schiefen rechten Winkel in Kastans Panoptikum ausgestellt zu werden. Übrigens schwankt wohl Herrn Hilberts Sprachgebrauch. Wenn etwas bald diesen, bald jenen Gedanken ausdrücken soll, so drückt es in Wahrheit keinen Gedanken aus. Der Art sind die Hilbertschen Pseudoaxiome. Sie sind Gruppen von Lauten oder von geschriebenen Zeichen, die Gedanken ausdrücken zu sollen scheinen, ohne es jedoch zu tun. Nun ist klar, daß solche Gruppen nicht Prämissen von Schlüssen sein können; denn das Schließen ist nicht ein Wirken im Gebiete des Sinnlichen. Selbst eigentliche Sätze können also — genau genommen — nicht Prämissen von Schlüssen sein, sondern nur etwa die von ihnen ausgedrückten Gedanken. Aus Hilbertschen Pseudoaxiomen durch logische Schlüsse etwas abzuleiten, ist ebenso gut möglich, wie durch Kopfrechnen ein Gartenbeet umzugraben. Hier wird also Herr Hilbert das Wort „Axiom" anders als sonst gebrauchen. Bei diesem Schwanken seiner Redeweise ist nicht zu erkennen, wie er das Wort „abhängig" versteht. Wahrscheinlich weiß er es selbst ebenso wenig, wie er weiß, was er unter „Axiom" versteht.

Zur Erläuterung meiner Erklärung mögen einige Bemerkungen hier folgen.

---

1) Vergl. Anm. 1 auf S. 398.

Indem wir einen logischen Schritt von der Gedankengruppe Ω aus machen, wenden wir ein logisches Gesetz an. Dieses ist nicht zu den Prämissen zu rechnen, braucht also in Ω nicht vorzukommen. Es gibt also gewisse Gedanken, nämlich die logischen Gesetze, die bei der Frage nach der Abhängigkeit eines Gedankens nicht mitzurechnen sind.

Nur wahre Gedanken können Prämissen von Schlüssen sein. Wenn also ein Gedanke abhängig von einer Gedankengruppe Ω ist, so müssen alle Gedanken in Ω wahr sein, die bei den Beweise gebraucht werden. Aber wendet man vielleicht ein, man kann doch rein hypothetisch aus gewissen Gedanken, ohne über deren Wahrheit zu urteilen, Folgerungen entwickeln. Gewiß, rein hypothetisch! Aber die fraglichen Gedanken sind nun nicht Prämissen von Schlüssen. Prämissen sind vielmehr gewisse hypothetische Gedanken, die jene fraglichen Gedanken als Bedingungen enthalten. Auch im Endergebnisse müssen jene fraglichen Gedanken als Bedingungen vorkommen; und daraus folgt, daß sie nicht als Prämissen gebraucht worden sind; denn dann wären sie im Endergebnisse verschwunden. Hat man sie weggelassen, so hat man eben einen Fehler gemacht. Erst nachdem einer dieser fraglichen Gedanken als wahr anerkannt worden ist, darf man ihn als Bedingung weglassen. Das geschieht durch einen Schluß, zu dessen Praemissen der nunmehr als wahr anerkannte Gedanke gehört.

Der Fall ist nicht von vorneherein auszuschließen, daß jeder Gedanke der Gruppe Ω' abhängig ist von der Gruppe Ω, während zugleich jeder Gedanke der Gruppe Ω abhängig ist von Ω'. Daraus also, daß alle Gedanken der Gruppe Ω' abhängig sind von Ω, darf nicht ohne weiteres geschlossen werden, daß die Gedanken der Gruppe Ω unabhängig seien von Ω'.

Auch der Fall ist nicht von vorneherein auszuschließen, daß ein Gedanke A abhängig ist sowohl von einer Gruppe Ω, als auch von einer Gruppe Ω_1, wobei weder ein Gedanke der Gruppe Ω abhängig ist von Ω_1, noch ein Gedanke der Gruppe Ω_1 abhängig ist von Ω. Man kann also in diesem Falle A aus der Gruppe Ω_1 beweisen, ohne die Gedanken der Gruppe Ω auch nur zu kennen. Trotzdem dürfte man A nicht unabhängig von der Gruppe Ω nennen.

Wir kommen nun auf unsere Frage zurück: Ist es möglich, die Unabhängigkeit eines eigentlichen Axioms von einer Gruppe eigentlicher Axiome zu beweisen? Das führt auf die andere Frage: Wie kann man die Unabhängigkeit eines Gedankens von einer Gruppe von Gedanken beweisen? Zunächst mag bemerkt werden, daß wir uns mit dieser Frage auf ein Gebiet begeben, das der Mathematik sonst fremd ist. Denn wenn sich auch die Mathematik wie alle Wissenschaften in

Gedanken vollzieht, so sind doch sonst Gedanken nicht Gegenstände ihrer Betrachtung. Auch die Unabhängigkeit eines Gedankens von einer Gruppe von Gedanken ist ganz verschieden von den Beziehungen, die sonst in der Mathematik untersucht werden. Wir dürfen nun vermuten, daß dies neue Gebiet seine ihm eigentümlichen Grundwahrheiten hat, die zu den in ihm zu führenden Beweisen so notwendig sind wie die geometrischen Axiome für die Beweise der Geometrie, und daß wir solcher Grundwahrheiten auch insbesondere bedürfen, um die Unabhängigkeit eines Gedankens von einer Gruppe von Gedanken zu beweisen.

Um solche Gesetze aufzustellen, erinnern wir uns daran, daß unsere Definition die Abhängigkeit von Gedanken auf das Folgen eines Gedankens durch einen Schluß aus andern Gedanken zurückführt. Dies ist so zu verstehen, daß diese andern Gedanken als Prämissen des Schlusses sämtlich gebraucht werden, und daß außer logischen Gesetzen sonst kein Gedanke gebraucht wird. Grundwahrheiten unseres neuen Gebietes, welche wir hier brauchen, werden sich in Sätzen dieser Form aussprechen:

„Wenn das und das ist, so folgt der Gedanke G nicht durch einen logischen Schluß aus den Gedanken A, B, C.

Dafür können wir auch die Form annehmen:

„Wenn der Gedanke G durch einen logischen Schluß aus den Gedanken A, B, C folgt, so ist das und das."

In der Tat lassen sich solche Gesetze aufstellen, z. B.:

„Wenn der Gedanke G durch einen logischen Schluß aus den Gedanken A, B, C folgt, so ist G wahr."

Ferner:

„Wenn der Gedanke G durch einen logischen Schluß aus den Gedanken A, B, C folgt, so ist jeder der Gedanken A, B, C wahr."

Wir haben ja gesehen, daß nur wahre Gedanken Prämissen von Schlüssen sein können. Aber mit diesen Grundwahrheiten allein ist unser Ziel nicht zu erreichen. Wir bedürfen dazu noch eines Gesetzes, das nicht so leicht auszusprechen ist. Ich will darum, da eine endgültige Erledigung der Frage hier doch nicht möglich ist, auf eine genaue Formulierung dieses Gesetzes verzichten und nur ungefähr verständlich zu machen suchen, was ich im Sinne habe. Man könnte es einen Ausfluß der formalen Natur der logischen Gesetze nennen.

Man denke sich ein Vokabular, in dem aber nicht die Wörter einer Sprache den entsprechenden einer andern gegenübergestellt sind, sondern in dem auf beiden Seiten Wörter derselben Sprache stehen von verschiedenem Sinne; aber so, daß Eigennamen wieder Eigen-

namen, Begriffswörtern wieder Begriffswörter gegenübergestellt sind, und zwar mit der Beibehaltung der Stufe[1]), so daß den Wörtern für Begriffe erster Stufe links wieder ebensolche rechts entsprechen. Desgleichen für die zweite Stufe. Auch für Beziehungswörter mag Ähnliches gelten. Im allgemeinen können wir sagen: Wörter gleicher grammatischer Funktion sollen einander gegenüberstehen. Jedes der links vorkommenden Wörter hat seinen bestimmten Sinn — das nehmen wir wenigstens an — und ebenfalls jedes rechts vorkommende. Durch diese Gegenüberstellung ist nun auch der Sinn der Wörter links dem Sinne der Wörter rechts zugeordnet, und diese Zuordnung sei beiderseits eindeutig, so daß weder links dasselbe doppelt ausgedrückt vorkommt, noch rechts. Wir können nun übersetzen, aber nicht aus einer Sprache in eine andere unter Festhaltung des Sinnes, sondern in dieselbe Sprache, wobei der Sinn sich ändert. Nun kann man fragen, ob aus einem Satze links bei der Übersetzung wieder ein Satz rechts hervorgehe. Da ein eigentlicher Satz einen Gedanken ausdrücken muß, so wird dazu nötig sein, daß einem Gedanken links wieder ein Gedanke rechts entspreche. Legen wir eine unserer gesprochenen Sprachen zugrunde, so ist dies freilich zweifelhaft. Wir wollen hier aber eine logisch vollkommene Sprache voraussetzen. Dann wird in der Tat jedem links ausgedrückten Gedanken ein rechts ausgedrückter entsprechen. Wenn man dies auch bezweifelt, wird man doch zugeben, daß es in einigen Fällen so sein kann. Nun mögen links die Prämissen eines Schlusses ausgedrückt sein; wir fragen, ob die ihnen rechts entsprechenden Gedanken die Prämissen eines Schlusses derselben Art seien, und ob der dem Schlußsatze links entsprechende Satz der zugehörende Schlußsatz rechts sei. Jedenfalls müssen die rechts ausgedrückten Gedanken wahr sein, um Prämissen sein zu können. Nehmen wir an, diese Bedingung sei erfüllt. Nun kann man versucht sein, unsere Frage zu bejahen, mit Berufung auf die formale Natur der logischen Gesetze, der zufolge jeder Gegenstand für die Logik so gut wie jeder andere, jeder Begriff

1) Über Begriffe erster und zweiter Stufe habe ich gehandelt in meinen Grundgesetzen der Arithmetik I §§ 21 u. 22 (Jena, 1893). Hier beschränke ich mich auf Folgendes. Bekannt ist die Subsumtion eines Gegenstandes unter einen Begriff (Plato ist ein Mensch, Zwei ist eine Primzahl). Hierbei haben wir nur Begriffe erster Stufe. In einer ähnlichen Beziehung, wie hier Gegenstände zu Begriffen erster Stufe stehen, können Begriffe erster Stufe zu Begriffen zweiter Stufe stehen. Hierbei ist aber nicht an Unterordnung zu denken; denn bei dieser sind beide Begriffe von derselben Stufe. Man nehme den Satz „Es gibt eine Primzahl". Hier sehen wir den Begriff erster Stufe *Primzahl* zu einem Begriffe zweiter Stufe in einer ähnlichen Beziehung stehen, wie die ist, in der Zwei zu dem Begriffe *Primzahl* steht.

erster Stufe so gut wie jeder andere sei und mit ihm vertauscht werden könne usw. Aber dies wäre voreilig; denn uneingeschränkt formal, wie hierbei vorausgesetzt wird, ist die Logik garnicht. Wäre sie es, so wäre sie inhaltlos. Wie der Geometrie der Begriff *Punkt* angehört, so hat auch die Logik ihre eigenen Begriffe und Beziehungen, und nur dadurch kann sie einen Inhalt haben. Diesem ihrem Eigenen gegenüber verhält sie sich nicht formal. Keine Wissenschaft ist ganz formal; aber in einem gewissen Grade ist auch die Gravitationsmechanik formal, insofern alle optischen und chemischen Eigenschaften ihr ganz gleichgültig sind. Körper von verschiedenen Massen sind für sie nicht vertauschbar; aber die Verschiedenheit der Körper in chemischen Eigenschaften steht ihrer Vertauschung in der Gravitationsmechanik nicht im Wege. Der Logik gehören z. B. an, die Verneinung, die Identität, die Subsumtion, die Unterordnung von Begriffen. Und hierbei duldet die Logik keine Vertauschung. Man wird in einem Schlusse zwar Karl den Großen durch Sahara, den Begriff *König* durch *Wüste* ersetzen können, sofern die Wahrheit der Prämissen dadurch nicht aufgehoben wird; aber man wird so die Beziehung der Identität nicht durch das Liegen eines Punktes in einer Ebene ersetzen dürfen. Denn von der Identität gelten logische Gesetze, die als solche nicht unter den Prämissen aufgezählt zu werden brauchen, und diesen würde auf der andern Seite nichts entsprechen. So könnte dort eine Lücke im Beweise entstehen. Bildlich kann man es so ausdrücken: von dem ihr Fremden weiß die Logik nur, was in den Prämissen vorkommt, von ihrem Eigenen weiß sie alles. Um demnach sicher zu sein, daß bei unserm Übersetzen einem richtigen Schlusse links wieder ein richtiger Schluß rechts entspreche, muß man dafür sorgen, daß im Vokabular den etwa links vorkommenden Wörtern und Ausdrücken, deren Bedeutungen der Logik angehören, gleichlautende rechts gegenüberstehen. Nehmen wir an, das Vokabular genüge dieser Bedingung; dann wird nicht nur einem Schlusse wieder ein Schluß, sondern auch einer ganzen Schlußkette, einem Beweise links wieder eine Schlußkette, ein Beweis rechts entsprechen, vorausgesetzt immer, daß die Ausgangssätze rechts gelten ebenso wie links.

Es handele sich nun darum, ob ein Gedanke G von einer Gruppe Ω von Gedanken abhängig sei. Wir können diese Frage verneinen, wenn mittels unseres Vokabulars den Gedanken der Gruppe Ω die Gedanken einer Gruppe Ω' entsprechen, die wahr sind, während dem Gedanken G ein Gedanke G' entspricht, der falsch ist; denn wenn G von Ω abhängig wäre, so müßte, da die Gedanken von Ω' wahr sind, auch G' von Ω' abhängig sein, und dann wäre G' wahr.

Man wird so ungefähr den Weg erkennen, auf dem es vielleicht gelingen wird, die Unabhängigkeit eines eigentlichen Axioms von andern zu beweisen. Freilich fehlt noch viel an einer genaueren Durchführung. Insbesondere wird man finden, daß dies letzte Grundgesetz, das ich mit jenem Vokabular zu erläutern versucht habe, noch der genaueren Formulierung bedarf, und daß diese nicht leicht sein wird. Ferner wird festzusetzen sein, was ein logischer Schluß ist, und was der Logik eigentümlich angehört.

Wenn man dann nach den oben gegebenen Winken eine Anwendung auf die Axiome der Geometrie machen wollte, bedürfte man noch einiger Sätze, die z. B. bekunden, daß der Begriff *Punkt*, die Beziehung des Liegens eines Punktes in einer Ebene usw. der Logik nicht angehören. Diese Sätze müssen wohl als axiomatische angesehen werden. Freilich sind solche Axiome ganz besonderer Art und können in der Geometrie sonst nicht gebraucht werden. Aber wir befinden uns hier auf einem Neulande.

Man sieht wohl, daß diese Fragen nicht kurz abgetan werden können, und ich will deshalb nicht versuchen, diese Untersuchungen hier weiter zu führen.

Jemandem, der etwa auf meine Ausführungen antworten wollte, möchte ich dringend empfehlen, sich zunächst möglichst klar darüber zu äußern, was er ein Axiom nenne, wann er ein Axiom von andern unabhängig nenne, wie er die Bedeutung des Wortes „Axiom" gegen die des Wortes „Definition" abgrenze. Freilich, wenn man fragt, nur um zu fragen, kann man, wie Herr Korselt fürchtet, ins Unendliche fragen. Aber keinem Vernünftigen wird es einfallen, immer weiter zu fragen, wo gar keine Gefahr des Mißverstehens vorliegt. Bei einem wissenschaftlichen Streite muß man so genau wie möglich festzustellen suchen, worin die Meinungsverschiedenheit bestehe, damit ein bloßer Wortstreit vermieden werde. Hier muß man sich entscheiden, ob ein Axiom etwas Hörbares sei, etwa eine Folge von Worten, welche die Grammatik einen Satz nennt, und ob es dann ein uneigentlicher Satz sei oder ein eigentlicher, oder ob etwa ein Axiom ein Gedanke sei, der Sinn eines eigentlichen Satzes. Solange das Wort „Axiom" in der Mathematik nur als Überschrift diente, konnte ein Schwanken in der Bedeutung ertragen werden. Nun aber, seitdem die Frage gestellt worden ist, ob ein Axiom von andern unabhängig sei, ist das Wort „Axiom" in den Text selbst eingetreten, und von dem, was es bezeichnen soll, wird etwas behauptet und bewiesen. Nun ist es nötig, völlige Übereinstimmung über seine Bedeutung herbeizuführen. Herr Hilbert hätte schon in der ersten Auflage seiner Schrift eine Definition des

Axioms oder, wenn eine solche unmöglich schien, eine Erläuterung geben sollen. Aber vielleicht war ihm damals seine Abweichung von der Euklidischen Gebrauchsweise des Wortes noch nicht zum Bewußtsein gekommen. Doch hätte er dann in der zweiten Auflage diese Lücke ausfüllen sollen. So bleibt es ganz im Dunkeln, was er eigentlich glaubt bewiesen zu haben, welcher logischen oder außerlogischen Gesetze und Hilfsmittel er dabei bedarf. Auch das ist nicht sicher zu erkennen, ob der Korseltsche Gebrauch des Wortes „Axiom“ mit dem Hilbertschen übereinstimme. Wenn ich also hier auf Klarheit dringe, so ist das nicht als nutzloses Fragen abzulehnen. Wenn jemand den Streit weiter führen wollte, ohne einen ernsten Versuch zu machen, die angeregten Fragen zu beantworten, so würde er nur leeres Stroh dreschen, woran ich mich nicht beteiligen möchte.

Verzeichnis älterer mathematischer Werke aus der im Besitz der Jacobsonschule zu Seesen befindlichen Wertheimschen Bibliothek.

Im Auftrage der bibliographischen Kommission mitgeteilt
von Felix Müller in Friedenau.

Die Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung haben wiederholt Gelegenheit genommen, auf mathematisch-bibliographische Unternehmungen aufmerksam zu machen und Notizen von bibliographischem Interesse zu bringen. Unsere Leser wissen, daß in den Sitzungen der Deutschen Mathem.-Vereinig. der Gedanke angeregt und diskutiert wurde, eine besondere mathematische Zentralbibliothek zu begründen. Stieß auch die Realisierung dieser Idee auf große Schwierigkeiten, so wurde der Plan doch nicht ganz und gar fallen gelassen. Die Deutsche Mathem.-Vereinig. wählte eine bibliographische Kommission, welche die Aufgabe hat, die weitere Verfolgung der angeregten Idee sich angelegen sein zu lassen und überhaupt die Mitglieder in bibliographischen Fragen nach Möglichkeit zu unterstützen.

Eine der wichtigsten Fragen ist nun die, in welcher Bibliothek irgend ein seltenes mathematisches Werk zu finden sei. Mit Freuden begrüßten wir die Errichtung eines mit der Königl. Bibliothek zu Berlin in Verbindung stehenden Auskunftsbüreaus, das auf besondere Anfrage diejenige öffentliche Bibliothek Deutschlands namhaft macht, in der ein gesuchtes Werk zu finden ist. Der in Aussicht genommene General-

katalog aller öffentlichen Bibliotheken Deutschlands wird dem Bedürfnisse der Gelehrten in weiterem Maße entgegenkommen.

Aber auch in Privatbibliotheken sind oft seltene Schätze aus der mathematischen Literatur verborgen. Herr Prof. Wölffing hat vor mehreren Jahren ein Verzeichnis von Bänden mathematischer und naturwissenschaftlicher Zeitschriften veröffentlicht, die in öffentlichen und Privatbibliotheken Würtembergs zu finden sind. Vor einiger Zeit gelangte an uns die Nachricht, daß der verstorbene Dr. Wertheim seine wertvolle Bibliothek der Jacobsonschule in Seesen vermacht habe. Da wenige Fachgenossen von der Existenz dieser Bibliothek Kenntnis haben, so veranlaßte Herr Prof. Gutzmer einen jüngeren Mathematiker, Herrn Große, ein Verzeichnis der der Jacobsonschule vermachten mathematischen Werke anzufertigen. Die bibliographische Kommission beschloß, eine Umarbeitung dieses Verzeichnisses, welche die selteneren mathematischen Werke aus dem 15., 16., 17. und 18. Jahrhundert enthält, in den Jahresberichten zu veröffentlichen. Wir hoffen, daß dieses Verzeichnis vielen Mitgliedern willkommen sein wird.

(Die eingeklammerten Zahlen bezeichnen die Nummern des Bibliotheks-Katalogs).

1482. Praeclarissimus liber elementorum **Euclidis.** Venet. fol. (E. 292).
1484. **Piero Borgi** Arithmetica. Questa infrascripta tauola dinota e dimostra la significatione de le infrascripte zifre etc. Venet. (89).
1491. **Euclidis** Elementa lat. cum comment. Campani. Vicent. fol. (18).
1508. **Johann Widmann.** Arithmetica germanica. Behend und hubsche Rechnungen auff allen Kauffmanschafften. Pforzheim (241).
1509. **Luca del Borgo.** De divina proportione, arithmeticae disciplinae, tractatus de quinque corporibus regularibus. Venet. (10.)
1509. **Euclidis** Megarensis Opera a **Campano** tralata. Emend. Lucas Paciolus. Venet. (30).
1523. **Luca del Borgo.** Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalità. Venet. fol. (2).
1525. **Albrecht Dürer.** Underweysung der messung mit dem zirckel und richtscheyt. Nürnb. (327).
1527. **Albrecht Dürer.** Etliche Underricht zu Befestigung der Stett, Schloß und Flecken. Nürnb. (326).
1528. **Albrecht Dürer.** Von menschlicher Proportion. Nürnb. (296).
1532. **Orontii Finaei** Protomathesis. Paris fol. (26).
1533. ***Εὐκλείδου*** *στοιχειων βιβλ. ιε.* Basileae fol. (304).
1533. **Joh. de Regiomonte.** De triangulis omnimodis libri V. Norimb. fol. (33).
id. Basil. (32).
1539. **Hier. Cardanus.** Practica arithmeticae et mensurandi singularis. Mediol. 8. (229.)
1540. **Luca del Borgo.** De abaco. Venet. (88).
1543. **Euclide** Megarense, ed. Nic. Tartalea. Vinezia fol. (297).

1544. **Mich. Stifel.** Arithmetica integra. Cum praef. Ph. Melanchtonis. Norimb. 4. (239.)

1545. **Hier. Cardanus.** Ars magna. Norimb. (11).

1546. **Nic. Tartaglia.** Quesiti ed inventioni. Venet. (240).

1550. **Euclidis** Megarensis sex libri priores de geometricis principiis. gr. et lat., Auth. J. Scheubelio. Basil. fol. (328).

1550. **Hier. Cardanus.** De subtilitate. Lugd. (D. 8).

1551. **Vitellionis** De Natura, Ratione et projectione radiorum visus luminum, colorum atque formarum, quam vulgo Perspectivam vocant. Norimb. (9).

1552. Pratica d'arithmetica di **Franc. Ghaligai.** Fiorentino, nuov. riv. Fir. (220).

1553. **Baptista de Benedictis.** Resolutio omnium Euclidis Problematum. Venet. (90).

1553. **Mich. Stifel.** Die Coß Christoff Rudolffs. Königsb. (238).

1553. **Christoff Rudolff.** Künstlich rechnung mit der ziffer etc. Auffs neu verf. u. gebessert. Wien (159).

1554. **Jo. Buteonis** Opuscula quaedam geometrica. Lugd. 4 (257).

1555. Das 7., 8. und 9. Buch **Euclidis** durch **Joh. Scheybel.** Augsp. 4 (260).

1556. **Nic. Tartaglia.** Generale Trattato di numeri. Ven. (301—303).

1559. **Jo. Buteo.** Quadratura circuli. Lugd. (259).

1560. **Jo. Buteo.** Logistica, quae et arithmetica vulgo dicitur, in libros V digesta. Lugd. (258).

1561. **de Sacrobusto.** Libellus de sphaera. Wittenb. (158).

1562. Die sechs ersten Bücher des **Euclids** Vom Anfang und Grund der Geometrj. Deutsch von Wilh. Holzmann gen. Xylander. Basel (295).

1563. **Gemma Frisius.** Arithmeticae practicae methodus facilis. Paris (250).

1565. **Euclide** Megarense. Trad. da Nic. Tartalea. Ven. 4. (255.)

1566. **Petri Nonii** Opera mathematica. Basil. (14).

1568. **Adam Riese.** Rechnung auf der Linien und Federn. Frankf. a. O. (251).

1570. **Hier. Cardani.** Opus novum de proportione numerorum, motuum etc. Artis magnae liber unus. De Aliza regula liber etc. Basil. fol. (8).

1572. **Raf. Bombelli.** L'algebra, Parte maggiore dell' aritmetica divisa in tre libri. Bologna (196).

1575. **Franc. Maurolyci** Opuscula mathematica. Venet. 4. (201.)

1575. **Diophanti Alex.** Rerum arithmeticarum libri et de numeris polygonis seu multangulis. Interpr. Guil. Xylandro. Basil. fol. (294).

1579. **Raf. Bombelli.** L'Algebra. Bologna (197).

1590. Arithmetica, practica y speculativa, del **Bachiller Joan Perez de Moja.** Granada (160).

1592. **Nic. Tartaglia.** Arithmetica. Venet. (195).

1596. **Ludolf van Ceulen.** Van den Circkel. Delft (322).

1598. **Jos. Unicorno.** De l'Arithmetica universale. Parte prima. Venet. (157).

1599. **Schreckenfuchs. Abraham ben Chijah,** Sphaerae mundi; **Elias Misrachi,** Arithmetica. Kloster Weingarten (234).

1613. **P. Ant. Cataldi.** Algebra. Bologna (13).

1615. **Mich. Stifel. Christ. Rudolffs** Algebra mit Exempeln der Coß. Amsterd.

1616. Ad duo nobilissima Problemata a Nobilissimis mathematicis, Regiomontano, Nonio, Vieta, Ghetaldo tractata, **Clementis Cyriaci** animadversiones et analyses. Paris (91).
1618. **Petri Bungi** Numerorum mysteria. Paris. 4. (183).
1618. **Dan. Schwenter.** Geometriae practicae novae tractatus. Nürnb. (198).
1618. **Del. Medico.** Sefer maäjan ganim. Amsterd. (221).
1621. **Diophanti Alex.** Arithmeticorum libri sex et de numeris multangulis liber unus. Gr. et lat. illustr. Caspar Bachet. Paris fol. (293).
1625. *Εὐκλείδου δεδόμενα*, Euclidis data. Ed. Claudius Hardy. Paris. 4. (91).
1627. **Leurechon (Van Etten).** Récréations mathématiques. Lyon (155).
1628. id. Rouen (156).
1628. **Simonis Stevini** Kurtzer doch gründlicher Bericht von Calculation der Tabularum Sinuum, Tangentium und Secantium. A. d. Niederländ. Sampt einer Vorrede Danielis Schwenters, und Tabulis. Nürnb. (162).
1628. **Joh. Neperi** Rhabdologiae seu numerationis per virgulas libri duo. Lyon (249).
1632. Lo specchio ustorio overo Trattato delle sezioni coniche ecc. Da **Bonav. Cavalieri.** Bologna (92).
1634. **Sim. Stevin.** Oeuvres mathématiques. Augm. p. Albert Girard. Leyden fol. (31).
1636. **Petazzo.** Porto astronomico Emmanuelis Porto. Padua (237).
1636. **Battista.** Geometria e Trigonometria d. Emm. Porto Rabbi Hebreo. Padua (236).
1639. **Bonav. Cavalieri.** Centuria di varii problemi. Bologna (262).
1641. **D. P. de St. M. Magdeleine, Fucillent.** Traité de l'horlogiographie. Paris.
1643. **Bonav. Cavalieri.** Trigonometria. Bologna (213).
1643. **Jac. de Billy.** Nova geometriae clavis; Algebra. Paris (291).
1646. **Franc. Vietae** Opera mathematica. Ed. Franc. a Schooten. Lugd. Bat. fol. (40).
1653. **Bonav. Cavalieri.** Geometria indivisibilibus continuorum. Bonon. (212).
1659. **Joh. Heinr. Rahn.** Teutsche Algebra oder algebraische Rechenkunst. Zürich. 4. (223.)
1660. **Jac. de Billy.** Diophantus. Paris. 4. (218.)
1660. **Pappi Alexandrini** Collectiones cum Comment. Frid. Commandini. Bonon. fol. (299).
1661. **Caspar Schott.** Cursus mathematicus libris XXVIII, sive encyclopedia. Würzb. (41).
1670. **Jac. de Billy.** Diophantus redivivus, sive enodatio problematum triangula rectangula spectantium. 2 Tomi. Lugd. 8. (242.)
1670. **Diophanti Alex.** Arithmeticorum libri sex, de numeris multangulis liber unus. Cum Comment. Claud. Bacheti et observationibus P. de Fermat. Tolosae fol. (293).
1673. **Record's** Arithmetik: or, the Ground of arts; teaching the perfect work and Pratice of Arithmetick etc. London (235).
1675. **Archimedis** Opera, **Apollonii Pergaei** Conicorum libri IV, **Theodosii** Sphaera, ill. p. Js. Barrow. London. 4. (114.)
1679. **P. Fermat.** Varia opera mathematica. Tolosae (36).

1683. **Isaaci Barrow** Lectiones. London. 8. (252).
1703. **Euclidis** Elementa geometriae. Oxon. (19).
1710. **Apollonii Pergaei** Conicorum libri octo et Sereni Antissensis de sectione cylindri et coni libri duo. Oxon. (35).
1744. **Js. Newtoni** Opuscula in tres tomos distributa. Laus. et Genev. 3 v. 4⁰. (27—29).
1745. **G. G. Leibnitii** et **Joh. Bernoulli** Commercium philosophicum et mathematicum. I (1694—99). II (1700—16). Laus. et Genev. 4. (285—286.)
1746—51. **L. Euler.** Opuscula varii argumentis. Berol. 3 v. 1746, 1750, 1751 (10—11).
1748. **L. Euler.** Indroductio in analysin infinitorum. Lausannae (16).
1761. **Js. Newton.** Arithmetica universalis. Cum Comment. Joh. Castillionei. 2 v. Amsterd. 4⁰. (15.)
1771. **L. Euler.** Vollständige Anleitung zur Algebra. Lund (138).
1779. **E. Bezout.** Théorie générale des équations algébriques. Paris (325).
1783—85. **L. Euler.** Opuscula analytica. Petersb. (21—22).
1792. **Archimedis** Opera. Ed. Torelli. Oxoniae. (300.)
1796. **Kästner.** Geschichte der Mathematik. Göttingen. 4 Bde. (107—110).
1797—99. **P. Cossali.** Origine, trasporto e primi progressi in Italia dell' Algebra. Storia critica. 2 v. Parma. gr. 4⁰. (5—6).

Gedankenlose Denker.

Eine Ferienplauderei.

Von J. Thomae in Jena.

> So widersinnig und übertrieben es auch scheinen mag, so nimmt doch der menschliche Verstand seine Gesetze nicht aus der Natur, sondern schreibt sie ihr vor. Kant.

Wer eine Arithmetik auf eine formale Zahlenlehre aufbauen will, eine Lehre, die nicht fragt, was sind und was sollen die Zahlen, sondern die fragt, was brauchen wir von den Zahlen in der Arithmetik, dem wird es erwünscht sein, auf ein anderes Beispiel einer rein formalen Schöpfung des menschlichen Verstandes hinweisen zu können. Ein solches Beispiel glaubte ich im Schachspiel gefunden zu haben. Die Schachfiguren sind Zeichen, denen im Spiel kein anderer Inhalt zukommt, als der ihnen durch die Spielregeln zuerteilt wird. Die Redeweise, die Zeichen seien leere, kann zu Mißverständnissen da führen, wo der gute Wille zum Verständnis fehlt. So glaubte ich auch die Zahlen in der Arithmetik, im Rechenspiel als Zeichen ansehen zu dürfen, denen eben im Spiel kein anderer Inhalt zukommt,

als der ihnen durch die Rechnungs- oder Spielregeln zuerteilt wird. Das Zeichensystem des Rechenspieles wird aus den Zeichen

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9$$

in bekannter Weise hergestellt.

Keine Sprache dürfte so weit differenziert sein, daß der Sinn eines jeden Wortes vollkommen eindeutig sei. So sagt man, die Figuren im Schachspiel haben keine Bedeutung, und doch wäre es wohl widersinnig zu behaupten, der Springer habe im Schachspiel keine Bedeutung, oder eine Zahl habe in der formalen Arithmetik keine Bedeutung, sei z. B. kein Größenverhältnis, und es wäre doch widersinnig zu sagen, die Zahl e habe in der Arithmetik, im Rechenspiel keine Bedeutung. Der Inhalt einer Schachfigur, z. B. des weißen Damenspringers, oder des schwarzen d-Bauern, wird im Schachspiel durch ihr Verhalten gegen die Spielregeln bestimmt. Da wirkt wieder die Nichteindeutigkeit des Wortes „verhalten" unliebsam. In einem idealen Staat verhalten sich die Bürger den Staatsgesetzen gegenüber gleich, in einem ständischen verschieden. Tiere, Häuser usw. sind auch den Staatsgesetzen unterworfen, aber sie verhalten sich zu ihnen anders als die Menschen. Da werde ich nun durch meinen Kollegen Herrn Frege auf Seite 101 seiner Grundgesetze der Arithmetik belehrt, daß sich verhalten ungefähr so viel heißt, wie sich benehmen. Die Schachfiguren können sich demnach zu den Spielgesetzen gar nicht verhalten, sondern höchstens der Spieler, der z. B. falsch ziehen kann.

Wenn gesagt wird, im Rechenspiel habe ein Quotient, dessen Nenner Null ist, keine Bedeutung, so wird das dadurch begründet, daß im Rechenspiel die Zeichen selbst sowohl, als auch die aus ihnen durch die Rechnungsregeln erzeugten eindeutig sein müssen. Da aber aus der angegebenen Form sich leicht der Satz ziehen läßt

$$a = a, \quad a \neq a,$$

so ist ein Quotient mit dem Nenner Null in der formalen Arithmetik nicht zulässig. Die Forderung der Eindeutigkeit legt überhaupt der Neuschöpfung von Zeichen im Rechenspiel gewisse Grenzen auf. Wenn ich z. B. sagen wollte, die beiden Gleichungen

$$3x = 1, \quad 3x = 2$$

sind miteinander nicht verträglich, aber ich schaffe ein Zeichen, $x = *$, das den beiden Gleichungen genügt, so wird $* = \frac{1}{3}$, $* = \frac{2}{3}$ sein müssen, das Zeichen wird nicht eindeutig sein, ist demnach in der Arithmetik unzulässig.

Daß der „schwarze König“ im Schachspiel ebenso gut etwas bedeute, als der „Sirius“ in der Astronomie (Frege Seite 103), der Meinung bin ich allerdings immer gewesen.

Selbst das Wort „identisch“ scheint nicht eindeutig zu sein.

Auf Seite 140 der zitierten Schrift stellt Herr Frege den Satz auf, „der Morgenstern ist derselbe wie der Abendstern“ und scheint die beiden für identisch zu erklären. Hat nun der Abendstern dieselbe Masse wie der Morgenstern? Nein. Hat er dieselbe innere Energie (thermische, chemische usw.)? Nein. Hat er dieselbe Bewegungsrichtung? Nein. Dieselben Beleuchtungsverhältnisse? Nein. Aber irgend ein Residuum wird in beiden doch wohl dasselbe sein, demnach sind sie identisch. — Sagt man aber, der Morgenstern ist derselbe „Stern“ wie der Abendstern, so tritt ein Tertium hinzu. Der menschliche Verstand in seiner souveränen Schöpferkraft, der Natur ihre Gesetze vorschreibend, bildet einen Begriff „Stern“ und richtet diesen Begriff so ein, daß der Morgenstern derselbe Stern ist, als der Abendstern. Ähnlich abstrahiert der, der zählen lernt, von der Verschiedenheit der Rechensteine, an denen er es lernt, setzt sie einander gleich. In dieser Möglichkeit oder Fähigkeit des menschlichen Verstandes, von der Verschiedenheit gewisser Dinge zu abstrahieren, sie einander gleich zu setzen, glaubte ich die Fruchtbarkeit des Gleichheitszeichens zu erkennen, (Elementare Funktionentheorie pag. 2), werde aber durch Frege gründlich abgeführt.

In bezug auf das Schachspiel habe ich mich nun auch, wie mich Herr Frege belehrt, stark geirrt. Nach ihm gibt es in diesem Spiele keine Lehrsätze und Beweise. Der Satz: Turm und König können den feindlichen König auf jedem Randfelde matt setzen, ist also nur wohl für meinen nicht hinreichend logisch geschulten Verstand ein Lehrsatz, und sein Beweis ein Scheinbeweis. Durch Frege erfahre ich, daß die Schachspieler wohl Denkarbeit leisten, aber keine Gedanken haben, sie sind gedankenlose Denker. Dieser Begriff ist wohl von dem des Träumers verschieden, wenigstens habe ich die Schachspieler noch niemals Träumer nennen hören. Wenn ich sage, diese Semmel ist dick mit Butter bestrichen, so drückt dieser Satz vielleicht einen Gedanken aus, denn er bezieht sich auf etwas Konkretes, und zwar auf etwas Eßbares. Wenn ich aber sage: Im Endspiel des Stamma (ersticktes Matt) kommt die Besonderheit des Springers zu beredtem Ausdruck, so scheint dieser Satz, wenn ich Frege recht verstehe, keinen Gedanken auszudrücken. Man vergleicht gern einen Schachspieler mit einem Feldherrn, der einen Schlachtplan entwirft und ihn im Gange der Schlacht nach den Umständen ändert. Ob auch der

Feldherr unter den Begriff des gedankenlosen Denkers fällt oder nicht, wage ich nicht zu entscheiden. Die Schachspieler freilich glauben in ihren Spielen und Problemen tiefe schöne pikante und ähnliche Gedanken zu finden, so daß auch das Wort „Gedanke“ nicht eindeutig zu sein scheint.

Damit wäre eigentlich meine Plauderei zu Ende, man gestatte mir aber noch einige wenige Bemerkungen anzufügen. — Herr Frege entrüstet sich an einer Stelle seiner Schrift mit den Worten „Nun läßt Thomae gar eine Zahl wachsen“. Dabei habe ich natürlich nach Till Eulenspiegel gedacht, man könne die Zahl Drei etwa wie in folgender Figur wachsen lassen,

$$\scriptstyle 3\,3\, \textstyle 3 \, .\, .\, \displaystyle 3\; 3\; .\,.\,,$$

aber da sind die verhängnisvollen Pünktchen. Sie bedeuten (Vergl. Frege pag. 135) jedenfalls auch noch vier Dreien. Mithin kann ich die Zahl Drei zwar wachsen lassen, aber doch nur etwa achtmal, jedenfalls beschränkt. In der Schule habe ich gelernt, die Zahl $^1/_3$ lasse sich nicht durch einen Dezimalbruch darstellen, man schrieb

$$\tfrac{1}{3} = 0{,}33333\,..$$

Da aber die beiden Pünktchen jedenfalls auch noch zwei Dreien bedeuten, so ist nun $\frac{1}{3}$ doch durch einen Dezimalbruch mit sieben Stellen darstellbar.

Eine sehr zu bedauernde Rückhaltung legt sich Herr Frege da auf, wo er von neuen Rechnungsarten (Spezies) spricht. Er *scheint* in den „Grenzübergängen“ eine solche zu wittern. Er gibt aber kein Beispiel an, in dem ein Grenzübergang mit andern Mitteln als mit den, durch die Zahlenfolgen oder Fundamentalreihen auf irrationale Zahlen erweiterten vier bekannten Spezies ausgeführt würde. Die neuern Vertreter der formalen Arithmetik haben versucht, die Rechnungsregeln auf irrationale Zahlen formal auszudehnen, indem sie für gemeine Zahlen diese Frage als durch Hankel erledigt ansehen. Daraus erklärt es sich, daß mancherlei in ihren Aufstellungen fehlt, was für eine lückenlose Durchführung ihrer Ideen eigentlich notwendig wäre. So fehlt bei mir z. B. zu meinem Bedauern die Vorschrift, die Hankel mit „Modulus einer Rechnungsart“ bezeichnet.

Aber ein Problem löst mein Freund und Kollege Frege in glücklicher Weise. Er sagt auf Seite 129: Wir können definieren: Eine Reihe von Häusern heißt eine unendliche Reihe, wenn kein Haus in ihr ein letztes ist, sondern wenn nach einer zu gebenden Vorschrift, immer neue und neue Häuser gebaut werden können“. Da doch mein Herr Kollege sicher einen Bauplatz für eine solche Straße weiß, weil

ja sonst der Begriff Unendlich einer Schlange gliche, die sich in den Schwanz beißt, so braucht er diesen nur anzugeben, und die Agrarfrage ist ein für allemal gelöst.

Nachdem nun Frege „die formale Zahlenlehre ein für allemal abgetan“ hat, und nachdem er erkannt hat, daß auch sein Versuch die Zahlen logisch zu begründen (Seite 253. Nachwort) mißglückt ist, so haben wir nun gar keine Zahlen und müssen nach ihm zu dem traurigen Schluß kommen

Die Mathematik ist die unklarste aller Wissenschaften.

Geschrieben in den Hundstagen des Jahres 1906.

Technische Arbeit.

Festrede zur 75jährigen Jubelfeier der Technischen Hochschule zu Hannover.

Von Hubert Stier in Hannover.

Die Zahl der Gegenstände, über welche man bei Gelegenheit dieser Feier reden könnte, wäre außerordentlich groß, sobald man solche aus den einzelnen Gebieten der Technik, deren Studium uns an den technischen Hochschulen beschäftigt, herausgreifen wollte. Es schien aber geboten, heute ein Thema von allgemeinem Interesse zu wählen, welches sich möglichst gleichartig auf alle hier vertretenen technischen Zweige bezieht. So soll denn versucht werden, die Art und Weise in gedrängter Kürze zu schildern, und nach ihrer Bedeutung hervorzuheben, nach welcher sich die *Arbeit des Technikers in* seinem Berufe vollzieht.

Die Technik zerlegt sich heutzutage nach den verschiedensten Richtungen hin, und die Ziele, welche die einzelnen Angehörigen derselben verfolgen, wie der Bauingenieur, der Maschinenkonstrukteur, der Architekt, der Hütteningenieur, der praktische Chemiker und der Elektrotechniker, gehen weit auseinander. Trotzdem aber läßt sich in der Art des Schaffens doch eine Gemeinsamkeit erkennen, und man kann bei allen denjenigen, die wir unter dem Namen der Techniker zusammenfassen, auch von einer *technischen Arbeit* reden, welche sich unter gemeinsamen Gesichtspunkten vollzieht. Ja, bis zu einem gewissen Grade läßt sich derselben auch die rein *künstlerische Arbeit,* und zwar nicht bloß diejenige des Architekten, der wenigstens zur einen Hälfte seines Schaffens ganz zur Technik gehört, sondern auch die der anderen, bildenden Künste, vor allem auch diejenige des Kunstgewerbes einreihen. Es bedingt sogar diese Art der technischen Arbeit über das engere Gebiet der Technik hinaus eine Auffassung des gesamten Lebens in besonderem Sinne, welche man geradezu als charakteristisch *technische Lebensanschauung* bezeichnen muß. Die Art seiner Arbeit und die darauf beruhende Lebensanschauung bilden dann ferner naturgemäß eine bezeichnende Unterscheidung des Technikers gegen andere

Berufszweige im öffentlichen Leben, wie dem des *Kaufmanns, des Juristen, des Soldaten, des Verwaltungsbeamten*, *des Arztes.*

Die Entwicklung der an den Hochschulen gepflegten Technik ist in dem verflossenen Vierteljahrhundert eine andauernd aufsteigende und immer größeren Umfang gewinnende gewesen. Man kann wahrnehmen, wie sich der *Einfluß* derselben mehr und mehr Wirkung verschafft hat und die Technik selbst in dem Organismus des modernen Staats- und Gesellschaftslebens zu einer hoch bedeutungsvollen und einflußreichen Stelle aufrückt. So ist hier und gerade an diesem Gedenktage wohl ein Wort von der *technischen Arbeit und der technischen Lebensanschauung* als Grundbedingungen der Technik überhaupt an seinem Platze.

Zunächst ist hervorzuheben, daß der Techniker stets *ganz tatsächlichen Aufgaben* gegenübersteht, welche ihm das tägliche Leben und die Natur selbst im weitesten Umfange stellen. Diese Aufgaben zerfallen natürlich in gewisse Gruppen, welche im ganzen und großen nach gemeinsamen Grundregeln zu behandeln sind, welche aber, sobald wir auf die Einzelfälle eingehen, jene immer wechselnde Fülle verschiedenartiger Erscheinungen zeigen, wie eben Natur und Leben sie uns ununterbrochen bieten.

Der Techniker hat diese Aufgaben mit *Mitteln zu lösen,* welche zwar ebenfalls gewissen allgemeinen und streng logischen Gesetzen folgen, wie dieselben die Grundlage der ganzen natürlichen Welt, in der wir leben, und sonach auch unseres eigenen Daseins bilden. Andererseits aber bieten auch sie wieder eine unendliche Verschiedenheit in ihrem Gebrauch im Einzelfall, und vor allem bemerken wir auch bei ihnen eine stete Steigerung und Ausdehnung nach ihrer Zahl und der Art ihrer Anwendung. Wir brauchen uns ja nur an die Entwicklung innerhalb jener 75 Jahre seit der Gründung unserer Hochschule zu erinnern, um uns die Verschiedenartigkeit der uns inzwischen gewordenen technischen Aufgaben und die Steigerung ihres Umfanges zu vergegenwärtigen. Wie aber sind auch demgegenüber unsere Mittel zu ihrer Bewältigung gestiegen! Mit der Fülle der Aufgaben, welche uns das staatliche, das wirtschaftliche und das soziale Leben gebracht haben, ist dem Techniker auch eine weitere Erforschung der Natur, ihrer Kräfte und ihrer Hilfsmittel zur Pflicht geworden; und er hat dieser Verpflichtung in vollem Maße genügt, indem er rastlos neue Wege erschlossen hat, um den neuen Anforderungen zu entsprechen.

Der rechte Techniker steht mitten im Leben. Das Leben bedingt seine Tätigkeit und macht dieselbe zu einer lebendigen und fruchtbringenden, und darum ist sie auch dazu angetan, ihn selbst mit der rechten Lebenskraft und Freudigkeit so zu durchdringen, daß er sie auch auf andere zu übertragen vermag. Andererseits aber ist ihm auch kein Stillstand, kein bequemes Ausruhen auf einem gewonnenen Standpunkt gestattet. Er kann sich kein System aufbauen und von diesem aus eine Welt konstruieren, deren Erscheinungen ein für alle Mal in dieses System einzuzwängen sind. Aber er entgeht auch dadurch der Gefahr, gelegentlich bemerken zu müssen, daß das System mit den rastlos sich ändernden Lebensverhältnissen nicht übereinstimmt und er deshalb wieder einmal daran gehen muß, dasselbe durch mühsame Flickarbeit mit der Wirklichkeit in Übereinstimmung zu bringen.

Als besonders grundlegend kommt für die Bedeutung der technische Arbeit in Betracht, daß *der Techniker wirklich schafft*, unter den Bedingungen natürlich, die für menschliches Schaffen überhaupt möglich sind. Er überträgt eine von ihm im Geiste geplante Arbeit, welche zunächst mit den ihm zustehenden Mitteln, denjenigen der zeichnerische Darstellung, der Berechnung, des Versuches, der Beschreibung, des Modells, festgestellt ist, in eine in die Augen tretende äußere Wirklichkeit, deren Dauer selbstverständlich verschieden ist, je nach den Gesetzen, welche in der Erhaltung natürlicher Dinge überhaupt gelten. Aber die Werke des Technikers treten wie die natürlichen Dinge in sichtbarer Gestaltung vor uns, sie behaupten sich neben ihnen und bedürfen keiner vermittelnden Zwischeninstanz, um sich geltend zu machen und zu wirken. Und wenn auch nicht für eine Ewigkeit, so schafft er doch meist nicht nur für seine Zeit allein, *sondern auch für nachfolgende Geschlechter auf Jahrhunderte.*

Wir sprechen wohl von einem Schaffen des Malers, des bildenden Künstlers überhaupt, und betrachten ein Bildwerk, ein Gemälde, einen Bau als Schöpfungen; aber in ganz demselben Sinne sind auch *die Werke der Technik Schöpfungen.* Die Durchbrechung hoher Gebirge, die Überbrückung von Flüssen und Meeresarmen, die Herstellung verwickelter Maschinen, welche die Tätigkeit vieler einzelner Hände ersetzen und vereinfachen, die Errichtung monumentaler Gebäude sind ebenfalls Schöpfungen. Nun hat freilich nur der liebe Gott allein die Welt aus Nichts geschaffen. Jede menschliche Schöpfung, auch das freieste Werk des bildenden Künstlers, besitzt eine Reihe von Vorgängen, von Anregungen und Beeinflussungen, in welchen es wurzelt, wenn diese sich auch unserer Wahrnehmung entziehen und sogar dem Künstler selbst nicht immer zum vollen Bewußtsein kommen mögen. Auf diese Vorgänge gestützt vollzieht sich dann wohl eine künstlerische Erfindung in einem Augenblicke glücklicher Begeisterung; meistens aber ist auch sie nur das Ergebnis einer ganzen Fülle verborgener geistiger Arbeit. Andererseits ist aber eine *technische Erfindung* keineswegs allein, wie man wohl meint, das reine rechnerische Ergebnis der Berücksichtigung gegebener äußerer Bedingungen und der Anwendung der durch die Hilfsmittel des Fachs dargebotenen Rezepte; auch hier stellt sich der *schöpferische Augenblick ein.* Jedem Werke aber gehen für den Techniker lange Zeiten mechanischer Arbeit voraus. Eine Fülle von Material muß herbeigeschafft, gesichtet, geordnet und nach ihrem Wert für die zu lösende Aufgabe zusammengestellt werden. Diese selbst muß nach allen Seiten, hinsichtlich ihrer Eigentümlichkeiten und Besonderheiten, geprüft werden. Erst nach Bewältigung dieser ganzen Vorarbeit, nach gewonnener Klarheit über ihren Wert, nachdem er den Stoff derselben geistig in sich verarbeitet und denselben so gewissermaßen zu seinem persönlichen Eigentum gemacht, tritt auch an den Techniker der Augenblick der schöpferischen Erfindung heran, die Stunde, wo sich ihm aus all den Vorbedingungen heraus die *Lösung in einfacher Klarheit* ergibt. Seine Tätigkeit ist nicht weniger und in nicht geringerem Maße eine schaffende wie diejenige auf dem vorgenannten künstlerischen Gebiete, und auch bei ihm drängt sich schließlich die Entstehung der grundlegenden Gedanken zumeist in kurze Stunden zusammen.

Es ist hier nicht einzugehen auf die Menge der rein technischen Hilfsmittel, welche ihm zu seiner Erfindung auf den verschiedenen Gebieten zur Verfügung stehen und die er selbstverständlich beherrschen muß; wie der Architekt seine Stilformen, der Bauingenieur seine Konstruktionssysteme, der Maschinentechniker seine Bewegungsmechanismen.

Es sei hier nur noch auf ein Hilfsmittel von ganz allgemeiner Bedeutung hingewiesen, nämlich auf die *Mathematik* und zwar vornehmlich auf jenes Gebiet dieser Wissenschaft, in welchem dieselbe in Verbindung mit den *Erscheinungen der Natur* auftritt und diese in ihren Wirkungen und gesetzmäßigen Ursachen ermittelt, sei es im Hinblick auf die Festigkeitslehre, die Statik, sei es mit Rücksichtnahme auf die Lehre von den Erscheinungen, unter welchen sich Bewegung und Wirkung der verschiedensten Körper vollzieht, des Wassers, der Erdmassen, des Dampfes und der elektrischen Kraft. In einem sich stets steigernden Maße ist die Wissenschaft der Mathematik bestrebt, diese Gesetze zu ergründen und in bestimmten Formeln festzulegen.

Der Techniker aber ist demgegenüber in gleichem Maße tätig gewesen, nicht allein diese Ermittelungen für seine Zwecke gewinnbringend und nutzbar zu verwerten, sondern dieselben auch über das dem Mathematiker zugewiesene Maß hinaus zu entwickeln und ihre praktische Verwendung in dem gleichen Maße zu erweitern, wie die steigenden Forderungen seiner Aufgaben dies verlangen. Was, um nur ein Beispiel heranzuziehen, dem *Architekten der alten Welt*, was dem Baumeister *des Mittelalters* nur aus empirischen Beobachtungen und durch langjährige, mühselige Erfahrungen möglich war, der Gewinn des festen Gerüstes für seine Konstruktionen und Kunstformen, läßt sich heute mit unbedingter Sicherheit rechnerisch feststellen. Es genügt, an jene Anfangsstadien unserer Kenntnis des Eisens, welche mit der Gründungszeit unserer Hochschule zusammenfallen, zu erinnern und demgegenüber die Fortschritte in den mathematischen und naturwissenschaftlichen Kenntnissen ins Auge zu fassen, mit welchen wir diesen Stoff heute in seinen Eigenschaften der Festigkeit, der Elastizität, der Tragfähigkeit, der Möglichkeit der Art seiner Bewegung, festzulegen vermögen, sei es zum Zweck weitgespannter Konstruktionen der Baukunst, wie Brücken und Hallenanlagen, sei es zum Zwecke der bewegenden und treibenden Arbeit irgend welcher Art von Maschinen. Wie ausgedehnt ist andererseits auch die Art der Gewinnung und Verarbeitung des Materials geworden, von der schlichten Herstellung des Guß- oder Schmiedeeisens jener Jahre bis zu den komplizierten und großartigen Hervorbringungsweisen unserer Eisen- und Walzwerke, und wie rastlos zeigt sich hier der moderne Techniker an der Arbeit, nicht bloß dem Eisen, sondern einer früher ungeahnten Fülle von Stoffen gegenüber. Dieser stets erhöhten Leistungsfähigkeit aber muß die Anwendung der Kenntnis der mathematischen und der physikalischen Grundbedingungen aller Baustoffe vorangehen. Sie gehört heute zu den wichtigsten Voraussetzungen für jede Erfindung, sie gibt eine wesentliche Grundlage des gesamten technischen Schaffens ab.

Doch auch hier ist noch ein Umstand zu berücksichtigen: Die Mathematik ist ohne alle Frage an sich unfehlbar, aber ihre Gesetze bedürfen, um als solche für uns wirksam zu werden, auch der *Verwendung im richtigen Sinne.*

Der Techniker muß sie nicht bloß verstehen und kennen, er muß sie auch *beherrschen*, um sie an der rechten Stelle und in der rechten Weise anzuwenden; sie dürfen ihm nur Hilfsmittel bleiben, deren Sklave er niemals werden darf, deren Anwendung er vielmehr im logischen und selbständigen Sinne beherrscht. Er unterwirft sich den unwandelbaren Folgerungen derselben, für ihre Anwendung bleibt ihm jedoch die persönliche geistige Freiheit und Selbständigkeit.

Zu dieser geschilderten Tätigkeit des Technikers, welche durch die Vorarbeiten zur Lösung seiner Aufgabe bedingt wird, tritt aber nun noch ein anderes Moment, nicht unmittelbar technischer, aber doch höchst wichtiger Art hinzu.

Fast alle technischen Leistungen werden geschaffen unter dem Gesichtspunkt der *wirtschaftlichen Produktion*, welche entweder eine *direkte* sein kann wie bei der industriellen Maschine oder eine *indirekte*, wie bei den Unternehmungen für die Zwecke des Verkehrs. Andererseits aber müssen seine Werke auch hergestellt werden mit bestimmt abgemessenen Mitteln, deren Umfang zumeist von vornherein gegeben ist oder nach dem zu erzielenden Gewinn bemessen wird. Über schrankenlose Mittel verfügt er wohl kaum jemals, höchstens der Architekt kommt mitunter, aber in ganz seltenen beneidenswerten Fällen, zu solchen. Aus diesen finanziellen Rücksichten aber, welche oftmals die größten wirtschaftlichen Pläne umfassen und über das eigentliche Fach der Technik hinaus sich zu großen staatsmännischen Aufgaben gestalten, erwächst dem Techniker ein neues, weites Gebiet voller Schwierigkeiten von oft ungeahnter Größe. Es ist allerdings zuzugeben, daß ihm für diese Seite seiner Tätigkeit in den meisten Fällen noch anderweitige, oft mehr als gut ist, maßgebende Persönlichkeiten, beratend und helfend zur Seite stehen. Schließlich aber bleibt ihm doch auch in diesem Falle die letzte Entscheidung, zumal, was die richtige Bemessung der für die Ausführung seiner Arbeit erforderlichen Mittel anlangt. Auch hier bedarf es seinerseits einer Fülle praktischer Überlegung und technischer Erfahrung sowie rückgratsteifer Selbständigkeit.

Unter Umständen aber ist gerade diese Seite der Tätigkeit des Technikers eine undankbare, ja dornenvolle zu nennen. Fremde Einwirkungen, denen er sich fügen muß, durchkreuzen und beschränken seine Ideen schon im Entwurf oder legen sie sogar gänzlich lahm, unzureichende Mittel werden ihm zur Verfügung gestellt, welche die Durchführung seiner Pläne sogar so beschränken, daß nur ein unvollkommenes Stückwerk entsteht, und schließlich werden ihm sogar noch die aus solchen Verhältnissen sich ergebenden Mängel seiner Werke zur Last gelegt. Nach Beispielen für solche Vorkommnisse brauchen wir nicht weit zu suchen. Welcher Staatstechniker insbesondere wüßte nicht deren anzuführen!

Ist nun endlich nach Erfüllung aller dieser Vorarbeiten die *Lösung der Aufgabe* klar gelegt, so erwächst für den Techniker doch zuletzt noch eine Schwierigkeit, deren Bewältigung die volle Anspannung seiner Kenntnisse und seiner Befähigung erfordert. Nur in den seltensten Fällen ist eine Aufgabe so einfach gestaltet, daß sie unter Berücksichtigung der Vorbedingungen für dieselbe von vornherein nur eine *einzige mögliche Lösung* mit Sicherheit zuläßt. Meistens sind verschiedene Möglichkeiten der Lösung vorhanden, und es bleibt nun dem Techniker zwischen ihnen

eine Wahl, welche ihm weder durch formale noch durch gesetzliche Vorschriften, weder durch Erfahrungssätze noch durch Befolgung vorhandener Beispiele völlig erspart werden kann. In dieser richtigen und zutreffenden Wahl der zur Verfügung stehenden Lösungen, deren Verantwortung er nicht auf andere abzuwälzen vermag, tritt die Persönlichkeit, die ihr Tun und Lassen zu vertreten hat, in den Vordergrund. Hier zeigt sich jene Kraft der bewußten Selbständigkeit, welche auch die Folgerungen zu tragen bereit ist, die aus ihren Entschlüssen sich ergeben. Diese Verhältnisse seines Berufes aber sind es, welche den Techniker zum selbständigen Denken und Handeln zwingen und darum auch gerade in diesem Berufe so viele energische und persönlich bedeutsame Menschen großziehen. Wenn das Wort unseres großen Feldherrn *„erst wägen, dann wagen"* noch für irgend eine andere Tätigkeit Geltung hat, so für diejenige der Techniker!

Mit dem Gesagten ist versucht worden, diejenige Arbeit zu schildern, welche man als *die Erfindung,* als die *Konzeption* eines in Aussicht genommenen Werkes bezeichnet. Nun aber gilt es, diese Erfindung in die Wirklichkeit zu übertragen und das Geplante auch zur schließlichen Vollendung zu bringen.

Zieht man hier noch einmal das Schaffen des bildenden Künstlers zum Vergleich heran, so finden wir dort den einzelnen, der persönlich abgeschlossen sein Werk erfindet und der, um dasselbe ins Leben zu rufen, nur der eigenen Hand oder weniger leicht folgender Gehilfen bedarf und es ferner innerhalb einer doch verhältnismäßig nur kurzen Arbeitszeit vollendet. Hier aber sehen wir den Ingenieur oder Architekten, auch nur als einzelnen, der aber die ausgedehnteste Fülle von Hilfsarbeitern verschiedenster Art verwenden muß und bei dem zwischen dem Beginn der Arbeit, zwischen der ersten Feststellung der Grundzüge derselben und ihrer schließlichen Vollendung Jahre, ja Jahrzehnte verstreichen. Der Techniker muß diese Hilfskräfte lenken, unter dem Gesichtspunkte folgerichtiger Durchführung seiner Gedanken leiten, an den rechten Stellen verwerten und schließlich beherrschen. Geben sich Wissen, Erfahrung und schöpferische Begabung bei der *Erfindung* eines technischen Werkes kund, so stellt die *Ausführung* eines solchen an den Charakter des Ausführenden, an seine physische und moralische Tüchtigkeit, an sein Organisationstalent und an seine Ausdauer die höchsten Ansprüche.

In der Auswahl und der Art der Benutzung der Ausführungsmittel und Hilfskräfte, in der Erkenntnis dessen, was mit denselben erreichbar ist oder nicht, ist der Techniker einer bedeutenden Ausführung durchaus einem Heerführer zu vergleichen, welcher in verwandter Weise über seine Truppen verfügt. Wie ein solcher muß er es verstehen, die ihm untergebenen Kräfte zum gemeinsamen Handeln zu vereinigen und sie in der Verwirklichung seiner Gedanken zu einem glücklichen Ergebnis zu führen.

Große technische Werke, insbesondere, wenn sie bisher noch nicht begangene Wege erschließen, sind ebenso viele gewonnenen Feldzüge für ihre Urheber, wie die Semmeringbahn eines Ghega, die Überbrückung von Weichsel und Rhein durch Lentze und Lohse, die Schaffung von Werkstätten durch einen Borsig, Egestorf und Krupp, die Durchbrechung des Mont-Cenis durch Sommeillier, der Bau des Reichstagsgebäudes durch Wallot. Ihre Bedeutung wird auch dadurch nicht abgeschwächt, daß sie in weiterer Fortentwicklung überholt worden sind. Aber nach ihrem Werte

und ihrem Einflusse haben sie für unsere heutige Welt Vorteile gebracht, die wohl den blutigen Lorbeer mancher gewonnenen Schlacht aufwiegen.

Während der Ausführung indessen kommt zumeist noch ein erschwerender Umstand in Betracht: Wohl lassen sich die Anforderungen, welche die jeweilige Aufgabe mit sich bringt, im allgemeinen vorher übersehen. Verfahrungsweise und Ausführungspläne finden darin ihre Begründung und werden darnach gestaltet. Aber nicht alles läßt sich voraussehen und gerade bei den größten Unternehmungen häufen sich oft unerwartete Hindernisse. Sie müssen überwunden werden und zwar meist, um den Fortgang der Ausführung nicht aufzuhalten, in kürzester Frist und wohl mit ganz anderen Mitteln als es im ursprünglichen Plane lag und wie dieselben unter anderen Verhältnissen wohl am Platze gewesen wären. Diese Zwischenfälle treten auch nicht bloß im großen und in seltenen Fällen auf, nein, sie können täglich, ja stündlich eintreten und andauernd die wachsame Überlegsamkeit und das tätige, tatkräftige Eingreifen des ausführenden Führers in Anspruch nehmen.

Noch eine Frage aber wird bei den Arbeiten technischer Ausführungen berührt, nämlich die *soziale*. Unsere Zeit hat die ganze europäische Bevölkerung in zwei Lager gespalten, die sich als Arbeitgeber und Arbeitnehmer bitter bekämpfen, während alle Verhältnisse doch zu einem gemeinsamen Wirken beider drängen. Der Techniker steht zwischen beiden; er gibt durch seine Erfindungen der einen Seite die Wege zur großartigen Ausbeutung natürlicher Kräfte und Mittel, er gibt der anderen durch seine geistige Leitung die Möglichkeit zu höherer kultureller Entwicklung. Ein bedeutender Techniker ist von selbst berufen zur Überbrückung dieser Gegensätze und wird als Vertrauensmann beider Parteien seine Stellung in segensreicher Weise auch in der sozialen Bewegung auszunutzen imstande sein.

Das wäre in kurzen Zügen dasjenige, was hier über die besondere Art und den weiten Umfang der technischen Arbeit gesagt werden könnte. Die *Schlußfolgerung* für die *technische Lebensanschauung* ergibt sich nach dem Vorhergehenden von selbst, ist sogar zum Teil darin schon ausgesprochen: „Im Leben stehend, jede Erscheinung desselben erfassend und gleichmäßig richtig bewertend, immer das Erreichbarmögliche vor Augen haltend, die Mittel zur Verwirklichung seiner Gedanken voll beherrschend, sie an der rechten Stelle verwendend und ohne Stillstand sie nach Möglichkeit erweiternd und das alles unter Festhaltung seiner Persönlichkeit und Selbständigkeit“: das ist unter *technischer Lebensanschauung* zu verstehen. Man könnte es nur für einen Vorzug unseres Gesamtlebens halten, wenn sich diese Art der Anschauung innerhalb desselben in steigendem Maße Geltung verschaffte.

Insbesondere den jungen Studierenden, unsern Kommilitonen, ist es nahe zu legen, sich mit dieser Lebensauffassung vertraut zu machen. Sie erhält den Menschen jung und bewahrt ihn vor Pessimismus. Ob die Welt gut oder schlecht konstruiert ist, daran können auch die Techniker nichts ändern; aber sie können sich dem einmal unabänderlich Gegebenen selbständig gegenüber stellen und alle seine Seiten zu ihrem und anderer Besten auszunutzen lernen.

Den technischen Genossen, der Mehrzahl unter den zu dieser Festversammlung Anwesenden, ist mit dem Gesagten wohl nicht durchaus

Neues gebracht. Gleiches fühlen die Techniker wohl alle. Aber es erschien wünschenswert, dies hier einmal öffentlich auszusprechen, um auch denjenigen, welche dem technischen Kreise ferner stehen, die Bestrebungen nach einem der Bedeutung der technischen Tätigkeit auch entsprechenden Einfluß verständlich zu machen. Für den Techniker selbst bleibt freilich das beste Mittel seine Arbeit und ihre Förderung nach den bisherigen Grundsätzen.

Und wenn abermals 25 Jahre in dieser Arbeit für die Technik vergangen sind, mögen dann die Techniker jener kommenden Tage sich sagen können, daß sie ihr Schaffensgebiet mit derselben rastlosen Tatkraft gefördert haben wie bisher und dadurch auch die entsprechende Würdigung desselben errungen sei!

Zu den Funktionen des elliptischen Zylinders.

Da von diesen Funktionen in diesem Bande der Jahresberichte schon mehrfach (S. 49, 219, 403) die Rede war, darf ich vielleicht mitteilen, daß sich mehrere meiner Schüler mit ihnen teils schon beschäftigt haben, teils noch beschäftigen. Herr Dannacher hat die Beweise der fundamentalen Sätze Heines über die Existenz der ausgezeichneten Parameterwerte, zu denen periodische Lösungen gehören, in Ordnung gebracht (ist als Programm der Kantonsschule Frauenfeld Ostern 1906 und zugleich als Züricher Dissertation erschienen); Herr Butts hat Methoden zu numerischer Berechnung solcher Parameterwerte und der zugehörigen periodischen Lösungen ausgebildet (erscheint in einer amerikanischen Zeitschrift); ein dritter geht an die asymptotischen Reihen.

Zürich. H. Burkhardt.

Mitteilungen und Nachrichten.

Geeignete Mitteilungen wird der Herausgeber stets mit größtem Danke entgegennehmen.

1. Akademien. Gesellschaften. Vereinigungen. Versammlungen.

Deutsche Mathematiker-Vereinigung. Auf Grund der geschehenen Anmeldungen und des allgemeinen Programms der Naturforscherversammlung bringen wir folgende Tagesordnung für unsere heurige Jahresversammlung in Vorschlag.

Sonntag, den 16. September, findet Abends $8^1/_2$ Uhr zwangloser Begrüßungsabend für Damen und Herren in der Liederhalle statt.

Montag, den 17. September, Vormittags $9^1/_2$ Uhr beginnt die erste allgemeine Versammlung im Festsaal der Liederhalle, in welcher u. a. A. Gutzmer-Halle den Bericht der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte erstattet. Nachmittags 3 Uhr findet die Konstituierung der Abteilungen und hierauf die 1. Abteilungssitzung statt, für welche die folgenden Vorträge über Funktionentheorie in Aussicht genommen sind:

O. Blumenthal-Aachen: Über die ganzen transzendenten Funktionen und den Picardschen Satz (Referat).

A. Pringsheim-München: Über das Fouriersche Integral-Theorem.
G. Faber-Karlsruhe: Über Reihen nach Legendreschen Polynomen.
O. Perron-München: Über die singulären Punkte auf dem Konvergenzkreise.
P. Schafheitlin-Berlin: Zur Theorie der Besselschen Funktionen.
C. Juel-Kopenhagen: Über nichtanalytische Raumkurven.

Abends 8 Uhr ist Gartenkonzert mit festlicher Beleuchtung und Feuerwerk in den Kuranlagen von Cannstatt.

Dienstag, den 18. September, Vormittags 9 Uhr: 2. Abteilungssitzung (Vorträge über Funktionentheorie, zweite Gruppe).

F. Hartogs-München: Über neuere Untersuchungen auf dem Gebiete der analytischen Funktionen mehrerer Variablen (Referat).
P. Stäckel-Hannover: Über Potenzreihen von mehreren Veränderlichen.
M. Krause-Dresden: Zur Theorie der Funktionen reeller Veränderlichen.
D. Hilbert-Göttingen: Über Wesen und Ziele der Theorie der Integralgleichungen.
E. Hilb-Augsburg: Über eine Erweiterung des Kleinschen Oscillations-Theorems.
H. Minkowski-Göttingen: Über ein noch zu bestimmendes Thema aus der theoretischen Physik.
P. Koebe-Göttingen: Über konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Bereiche.

Nachmittags 3 Uhr: 3. Abteilungssitzung (Vorträge über Geodäsie und Astronomie).

C. Driencourt-Paris: Sur l'astrolabe à prisme (instrument Claude-Driencourt) et ses résultats dans la détermination de l'heure et de la latitude.
C. Stechert-Hamburg: Über die Methoden der Zeit- und Breitenbestimmungen durch Beobachtung gleicher Zenitdistanzen.
E. Hammer-Stuttgart: Demonstration einiger neuerer geodätischer und topographischer Instrumente: a) des Guillaume-Carpentierschen Drahtbasismeßapparats mit Invardrähten (Referat mit praktischer Vorführung), b) des Hammer-Fennelschen selbstrechnenden Tachymeter-Theodolits.
A. Marcuse-Berlin: Die astronomische Ortsbestimmung im Luftballon.
S. Wellisch-Wien: Die Bestimmung der Erdgestalt durch Ausgleichung von Breitengradmessungen nach der Methode der kleinsten Produkte.
F. S. Archenhold-Treptow: Über die Resultate der Sonnenfinsternisexpedition der Treptow-Sternwarte zu Burgos.
R. v. Sterneck-Czernowitz: Über die scheinbare Form des Himmelsgewölbes.

Abends 7 Uhr ist Festmahl in der Liederhalle.

Mittwoch, den 19. September, Vormittags 9 Uhr: 4. Abteilungssitzung (Vorträge über Geometrie).

A. Schoenflies-Königsberg: Bericht über die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. II. Teil (Geometrie und Funktionentheorie).
K. Rohn-Leipzig: Lineale Konstruktion der Kurve 3. Ordnung.
Th. Schmid-Wien: Zur konstruktiven Behandlung des Achsenkomplexes.
R. Müller-Braunschweig: Polbestimmung für Verzweigungslagen bei der Bewegung eines ebenen ähnlich-veränderlichen Systems in seiner Ebene.
G. Landsberg-Breslau: Über die Totalkrümmung.

F. Meyer-Königsberg: Anwendung des erweiterten Euklidischen Algorithmus auf Resultantenbildungen.

Nachmittags 3 Uhr: 5. Abteilungssitzung (Vorträge über angewandte Mathematik).

C. Runge-Göttingen: Über graphische Lösung von Differentialgleichungen.

R. Mehmke-Stuttgart: a) Über neue Mechanismen zur Lösung von Aufgaben der Dynamik, mit Anwendung auf die mechanische Integration von Differentialgleichungen 2. und höherer Ordnung und von Systemen solcher. b) Über neue Anwendungen der Rolle auf das Zeichnen verschiedener Klassen von Kurven und auf die Ausführung von Berührungstransformationen. c) Vorführung verschiedener Apparate.

J. Kübler-Eßlingen: Das Gleichgewichtsverhältnis der Materie zum Weltraum und die dadurch bedingte stufenweise Entwicklung.

A. Wagenmann-Stuttgart: Mathematische Theorie des Entwicklungsgedankens.

E. Hackh-Stuttgart: Die Mathematik der Begriffe.

Abends sind Festvorstellungen in den königlichen Theatern.

Donnerstag, den 20. September, Vormittags 9 Uhr findet die Geschäftssitzung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung statt.

Tagesordnung:

1. Bericht über den Stand der D. M.-V. und die Tätigkeit des Vorstandes.
2. Bericht über die literarischen Unternehmungen der D. M.-V.
3. Bericht der Kommissionen.
4. Beschlußfassung über die Verwendung des Aktivrestes des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses.
5. Begründung eines Mathematiker-Archivs.
6. Eulerfeier im Jahre 1907.
7. Herstellung eines ausführlichen Mitgliederverzeichnisses der D. M.-V.
8. Neuwahlen in den Vorstand. Wahl der Kassenrevisoren.

A. Pringsheim, Vorsitzender. A. Krazer, Schriftführer.

Mathematische Gesellschaft zu Göttingen. *9. Sitzung am 10. Juli 1906.* P. Roth referiert über W. Wirtingers Untersuchungen über allgemeine ϑ-Funktionen und setzt das Auftreten allgemeiner Thetas mit vier Variablen bei gewissen Gebilden vom Geschlechte 9 näher auseinander. Herr Taber berichtet über eine von ihm gemachte Anwendung der komplexen Zahlsysteme auf lineare Gruppen, insbesondere auf die Reduzibilitätskriterien, wenn die Gruppe in einem gegebenen Rationalitätsbereich liegt. *10. Sitzung am 17. Juli 1906.* L. Nelson trägt vor über die Geschichte und Philosophie des Infinitesimalbegriffes. *11. Sitzung am 24. Juli 1906.* E. Jaensch trägt vor über die Begründung der Geometrie auf Kongruenz und Bewegung und die Anschauungen der Psychologie. *12. Sitzung am 31. Juli 1906.* D. Hilbert bespricht die Hauptpunkte seiner vierten Mitteilung über lineare Integralgleichungen aus den Gött Nachr. 1906, welche die Transformationstheorie der quadratischen und bilinearen Formen von unendlich vielen Variablen enthält.

V. Internationaler Kongreß für Versicherungs-Wissenschaft. Der 5. Internationale Kongreß für Versicherungs-Wissenschaft findet zu Berlin vom 10. bis 15. September 1906 statt. Anmeldungen, Anfragen und Mitteilungen sind zu richten an den Generalsekretär des Deutschen Vereins für Versicherungs-Wissenschaft, Herrn Dr. A. Manes in Berlin W. 50, Spichernstr. 22. Ehrenpräsident des internationalen Kongresses ist Graf von Posadowski.

2. Preisaufgaben und gekrönte Preisschriften.

Preisaufgaben der Belgischen Akademie der Wissenschaften für 1907. *Trouver, en hauteur et en azimut, les expressions des termes principaux des déviations périodiques de la verticale, dans l'hypothèse de la non-coincidence des centres de gravité de l'écorce et du noyau terrestres. (Preis 800 Frs.)*

Entre les éléments de deux formes du second ordre (deux systèmes plans non superposés, un système plan et une gerbe, deux gerbes de sommets différents), on établit une correspondance quadratique („Verwandtschaft zweiten Grades" dans le sens de Reye, Geometrie der Lage, vol. II, chap. XXII). Étudier les systèmes d'éléments qui on déduit par jonction ou par intersection des couples d'éléments homologues des deux formes du second ordre. (Preis 800 Frs).

Charles Lagrange-Preis. Der Charles Lagrange-Preis für das beste gedruckte oder ungedruckte mathematische oder experimentelle Werk, das unsere mathematischen Kenntnisse in der Geophysik wesentlich fördert, in Höhe von 1200 Frs., wird in der Jahressitzung der Belgischen Akademie der Wissenschaften in Brüssel 1909 zuerkannt werden. Der Termin für die Einlieferung der Werke an den ständigen Sekretär läuft bis zum 31. Dezember 1908.

3. Hochschulnachrichten.

Verzeichnis der für das Wintersemester 1906/7 angekündigten Vorlesungen über die mathematischen Wissenschaften.

Berlin. Schwarz, Differentialrechnung (4); Übungen dazu; Synthetische Geometrie (4); Elementargeometrische Herleitung der wichtigsten Eigenschaften der Kegelschnitte; Seminar; Kolloquium. Frobenius, Algebra (4); Seminar. Schottky, Integralrechnung (4); Übungen dazu; Allgemeine Funktionentheorie (4); Seminar. Hettner, Bestimmte Integrale (2). Knoblauch, Determinanten (4); Krumme Flächen (4); Raumkurven (1). Schur, Gewöhnliche Differentialgleichungen (4). Landau, Zahlentheorie (4). Lehmann-Filhés, Analytische Geometrie (4). Förster, Geschichte der mittelalterlichen Astronomie (2); Kosmische Erkenntnis und psychische Probleme (1); Theorie und Kritik der Raummessung (2). Struve, Sphärische Astronomie (3); Übungen. Bauschinger, Bahnbestimmung der Himmelskörper (3); Übungen dazu. Ristenpart, Theorie der Finsternisse und Sternbedeckungen; Berechnung der Finsternisse von 1909. Scheiner, Einleitung in die Astrophysik II (3); Astrophysikalisches Kolloquium. Helmert, Gradmessungen (1); Methode der kleinsten Quadrate (1). Marcuse, Allgemeine Himmelskunde mit Lichtbildern; Kolloquium über astronomische Geographie; Theorie und Praxis geographisch- und nautisch-astronomischer Ortsbestimmungen. Planck, Allgemeine Mechanik (4); Mathematisch-physikalische Übungen. Krigar-

Menzel, Theoretische Physik V (4). Neesen, Elementare Mechanik (2). Weinstein, Erdmagnetismus und Erdelektrizität; Mathematische Physik (4). Warburg, Ausgewählte Kapitel aus der theoretischen Physik (2). Valentiner, Kinetische Theorie der Gase (2). Gehrcke, Ausgewählte Kapitel aus der Optik. Aschkinaß, Elemente der höheren Mathematik, mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen. Grüneisen, Über Differentialgleichungen von Schwingungsvorgängen. Slaby, Elektrotechnik (4); Funkentelegraphie (2). Meyer, Einführung in die moderne Maschinentechnik (2); Exkursionen. Ihering, Maschinenkunde mit Übungen.

Bonn. Study, Nicht-euklidische Geometrie (4); Einleitung in die analytische Mechanik (4); Seminar. Kowalewski, Infinitesimalrechnung II (4); Übungen dazu; Theorie der Fourierschen Reihen (2); Geometrie der Zahlen (2); Seminar. London, Elemente der analytischen Geometrie der Ebene und des Raumes (4); Übungen dazu; Darstellende Geometrie II mit Zeichenübungen (3); Seminar. Schmidt, Einführung in die Algebra (3); Determinanten (2). Küstner, Theorie der Bahnbestimmung der Planeten und Kometen (3); Topographie des Sonnensystems (1). Mönnichmeyer, Allgemeine Störungen (2). Kayser, Physikalisches Kolloquium. Bucherer, Ausgewählte Kapitel aus der Lehre vom Elektromagnetismus mit Demonstrationen (2); Praktische Anleitung zur Ausführung einfacher Experimente für Lehramtskandidaten. Kaufmann, Elektrizität und Magnetismus (4); Übungen dazu. Pflüger, Dispersion des Lichtes (1).

Braunschweig. Dedekind, Elemente der Zahlentheorie (1); Theorie der Fourierschen Reihen (2). Fricke, Analytische Geometrie und Algebra (3); Differential- und Integralrechnung (5); Übungen dazu (2). Müller, Darstellende Geometrie (4); Übungen dazu (6); Geometrie der Lage (2); Ausgewählte Kapitel aus der Theorie der Kurven und Flächen (2). Wernicke, Statik starrer und elastisch-fester Körper (4); Übungen (2). Wieghardt, Technische Mechanik (3); Übungen dazu (1). Schöttler, Technische Mechanik II (4); Übungen dazu (1); Kinematik (1). Körner, Graphische Statik (2); Übungen dazu (2). Koppe, Geodäsie I (2); Übungen dazu (2); Ausgleichungsrechnung I (2); Übungen dazu (4); Geodätisches Praktikum (3).

Breslau. Rosanes, Analytische Geometrie des Raumes (3); Elemente der Theorie der Differentialgleichungen (2); Seminar. Sturm, Zahlentheorie (3); Geometrische Örter höheren Grades (3); Seminar. Kneser, Analytische Mechanik (4); Übungen dazu; Theorie der Fourierschen Reihen und Integrale (2); Seminar. Landsberg, Einleitung in die höhere Analysis (Reihenlehre) (2); Integralrechnung (4); Übungen dazu; Anwendungen der Theorie der elliptischen Funktionen (1). Franz, Mechanik des Himmels II (4); Theorie der Bahnrechnung der Planeten (2); Astronomisches Seminar; Astronomisches Kolloquium. Lummer, Theoretische Ergänzungen zur Experimentalvorlesung über Physik. Physikalisches Kolloquium. Pringsheim, Theoretische Physik III (4). Schäfer, Thermodynamik und kinetische Theorie der Gase (4).

Erlangen: Gordan, Analytische Geometrie der Ebene (4); Zahlentheorie (4); Seminar. — Noether: Differential- und Integralrechnung I (4); Bestimmte Integrale und Fouriersche Reihen (2); Algebraische Flächen (2); Seminar. — Reiger: Astrophysik (1). — Wiedemann: Physikalisches Kolloquium; Übungen in Experimentalvorträgen für Lehramtskandidaten (1). — Wehnelt: Theoretische Physik II (1); Übungen für Lehramtskandidaten in Gemeinschaft mit Wiedemann.

Freiburg. Lüroth, Analytische Geometrie des Raumes (4); Populäre Astronomie (2); Seminar. Stickelberger, Analytische Geometrie der Ebene und Differentialrechnung (5); Funktionentheorie (3); Seminar. Löwy, Differentialgleichungen (3); Über den Zahlbegriff (2); Übungen. Weingarten, Einleitung in die Hydrodynamik (2). Seith, Elementare Geometrie der Ebene und des

Raumes (2). Königsberger, Optik mit Übungen (3); Grundlagen der Elektronentheorie (1); Übungen.

Göttingen. Klein, Elliptische Funktionen (4); Seminar. Hilbert, Differential- und Integralrechnung II mit Übungen (geleitet durch Carathéodory) (4); Mechanik der Kontinua (4); Seminar. Minkowsky, Enzyklopädie der Elementarmathematik (4); Invariantentheorie (2); Seminar. Runge, Darstellende Geometrie (4); Übungen dazu (4); Seminar. Prandtl, Ausgewählte Abschnitte der Dynamik (3); Seminar. Zermelo, Elemente der analytischen Mechanik (4); Mathematische Behandlung der Logik (1). Carathéodory, Minimalprinzipien der Mechanik und Physik (2). Herglotz, Einführung in die analytische Geometrie des Raumes (2); Übungen im Gebiete der elliptischen Funktionen (2). Voigt, Elektrodynamik (4); Kinetische Theorie der Materie (2); Seminar. Ambronn, Methode der kleinsten Quadrate (1); Bahnbestimmungen von Kometen und Planeten (3); Übungen dazu. Schwarzschild, Rotation und Figur der Himmelskörper (3); Seminar. Wiechert, Physik des Erdkörpers und seiner Oberfläche (3); Ebbe und Flut und verwandte Phänomene (1); Geophysikalisches Praktikum. Riecke, Mathematisch-physikalisches Seminar. Abraham, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik (4). Brendel, Die mathematische Technik des Versicherungswesens (3). Bose, Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften (3). Simon, Einführung in die Elektrotechnik; Elektrische und magnetische Kreise; Probleme der Telephonie.

Greifswald. Thomé, Elliptische Funktionen II (4); Die hypergeometrische Funktion (2); Seminar. Engel, Differential- und Integralrechnung I (4); Übungen dazu; Analytische Geometrie des Raumes (2); Theorie der Transformationsgruppen (4); Seminar. Vahlen, Theorie der Differentialgleichungen (3); Übungen dazu. Mie, Theoretische Optik (4); Übungen dazu; Besprechung neuerer physikalischer Arbeiten (mit Starke). Holtz, Mechanik und Molekularphysik (1); Statische und Gewitterelektrizität (1); Physik der Gestirne (2). Starke, Mathematische Ergänzungen der Experimentalphysik. Schreber, Die Kraftmaschinen (2). Berg, Geschichte der neuern Physik.

Halle. Cantor, Differential- und Integralrechnung mit Übungen (5); Seminar. — Wangerin, Partielle Differentialgleichungen und ihre Anwendung in der mathematischen Physik (4); Variationsrechnung (2); Sphärische Trigonometrie und mathematische Geographie (2); Seminar. — Gutzmer, Integralrechnung mit Übungen (5); Darstellende Geometrie mit Übungen (4); Seminar. — Eberhard, Algebra II (3); Übungen dazu; Analytische Geometrie des Raumes (2). — Bernstein, Konforme Abbildungen (Riemannsche Funktionentheorie) (2); Wahrscheinlichkeitsrechnung mit Anwendungen (1); Praktikum der Versicherungsmathematik (2); Kursus der Herstellung mathematischer Modelle (2). — Buchholz, Höhere Geodäsie (2); Methoden der Bahnbestimmung der Planeten und Kometen (1). — Dorn, Theorie der Elastizität (2). — Schmidt, Theorie der Wärme (3); Übungen zur Physik elektrischer Schwingungen. — Walter, Festigkeitslehre (2); Einführung in die Technik des Eisenbahnbaues und Betriebes (2); Mechanische Technologie der Baustoffe und ihre Verwendung (1); Übungen im Maschinenlaboratorium. — Berndt, Einführung in die Elektrotechnik (2).

Hannover. Kiepert, Differential- und Integralrechnung mit Übungen; Variationsrechnung. Stäckel, Differential- und Integralrechnung mit Übungen; Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes. Petzold, Algebraische Analysis und Trigonometrie. Rodenberg, Darstellende Geometrie. Weber, Mechanik. Reinhertz, Geodäsie.

Heidelberg. Königsberger, Höhere Algebra (4); Theorie der Differentialgleichungen (2); Variationsrechnung (1); Seminar. Cantor, Differential- und Integralrechnung (4); Übungen dazu; Politische Arithmetik. Köhler, Synthetische

Geometrie (4). Böhm, Theorie und Anwendung der einfachen und vielfachen Integrale (3); Elementarmathematik (4). Valentiner, Bahnbestimmung der Kometen und Planeten (3); Kapitel der Stellarastronomie. Wolf, Elemente der Astronomie und mathematischen Geographie (2). Pockels, Theorie der Elektrizität und des Magnetismus (3); Übungen zur theoretischen Physik; Einführung in die Elektrotechnik. Geophysik II. Weber, Die Grundlagen des Energieprinzips in elementarer Darstellung (2); Vektoranalysis, Wissenschaftlich-photographische Übungen. Kalähne, Entladung der Elektrizität in Gasen und Radioaktivität.

Jena: Thomae: Bestimmte Integrale (4); Differentialgleichungen (4); Seminar. — Haußner: Integralrechnung mit Übungen (5); Mathematische Näherungsmethoden (2); Analytische Geometrie des Raumes (4); Seminar. — Frege: Funktionentheorie nach Riemann (4); Begriffsschrift (1). — Rau: Darstellende Geometrie (4); Übungen dazu (3); Mechanik (4). — Knopf: Störungsrechnung (3); Mechanische Quadratur (2). — Auerbach: Theoretische Optik (4); Einführung in die theoretische Physik (2). — Straubel: Grundzüge der geometrischen Optik (1). — Reich: Einführung in die Technik (1).

Königsberg. Meyer, Analytische Geometrie II (3); Übungen dazu; Integralrechnung (4); Analytische Mechanik (4); Seminar. — Schoenflies, Theorie der Differentialgleichungen (4); Seminar. — Saalschütz, Über pseudo-elliptische Integrale III. Gattung mit den nötigen Entwicklungen aus der Theorie der elliptischen Funktionen nach der Methode der Fundamenta Jacobis (2); Übungen zur Integralrechnung. — Battermann, Sphärische Astronomie (2); Methoden des wissenschaftlichen Rechnens. — Cohn, Theorie der Beobachtungsfehler (2); Ausgewählte Kapitel der Himmelsmechanik (2). — Volkmann, Theorie der Elektrizität und des Magnetismus (4); Mathematisch-physikalisches Seminar. — Schmidt, Die großen Physiker und ihre Leistungen.

Kiel. Pochhammer, Analytische Geometrie der Ebene (3); Theorie der Funktionen einer komplexen Variable (3); Seminar. Heffter, Differential- und Integralrechnung II (4); Übungen dazu; Einleitung in die Zahlentheorie (4); Seminar. Weinnoldt, Darstellende Geometrie II (3). Kobold, Einleitung in die höhere Geodäsie (2); Geodätische Übungen. Harzer, Rotationsprobleme der Mechanik des Himmels (3); Übungen im numerischen Rechnen. Kreutz, Theorie der speziellen Störungen (2); Übungen im astronomischen Rechnen. Großmann, Theorie der Refraktion (2). Strömgren, Bewegungen der Satelliten in unserem Sonnensystem (1); Mathematische Geographie (1). Lenard, Besprechung physikalischer Fragen (mit Becker). Weber, Einleitung in die theoretische Physik (4); Meteorologie (1); Physikalisches Kolloquium; Theorie physikalischer Meßapparate mit Übungen. Becker, Die geschichtliche Entwicklung der Elektrizitätstheorien, insbesondere die Maxwellsche Theorie.

Leipzig. Neumann, Analytische Mechanik (4); Seminar. Mayer, Variationsrechnung (4). Hölder, Über die Grundlagen der Arithmetik und der Größenlehre (2); Differential- und Integralrechnung (5); Seminar. Rohn, Anwendung der Differentialrechnung auf Raumkurven und Flächen (4); Invarianten (2); Seminar. Hausdorff, Zahlentheorie (4). Liebmann, Analytische Geometrie des Raumes (4); Übungen dazu. Bruns, Allgemeine Himmelskunde (4); Seminar für wissenschaftliches Rechnen. Peter, Ausgewählte Kapitel der praktischen Astronomie (2); Praktische Übungen auf der Sternwarte. Fischer, Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften. Des Coudres, Elektrizität und Magnetismus (Maxwellsche Theorie) (4); Vektoranalysis (1); Seminar über Thermodynamik; Physikalisches Kolloquium (mit Wiener). Dahms, Elemente der geometrischen Optik; Allgemeine Stereoskopie. Marx, Kathoden-, Radium- und Röntgenstrahlen; Ionisation der Gase. Fredenhagen, Kinetische Theorie des gasförmigen und flüssigen Zustandes. Böttger, Phasenregel und ihre praktische Bedeutung. v. Öttingen, Meteorologie. Scholl, Technische Krafterzeugung.

Marburg. Hensel, Synthetische Geometrie (4); Determinanten (3); Wahrscheinlichkeitsrechnung (1); Seminar. Neumann, Anwendungen der elliptischen Funktionen (3); Variationsrechnung (3); Übungen. v. Dalwigk, Analytische Geometrie des Raumes mit besonderer Berücksichtigung der Flächen 2. Ordnung (4); Krümmungstheorie ebener Kurven und kinematische Untersuchungen über ebene Kurven (2); Ausgewählte Kapitel aus der Geodäsie, Topographie, Flächenabbildung und Kartographie (2); Übungen dazu; Konstruktive Übungen über Kegelschnitte und Flächen 2. Ordnung. Jung, Flächentheorie (3). Fueter, Integralrechnung (4); Übungen dazu. Richarz, Ergänzungen zur Experimentalphysik; Physikalisches Kolloquium (mit Feußner); Übungen zur theoretischen Physik (mit Feußner). Feußner, Theoretische Physik (4); Übungen dazu; Physikalisches Kolloquium. Östreich, Mathematische Geographie. Schulze, Hydrodynamik und Akustik (2); Anleitung zur Berechnung einfacher physikalischer Aufgaben.

München (Technische Hochschule). v. Dyck, Höhere Mathematik I. mit Übungen; Analytische Mechanik. — Finsterwalder, Höhere Mathematik III. mit Übungen; Theorie der gerichteten Größen (Vektoren) mit Übungen. — v. Dyck und Finsterwalder, Mathematisches Seminar (Colloquium). — v. Braunmühl, Grundzüge der höheren Mathematik (für Architekten und Chemiker) mit Übungen; Projektivische Geometrie in synthetischer Behandlung mit Übungen; Mathematisch-historisches Seminar. — Burmester, Darstellende Geometrie I. mit Übungen. — M. Schmidt, Vermessungskunde I. mit Praktikum; Landesvermessung; Katastertechnik; Geodätisches Praktikum III; Kartierungsübungen. — Föppl, Technische Mechanik II. (graphische Statik) und III. (Festigkeitslehre); Übungen zur graphischen Statik. — Bischoff, Ausgleichungsrechnung (Praktikum); Mechanisches und graphisches Rechnen. — Kutta, Elementare Mathematik; Trigonometrie mit besonderer Berücksichtigung des Studiums der Vermessungsingenieure mit Übungen; Algebraische Analysis; Wahrscheinlichkeitsrechnung. — Ewers, Einführung in die Vektorentheorie und Anwendung derselben auf physikalische Probleme. — Großmann, Elemente der Astronomie. — Schröter, Mechanische Wärmetheorie (Technische Thermodynamik) mit Übungen. — Fischer, Ausgewählte Kapitel der Physik (Entwicklung der Grundbegriffe und Grundgesetze).

München. Lindemann, Theorie der Funktionen einer komplexen Variablen (4); Anwendungen der Infinitesimalrechnung auf die Theorie der Kurven und Flächen im Raume (4); Über Transformationsgruppen (2); Seminar. Voß, Algebra (4); Theorie der algebraischen Kurven (4); Seminar. Pringsheim, Differentialrechnung (5); Zahlentheorie (4). Döhlemann, Darstellende Geometrie I (5); Übungen dazu; Liniengeometrie in synthetisch-analytischer Behandlung (4). v. Weber, Analytische Geometrie der Ebene (4); Übungen dazu; Integralrechnung mit Übungen (4). Korn, Potentialtheorie und Kugelfunktionen (4). Brunn, Mengenlehre (4). Hartogs, Ausgewählte Kapitel aus der Funktionentheorie (2). Röntgen, Physikalisches Kolloquium. Grätz, Analytische Mechanik (5); Über die Fortschritte der exakten Naturwissenschaften. v. Seeliger, Mechanik des Himmels I (4); Astronomisches Kolloquium. Donle, Einführung in die elektromagnetische Theorie des Lichtes (2).

Münster. Killing, Synthetische Geometrie (4); Analytische Geometrie II (4); Übungen dazu; Seminar. v. Lilienthal, Differential- und Integralrechnung II (4); Funktionentheorie (4); Seminar. Dehn, Mechanik II (4); Darstellende Geometrie mit Übungen (2). Plaßmann, Orts- und Zeitbestimmung (2); Über den Mond (2); Zeitrechnung und Kalenderkunde (2); Übungen im astronomischen Beobachten und Rechnen. Heydweiller, Elementar-mathematische Ergänzungen zur Experimentalphysik; Physikalisches und chemisches Kolloquium. Konen, Theoretische Optik (3); Übungen in Demonstrationsversuchen und in Anfertigung einfacher physikalischer Apparate; Übungen zur Optik.

Rostock. Stande, Theorie der analytischen Funktionen (4); Differential- und Integralrechnung (4); Seminar. Dieterici, Einleitung in die theoretische Physik (3); Praktikum für Mathematiker (8); Physikalisches Seminar (2); Kümmell, Potentialtheorie (1).

Straßburg. Reye, Geometrie der Lage (3); Analytische Mechanik (2); Seminar. Weber, Differential- und Integralrechnung (4); Anwendungen der elliptischen Funktionen auf Algebra und Zahlentheorie (2); Seminar. Wellstein, Analytische Dreiecksgeometrie (2); Einleitung in die Gruppentheorie (3); Seminar. Timerding, Analytische Geometrie der Ebene (3); Übungen dazu; Hydraulik (1); Darstellende Geometrie I (2); Übungen dazu. Epstein, Die hypergeometrische Differentialgleichung (2). Simon, Geschichte der Mathematik im Altertum in Verbindung mit Kulturgeschichte (2). — Mathematisches Kolloquium. — Becker, Theorie der speziellen Störungen und der Bahnverbesserung (2); Übungen dazu; Theorie der Ausgleichung der Beobachtungsfehler (1); Astronomisches Kolloquium; Beobachtungen. Wirtz, Einführung in die Theorie der Gezeiten und verwandter Phänomene (1); Theorie der Refraktion (1) Braun, Physikalisches Kolloquium. Cohn, Elektrizitätslehre (4). Hergesell, Physik der Erde; Meteorologisches Kolloquium.

Stuttgart. Reuschle, Kurvendiskussion (1); Analytische Geometrie des Raumes (2); Übungen dazu; Ausgewählte Kapitel aus der neueren analytischen Geometrie der Ebene und des Raumes (3); Differential- und Integralrechnung (2); Übungen dazu (2); Seminar. Mehmke, Darstellende Geometrie (4); Übungen dazu (6); Vektoren- und Punktrechnung (3); Übungen dazu (1); Seminar. Bretschneider, Repetitionen in niederer Mathematik (2). Wölffing, Elemente der Differential- und Integralrechnung mit Übungen (4); Höhere Algebra (3). Roth, Schattenkonstruktionen und Beleuchtungskunde (4). Stübler, Niedere Analysis (1); Auflösung numerischer Gleichungen (1). v. Autenrieth, Technische Mechanik (6); Übungen dazu (2). Hammer, Praktische Geometrie I (4); Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate (2); Astronomische Zeit- und direkte geographische Ortsbestimmung (2). Hohenner, Praktische Geometrie I; Trigonometrie mit Übungen (4); Kartenprojektionen (1); Übungen dazu (1); Katastermessungen (2); Markscheidekunde (3). Heer, Plan- und Geländezeichnen (4). Koch, Theoretische Physik (2); Meteorologie (1). Lang, Elektromagnetische Schwingungen (2).

Tharandt. Kunze, Forstmathematik (3). Weinmeister, Infinitesimalrechnung II mit Übungen (4); Mathematisches Repetitorium (2).

Tübingen: v. Brill: Einführung in die höhere Mathematik (4); Über nichtstarre Systeme und die Mechanik von Hertz (3); Seminar. — v. Stahl: Höhere Algebra (2); Elliptische und Abelsche Funktionen (2); Seminar. — Maurer: Höhere Anlysis II (3); Übungen dazu (1); Sphärische Trigonometrie (1); Übungen dazu (1). — Waitz: Theorie des Lichtes (3); Übungen dazu (2); Meteorologie und Klimatologie (1). — Sommerfeldt: Einführung in die Kristalloptik (1) — Gans: Theorie des Schalls (2).

Würzburg. Prym, Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen (4); Im Proseminar: a) Zahlentheorie (2); b) Einführung in die analytische Geometrie der Ebene, gemeinsam mit dem Assistenten (4). Im Seminar: Über die Funktionen einer reellen Veränderlichen (2). — Rost, Algebra (4); Darstellende Geometrie I (4); Analytische Mechanik I (4); Variationsrechnung (2). Im Proseminar: a) Übungen aus der analytischen und der synthetischen Geometrie (2); b) Übungen aus der darstellenden Geometrie, gemeinsam mit dem Assistenten (4); c) Elemente der Determinantentheorie, durch den Assistenten (2); d) Ausgewähltes Kapitel der Elementarmathematik, durch den Assistenten (2). Im Seminar: Anleitung zu selbständigen wissenschaftlichen Arbeiten. — Seitz, Theorie der

elastischen Körper (2). — Pauly, Biochemie II. Teil (1). — Harms, Ausgewählte Kapitel der theoretischen Physik (2). Übungen dazu.

Zürich. Burkhardt, Elemente der Differential- und Integralrechnung (4); Gewöhnliche Differentialgleichungen (4); Seminar. Weiler, Analytische Geometrie mit Übungen I (4); Darstellende Geometrie mit Übungen I (4); Mathematische Geographie (2). Gubler, Algebraische Analysis (2); Determinanten (1); Sphärische Trigonometrie (1). Wolfer, Einleitung in die Astronomie (3); Übungen dazu; Bahnbestimmung von Planeten und Kometen (2). Kleiner, Theoretische Physik (2).

4. Personalnachrichten.

Ernennungen, Auszeichnungen usw.:

Hofrat Alfred Ackermann-Teubner in Leipzig wurde von der Philosophischen Fakultät der Universität Greifswald gelegentlich ihrer 450 jährigen Jubelfeier ehrenhalber zum Doktor der Philosophie ernannt „... nunc mathematicis libris editis eadem officina ut non solum in Germania sed in toto fere terrarum orbe primum obtineret locum industria et consilio consecutum fautorem scientiae mathematicae et liberalem et sapientem".

Professor Dr. Finsterwalder in München wurde zum Ehrenmitgliede der schweizerischen naturforschenden Gesellschaft ernannt.

Professor Dr. J. Franz, Direktor der Sternwarte zu Breslau, wurde zum Mitgliede der Royal Astronomical Society gewählt.

Dr. Großmann, Privatdozent für Astronomie an der Universität Kiel, wurde zum Observator der Kommission für internationale Erdmessung bei der Akademie der Wissenschaften in München ernannt.

Dr. J. Ivey wurde zum ao. Professor der Mathematik und Astronomie an der Tulaner Universität ernannt.

Professor P. A. Lambert, ao. Professor der Mathematik an der Lehigh Universität, wurde zum o. Professor daselbst ernannt.

Professor A. E. Meake, ao. Professor der Mathematik an der Lehigh Universität, wurde zum o. Professor daselbst befördert.

Professor Dr. E. Müller an der Technischen Hochschule in Wien hat einen Ruf an die Technische Hochschule in Charlottenburg abgelehnt.

Professor Dr. Röntgen hat einen Ruf als Nachfolger des verstorbenen Prof. Drude zum Direktor des Physikalischen Instituts der Universität Berlin abgelehnt.

Professor Dr. G. Scheffers an der Technischen Hochschule in Darmstadt wurde zum o. Professor der darstellenden Geometrie (als Nachfolger von G. Hauck) an der Technischen Hochschule zu Charlottenburg ernannt.

Professor Dr. A. Sommerfeld in Aachen wurde zum o. Professor für theoretische Physik an der Universität München ernannt.

Professor Dr. P. Stäckel an der Technischen Hochschule in Hannover wurde zum korrespondierenden Mitgliede der Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen gewählt.

Professor E. Weiß, Professor der Astronomie an der Universität Wien, wurde zum korrespondierenden Mitgliede der Akademie der Wissenschaften in Paris gewählt.

Professor Dr. Weinmeister wurde für das Studienjahr 1906/07 zum Rektor der Kgl. Forstakademie zu Tharandt gewählt.

Habilitationen:

Dr. Adler, Privatdozent an der Deutschen Technischen Hochschule in Prag, ist als Privatdozent für darstellende Geometrie an die Technische Hochschule in Wien übergesiedelt.

Dr. K. Bopp hat sich an der Universität Heidelberg als Privatdozent für Mathematik habilitiert.

---

5. Vermischtes.

Von Lamontsches Stipendium für die Jahre 1907, 1908 und 1909. Aus den Renten der von Lamontschen Stipendien-Stiftung kommt demnächst ein Stipendium zu 2100 Mark zur Verleihung. Die Stiftung ist bestimmt, in erster Linie die Heranbildung junger Gelehrter im Fache der reinen Mathematik, der Physik und der Astronomie zu fördern. In zweiter Linie kann das Stipendium auch zur Förderung des höheren Studiums der Naturwissenschaften überhaupt jungen Chemikern, Mineralogen, Botanikern oder Zoologen verliehen werden. Des Stipendium wird auf drei Jahre verliehen, jedoch soll nach den ersten drei Jahren derselbe Bewerber, wenn er vorzügliche Leistungen nachzuweisen imstande ist, um fernere Beibehaltung seines Stipendiums bis höchstens drei Jahre nachsuchen können. Die Bewerber müssen an der Münchener Universität immatrikuliert, geborene Bayern und katholischer Religion sein und nach Vollendung der allgemeinen Universitätsstudien die mathemathischen Disziplinen, d. h. die reine Mathematik, die Physik oder die Astronomie zum Beruf gewählt haben oder eventuell dem höheren Studium der Chemie, Mineralogie, Botanik oder Zoologie sich widmen. Jeder Bewerber muß eigene Arbeiten, die sein Talent bekunden, oder wenigstens eine schriftliche Erklärung von einem kompetenten Gelehrten vorlegen, worin ihm bezeugt wird, daß er die Fähigkeiten, den Fleiß und die Ausdauer besitze, die nötig sind, um eine höhere wissenschaftliche Ausbildung zu erlangen. Die Stipendiaten sollen in der Regel am Sitze der Münchener Universität sich aufhalten und immatrikuliert bleiben, doch können die Stipendien mit besonderer Bewilligung der philosophischen Fakultät und des akademischen Senats zu Reisestipendien benutzt werden. Gesuche sind auf der Münchener Universitätskanzlei längstens bis 31. Oktober l. J. einzureichen.

Literarisches.

1. Notizen und Besprechungen.

Die Kultur der Gegenwart. Ihre Entwicklung und ihre Ziele. Herausgegeben von Paul Hinneberg in Berlin. In 4 Teilen. Jeder Teil in mehreren Abteilungen. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner.

Teil I: Die geisteswissenschaftlichen Kulturgebiete. 1. Hälfte. Religion und Philosophie, Literatur, Musik und Kunst (mit vorangehender Einleitung zu dem Gesamtwerk).

„ II: Die geisteswissenschaftlichen Kulturgebiete. 2. Hälfte. Staat und Gesellschaft, Recht und Wirtschaft.

Teil III: Die naturwissenschaftlichen Kulturgebiete. Mathematik, Anorganische und Organische Naturwissenschaften, Medizin.

„ IV: Die technischen Kulturgebiete. Bau-Technik, Maschinen-Technik, Industrielle Technik, Landwirtschaftliche Technik, Handels- und Verkehrs-Technik.

[I und II haben zu erscheinen begonnen, III und IV sind in Vorbereitung.]

Es ist ein Riesenwerk, von dem hier der erste Ausschnitt[1]) fertig dargeboten wird. Die Kultur der Gegenwart, ihre Entwicklung und ihre Ziele soll es darstellen in vier Teilen, von denen die ersten beiden die Geisteswissenschaften, die folgenden Naturwissenschaft und Technik umspannen werden.

Schon die Fassung des Titels deutet an, daß es sich hier nicht um eine Enzyklopädie des Wissens, eine Aufstapelung toter Erkenntnisse und Notizen handelt: vielmehr soll das Werk mitten hineinführen in das Werden und Wachsen unserer Kulturschätze und -anschauungen, soll zeigen, wie sich bei der wissenschaftlichen Arbeit auf allen Gebieten die Ausblicke und Ziele verschieben und weiten, und damit auch den Einzelforscher in seiner Kleinarbeit zur Selbstbesinnung und zum scharfen Erfassen und Wiederdurchdenken der größten und höchsten Aufgaben seines Tuns einladen. Nur Toren können im Ernste die Spezialisierung beklagen, wie sie heutzutage auf allen Gebieten der Wissenschaft eingetreten ist: ohne die Spezialisierung ist nirgends ein Fortschritt möglich, sie hat sich mit der Notwendigkeit eines Naturgesetzes überall durchgesetzt, weil sie auf der Beschränktheit der Kraft des einzelnen beruht. Aber sie trägt auch ihr Korrektiv in sich selbst: wie sie die Kooperation akademischer Körperschaften für große wissenschaftliche Unternehmungen hervorgelockt hat und noch zu immer weiterer Ausdehnung bringen wird, so zeitigt sie von selbst das Bedürfnis nach zusammenfassenden, verbindenden Darstellungen aller Art, wie sie denn ja auch heute auf allen Gebieten des Wissens in früher nie geahnter Zahl und Umfänglichkeit geschaffen werden.

So ist auch das vorliegende Werk, das alle die einzelnen Gebiete zusammenfassen soll, selbst ein Erfordernis der Fortschritte der Kultur, die es schildern will. Aristoteles hat einst die griechische und damit die heutige Wissenschaft begründet, indem er seine Schüler und Nachfolger hinaussandte an die Einzelarbeit auf den verschiedensten Gebieten des Forschens und Erkennens; heute werden einmal die Vorkämpfer aus den unterdes so viel zahlreicher gewordenen Provinzen zurück- und zusammenberufen, um zu berichten, was gewonnen worden ist, wie es erkämpft wurde und wohin die neuen Züge gehen sollen.

Aber konnte *ein* Mann seinerzeit schon die Arbeiter hinaussenden auf die weiten Felder, wer durfte heute hoffen, die zweihundert (denn so viel ungefähr werden nötig sein) für dieses Werk zusammenzuwerben: sollten es doch alle nicht nur gereifte Forscher sein, sondern Führer und Pfadfinder, die auch über die neuen Ziele ihrer Wissenschaft das Wort zu nehmen imstande seien. Die Autorität *eines* allseitigen Gelehrten konnte nicht den Werberuf vertreten; nicht einmal ein Leibniz besaß noch die Universalität,

---

1) Teil I, Abteilung VIII, die griechische und lateinische Literatur und Sprache von U. v. Wilamowitz-Möllendorff, K. Krumbacher, J. Wackernagel, Fr. Leo, E. Norden, F. Skutsch. [VII, 464 S.] 1905. geh. ℳ 10.—, geb. ℳ 12.—.

die in diesem Werke umspannt wird. So konnte nur der Gedanke selbst, die große Sache, die Fahne werden, um die sich alle scharten. Wahrhaftig, es gehörte nimmermüder Mut dazu, unter solchen Umständen den Gedanken dieses Werkes auszudenken, den Plan festzulegen, die Mitarbeiter zu sammeln; wir glauben es dem rührigen Herausgeber gerne, daß das Werk erst „nach langjährigen Vorbereitungen auf Grund zahlloser Konferenzen und Korrespondenzen“ in Angriff genommen worden ist. Und wir dürfen stolz darauf sein, daß es wieder Deutschland ist, wo ein solcher Riesenbau geplant und ausgeführt wird, daß noch heute in Deutschland große Gedanken ihre einigende Kraft in solcher Weise zu bewähren vermögen.

Merkwürdigerweise sind es die „klassischen“ Philologen, die zuerst mit ihrem Anteil hervortreten. Und man darf es — um das gleich vorweg zu nehmen — ruhig aussprechen: wenn die noch ausstehenden Teile des Ganzen gleich großzügig, anregend und genußbringend ausfallen, wie dieser Band auf die Arbeiter seines Gebietes und weit darüber hinaus zu wirken vermag, so wird das große Werk die kühnsten Hoffnungen seiner Urheber und seiner Leser erfüllen. . . . . . .

Die vorstehenden, einer in der Beilage zur Allgemeinen Zeitung Nr. 32, 1906, erschienenen Besprechung von Fr. Vollmer entnommenen Sätze kennzeichnen in trefflicher Weise die hohe Bedeutung des Gesamtunternehmens der „Kultur der Gegenwart“ wie der bisher fertig gestellten Bände.[1]) Möge es dem Herausgeber gelingen, die mathematischen, naturwissenschaftlichen und technischen Abteilungen in einer Weise auszugestalten, die der außerordentlichen Bedeutung dieser Zweige für die Kultur der Gegenwart voll entspricht. Vor allem ist es freilich Aufgabe der Fachkreise, zur Erreichung dieses Zieles beizutragen und dahin zu wirken, daß die genannten Wissenschaften in dem umfassenden Unternehmen so dargestellt werden, daß nichtfachmännisch gebildeten Kreisen ein wahrer Maßstab für die Beurteilung der Bedeutung der einzelnen naturwissenschaftlichen und technischen Gebiete, ihrer Leistungen und ihres Kulturwertes, dargeboten werde: Es gilt, eine Mission zu erfüllen. G.

Die physikalischen Institute der Universität Göttingen. Festschrift im Anschlusse an die Einweihung der Neubauten am 9. Dezember 1905. Herausgegeben von der Göttinger Vereinigung zur Förderung der angewandten Physik und Mathematik. Mit zahlreichen Abbildungen und Tafeln. [IV, 200 S.] gr. 4. Leipzig 1906, B. G. Teubner.

Den unmittelbaren Anlaß zu der Veröffentlichung dieser Schrift bildete das Fest der Einweihung der neuen physikalischen Institute in Göttingen. Es ist darin zunächst eine Beschreibung dieser Feier enthalten mit den

1) Außer Teil I, Abt. VIII sind noch erschienen: Teil I, Abt. 1: Die allgemeinen Grundlagen der Kultur der Gegenwart. Bearbeitet von: W. Lexis, Fr. Paulsen, G. Schöppa, A. Matthias, H. Gaudig, G. Kerschensteiner, W. v. Dyck, L. Pallat, K. Kraepelin, J. Lessing, O. N. Witt, G. Göhler, P. Schlenther, K. Bücher, R. Pietschmann, F. Milkau, H. Diels. [XV, 671 S.] 1906. geh. ℳ 16.—, geb. ℳ 18.—. — Teil I, Abt. 4: Die christliche Religion mit Einschluß der israelitisch-jüdischen Religion. Bearbeitet von: J. Wellhausen, A. Jülicher, A. Harnack, N. Bonwetsch, K. Müller, F. X. v. Funk, E. Troeltsch, J. Pohle, J. Mausbach, C. Krieg, W. Herrmann, R. Seeberg, W. Faber, H. J. Holtzmann. [XI, 752 S.] 1906. geh. ℳ 16.—, geb. ℳ 18.—.

dabei gehaltenen Ansprachen des Kurators der Universität, des Prorektors, des Dekans der philosophischen Fakultät, der beiden Vorsitzenden der Göttinger Vereinigung zur Förderung der angewandten Physik und Mathematik. Eine bei Gelegenheit der Feier von der Göttinger Vereinigung an Herrn Ministerialdirektor Althoff gerichtete Adresse ist gleichfalls ihrem vollen Wortlaute nach mitgeteilt. Einen zweiten Teil der Schrift bilden die Reden, in welchen die Direktoren des physikalischen Institutes über seine Geschichte und über seine Aufgaben berichtet haben. Daran schließen sich die Beschreibungen des neuen physikalischen Hauptinstitutes und des Institutes für angewandte Elektrizität. — In den Reden der Institutsdirektoren wurde der Natur der Sache nach von der Ausdehnung gesprochen, welche der Unterricht auf dem Gebiete der Physik und auf den angrenzenden Gebieten der Mathematik an der Universität Göttingen im Laufe der letzten Jahre gewonnen hat. Es lag nahe, die kurzen Andeutungen jener Reden durch ausführlichere Mitteilungen der beteiligten Institutsdirektoren zu ergänzen. Diese Berichte über die Institute für angewandte Mathematik und Mechanik, für physikalische Chemie und für Geophysik bilden einen dritten Teil der Schrift. Sie gibt so einen vollständigen Überblick über die Entwicklung des physikalischen Studiums an der Universität Göttingen, der vielen willkommen sein wird, welche jener Entwicklung mit Interesse gefolgt sind. Den Schluß der Schrift bilden einige Daten über die Entwicklung der Göttinger Vereinigung.

Göttingen. E. Riecke.

Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung von Emanuel Czuber. I. Band. 2., sorgfältig durchgesehene Auflage. Mit 115 Figuren im Text. [XIV, 560 S.] gr. 8. Leipzig 1906, B. G. Teubner. geb. *M* 12.—.

Es sei hier darauf hingewiesen, daß das bekannte und von den Studierenden gern gebrauchte Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung von E. Czuber in zweiter, sorgfältig verbesserter Auflage erschienen ist. Die Gesamtanlage des Werkes ist dieselbe geblieben, und es sind nur kleinere Erweiterungen vorgenommen. Der Studierende findet hier einen zuverlässigen und geschickten Führer in das grundlegende Gebiet der Analysis. Die Auswahl der Beispiele ist mit Sorgfalt getroffen, und es ist eine gewisse Vielseitigkeit der Anwendungen angestrebt.

In den bekannten Lehrbüchern der Infinitesimalrechnung ist die Darstellung eine dogmatische. Eine Reihe von Lehrsätzen wird bewiesen, eine größere Zahl von Anwendungen werden gemacht. Dagegen fehlt es an dem Entwickeln von Fragestellungen, welche zu diesem System von Sätzen führen könnten. Die von Ostwald empfohlene und gewiß vorzügliche Methode ist, die historische Entwicklung des Gegenstandes in die Darstellung zu verflechten. Indes führen mehrere Wege zu demselben Ziel. Z. B. dürfte eine stärkere Berücksichtigung der von F. Klein in seiner Vorlesung über Anwendungen der Differential- und Integralrechnung entwickelten Ideen gleichfalls zur Belebung des Interesses am Gegenstande dienen.

Diese Bemerkungen sollen nicht den Wert eines Buches wie des Czuberschen herabsetzen. Man wird ein solches Buch nach den Vorzügen schätzen, die es besitzt, und nicht nach Wünschen, die man erfüllt sehen möchte, aber eine weitere Belebung der Darstellung der Infinitesimalrechnung

muß heute um so dringender gewünscht werden, als sie die Voraussetzung der angestrebten Ausdehnung des Unterrichts in derselben auf weitere Kreise bildet.

Halle a. S. FELIX BERNSTEIN.

Les Sources des Théories Physiques. — Les Origines de la Statique par P. Duhem. — Tome Premier. Paris 1905, A. Hermann.

Das vorliegende Buch bedeutet einen Markstein in den Forschungen über Geschichte der Mechanik. Der Verfasser hat uns mit einer Darstellung der Geschichte der Statik im Mittelalter beschenkt, in der wir mit Epochen der Entwicklung vertraut werden, von denen bisher so gut wie nichts bekannt war. Diese neuen Ergebnisse dürften weit über den Kreis der engeren Fachgenossen Interesse erregen. Sie waren natürlich nur dadurch zu gewinnen, daß der Verfasser auf Entdeckungen alter Werke in den Bibliotheken ausgegangen ist, daß er Schriftsteller wieder ans Licht gezogen hat, die schon seit langem in den Lehrbüchern und Schriften über Statik nicht mehr genannt worden waren.

In diese Genesis seiner Forschungen wird der Leser durch die Anlage des Buches mit hineingezogen, indem anfangs die Darstellung durchaus auf der bekannten historischen Basis beruht, dann aber durch die hinzukommenden neuen Entdeckungen schließlich auf ganz neue Grundlage gestellt wird. Diese Methode ist nicht gerade vorbildlich — man muß sich daran gewöhnen, daß auf Seite 200 verworfen wird, was auf Seite 100 gepriesen wird —, aber einem geistreichen Schriftsteller ist viel erlaubt, und der Leser wird in einer Weise zum Zeugen der Forschertätigkeit gemacht, die einen seltenen Reiz ausübt.

Analysieren wir ein wenig den reichen Inhalt des Werkes. Im Anschluß an die gangbaren Darstellungen schildert zuerst der Verfasser in kurzer kompakter Darstellung die Leistungen des Aristoteles, des Archimedes, des Leonardo da Vinci, des Cardani. Aber hier beginnt schon die Liste der unvorgesehenen Entdeckungen. Allgemein hatte man angenommen, daß das bewundernswürdige Werk des Leonardo da Vinci seinen Nachfolgern unbekannt geblieben sei. Dies ist aber ganz und gar nicht der Fall gewesen. Cardani und Benedetti haben es im 16. Jahrhundert auf das eifrigste benutzt. Insbesondere entnahm Cardani daraus seine besten Gedanken über die bewegende Kraft der Maschinen und die Unmöglichkeit einer perpetuierlichen Bewegung. Nachdem diese Feststellung gemacht war, schien es nun natürlich und einfach, den Weg der Entwicklung bis zu Galilei und Newton weiter zu verfolgen.

Aber eine unerwartete Entdeckung durchbricht zum zweiten Mal den Gang der Darstellung.

Tartaglia, dessen Name mit der Geschichte der Entdeckung der Lösung der Gleichung dritten Grades verknüpft ist, erweist sich als der Verfasser einer sehr interessanten Schrift, in der ein Spezialfall des Satzes vom Parallelogramm der Kräfte abgeleitet wird.

Er definiert den Begriff der wirkenden Schwere eines Körpers auf der geneigten Ebene und bestimmt dieselbe vollkommen richtig. Aber diese schöne Entdeckung war ein unverschämtes Plagiat, wie sein wissenschaftlicher Gegner Ferrarri aufdeckt. Sie gehörte einem Schriftsteller des XIII. Jahrhunderts: Jordanus Nemorarius.

Der Name des Jordanus Nemorarius ist in der Geschichte der Mathematik wohlbekannt. Er ist der große Erneuerer der Algebra, der Begründer einer gelehrten Tradition, die für die nächsten Jahrhunderte maßgebend ist. Er inaugiert die Epoche der mathematischen Klostergelehrsamkeit. Zu den zahlreichen Hypothesen über seine Person und Herkunft fügt Duhem eine neue: er soll aus Nemi gebürtig gewesen sein und wäre damit als Italiener anzusehen. So bekannt die Stellung des Jordanus in der Geschichte der Mathematik war, so unbekannt war sie in der Geschichte der Mechanik. Duhem hat zuerst die Schriften des Jordanus „super demonstrationem ponderis" wieder in die Hand genommen, von der sich zwei Exemplare in der Bibliothèque Nationale, eines in der Bibliotheèque Masarine befanden. Die Lektüre derselben führte zu einer völlig unerwarteten Folgerung. Jordanus hatte nicht nur durch die Hand der Araber die Wissenschaft der Hellenen empfangen, sondern er hatte die Statik um ganz neue Gesichtspunkte bereichert.

So hatte er das Hebelgesetz aus folgendem Postulat bewiesen, in dem man die Keime des Prinzips der virtuellen Veränderungen erkennen wird: Es erfordert gleiche Kraft, um verschiedene Gewichte zu heben, wenn die Gewichte sich umgekehrt wie die unendlich kleinen Hubhöhen verhalten.

Nachdem Duhem erst einmal auf die Entwicklung der Statik im Mittelalter aufmerksam geworden ist, folgt nun Schritt für Schritt die Aufdeckung des ganzen Zusammenhangs. Albert de Saxe entwickelt 1350 die Theorie des Schwerpunkts und verfällt ebenso im 15. und 16. Jahrhundert den Plagiatoren.

Ein ganz besonderes Interesse dürfte es aber erregen, daß auch das Werk des Leonardo da Vinci nicht so isoliert auftaucht, wie es bisher erschien. Wir verdanken Duhem die Bekanntschaft mit einem anonymen Schriftsteller, den er den Vorläufer des Leonardo nennt und der die Wissenschaft durch so bedeutende Ideen, wie die Definition des Drehmoments bereichert hat. Er hat außerdem zuerst das Gleichgewicht auf der schiefen Ebene bestimmt.

Leonardo da Vinci erweist sich als abhängig von der Schule, die Jordanus begründete. Der Einfluß läßt sich direkt aus dem Vergleich mit dem Buch des Blasius de Parma nachweisen, welcher eine Darstellung der Mechanik geliefert hat, die Leonardo benutzte. Erst im 16. Jahrhundert erfolgt die Reaktion gegen die Tradition der Schule des Jordanus, eine Reaktion, die notwendig war wegen mancher Irrtümer, die sich in den Entwicklungen fanden, eine Reaktion, die aber die übertriebene Wirkung hatte, den Namen des Jordanus wie seiner Nachfolger aus der Geschichte der Mechanik zu tilgen. Guido Ubaldi und Giovanni Battista Benedetti, beides ältere Zeitgenossen des Galilei, sind die Rufer im Streit und mit teils richtigen, teils falschen Argumenten eliminieren sie einen großen Teil des Falschen, aber auch des Richtigen der überkommenen Tradition.

Es sind nun Galilei, Stevin, Roberval, Descartes, unter deren Händen die Statik auf die gültigen Grundlagen gestellt wird. Auffallend gering schätzt Duhem dabei die Leistung des Galilei in der Statik, er weist seine Abhängigkeit von nicht richtigen Sätzen des Aristoteles nach und läßt ihn von dem Piedestal eines Erneuerers der Mechanik ein wenig herabsteigen. Dies wird viele überraschen, man wird abwarten müssen,

was die andern Galileiforscher dazu sagen werden. Die angezogenen Stellen allerdings sprechen sehr für Duhems Ansicht.

Stevin ist durch Machs vorzügliche, nun allerdings als veraltet anzusehende Geschichte der Mechanik weiteren Kreisen bekannt geworden. Er wird eingehend gewürdigt und in Parallele zu Archimedes gesetzt. Diese Parallelen, an denen das ganze Buch reich ist, sind überhaupt charakteristisch für die überlegene Art, in der Duhem das Ganze der Entwicklung vor Augen hat. Zwei Richtungen der Forschung in der Mechanik unterscheidet er, für die er als Grundtypen Aristoteles und Archimedes aufstellt. Die erste ist intuitiv, schafft produktive Prinzipien ohne strenge Begründung, oft nur halb richtig, aber von weitreichender Anwendungsfähigkeit, die zweite ist logisch kritisch und schafft klare, unwiderlegliche Beweise, sichere Methoden. Die erste fördert große Entdeckungen, die zweite schafft die unentbehrliche Klarheit. Sie müssen abwechselnd wirken, damit die Weiterentwicklung sich vollziehen kann. Diese Bemerkungen haben eine innere Wahrheit, die über den Bereich dieses speziellen Gebietes hinausreicht, in dem sie gewonnen sind. Sie gelten in dem ganzen Gebiet der exakten Wissenschaften.

In allgemeinen Gesichtspunkten, in speziellen Ergebnissen, in der Darstellung des Bekannten und in der Darstellung des Neuen, überall weiß der Autor interessante Gesichtspunkte hervorzuheben. Die positive Leistung des Autors muß ebenso bewundert, wie sein Buch dem Publikum zur Lektüre empfohlen werden.

Halle a. S. FELIX BERNSTEIN.

H. A. Lorentz, Professor an der Universität Leiden, **Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern.** Unveränderter Abdruck der 1895 bei E. J. Brill in Leiden erschienenen 1. Auflage. [III, 138 S.] gr. 8. Leipzig 1906, B. G. Teubner. geb. ℳ 3.20.

In dieser Schrift habe ich mir die Aufgabe gestellt, den Einfluß einer Translationsbewegung auf die elektrischen und optischen Erscheinungen theoretisch zu untersuchen. Dabei lege ich die Fresnelsche Annahme, nach welcher der Äther sich nicht an der Bewegung der ponderablen Materie beteiligt, zugrunde und finde in der Elektronentheorie das Mittel, welches es ermöglicht, die Aufgabe in Angriff zu nehmen. Der Betrachtung der Erscheinungen in ponderablen Körpern ist daher eine Auseinandersetzung der Grundlagen dieser Theorie vorausgeschickt.

Leiden. H. A. LORENTZ.

Ernst Blaschke, Regierungsrat im k. k. Ministerium des Innern, a. ö. Professor an der k. k. technischen Hochschule in Wien, **Vorlesungen über mathematische Statistik.** Die Lehre von den statistischen Maßzahlen. (A. u. d. T.: B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen, Band XXIII). Mit 17 Textfiguren und 5 Tafeln. [VIII, 268 S.] gr. 8. Leipzig 1906, B. G. Teubner. geb. ℳ 7.40.

Im ersten Teile, den beiden ersten Abschnitten des Buches werden die Methoden zur Herstellung einwandfreier statistischer Tabellen (Absterbe-

ordnungen, Invaliditätstafeln, Krankentafeln, Heiratsordnungen usw.), in den folgenden Abschnitten auf Grundlage von Untersuchungen über die Bedeutung der Tabellen die Anwendungen erörtert, welche sich hieraus einerseits für die Theorie der Personenversicherung, andererseits für das unter dem Namen der Tafelausgleichung bekannte statistische Problem ergeben.

Die Vorlesungen sollen zunächst als Studienbehelf für die Hörer der an mehreren deutschen und österreichischen Hochschulen errichteten Kurse für Versicherungstechnik dienen, dürften aber auch den Interessen weiterer Kreise entgegenkommen, weil das Personenversicherungswesen angesichts seiner dermaligen außerordentlichen Entwicklung einer umfassenden Darstellung der Grundlagen nicht entbehren kann. Der Umstand allerdings, daß das Versicherungswesen sich auch der Ergebnisse der Statistik der allgemeinen Bevölkerung in immer steigendem Maße bedient und für diese Grundlagen gleichfalls das Verständnis vermittelt werden wollte, führte zu weit allgemeinerer Problemstellung: zur Ausgestaltung „der Theorie des Personenversicherungswesens“ in die „mathematische Statistik“.

Die mathematischen Untersuchungen anderer Teile der Statistik (etwa der Preisstatistik) besonders zu berücksichtigen, schien angesichts des derzeitigen Standes der Ergebnisse derselben kein Anlaß.

Das Bestreben, den Wissenszweig vor allem für die Praxis nutzbar zu machen, führte endlich dazu, wenn auch nur im Anhange, auf einige mechanische Hilfsmittel der Forschung (die Zählmaschine) hinzuweisen und damit für deren allgemeine Verwendung die Wege zu ebnen.

Wien. Ernst Blaschke.

Lehrbuch der Funktionentheorie von **W. F. Osgood.** In 2 Bänden. I. Band. 1. Hälfte. Mit zahlreichen Figuren im Text. [306 S.] gr. 8. Leipzig 1906, B. G. Teubner. geh. ℳ 7.—.

Das vorliegende Buch des bekannten Verfassers bringt eine Darstellung der Funktionentheorie, die allgemeines Interesse erregen dürfte. Während es durch die wissenschaftliche Entwicklung der letzten Jahrzehnte feststand, daß die geometrischen Methoden Cauchys und Riemanns an Strenge nicht hinter den rein analytischen Methoden von Weierstraß zurückstehen, konnte man doch im Zweifel sein, ob nicht eine strenge Entwicklung aller zum Aufbau der Theorie erforderlichen Sätze einen Aufwand von langwierigen Entwicklungen fordere, der die einfache Eleganz der geometrischen Methode illusorisch mache. Daß man nun zugleich streng und elegant, vor allem aber streng und geometrisch die Grundlagen der Funktionentheorie entwickeln kann, beweist das Buch von Osgood in schlagender Weise.

Diejenige Disziplin, welche der geometrischen Anschauung in strengen Grenzbetrachtungen zu ihrem vollen Rechte wieder verholfen hat, ist die Mengenlehre, und der intuitive Charakter dieser Disziplin ist um so mehr zu betonen, als die Diskussion wichtiger logischer Fragen auf diesem Gebiete die Aufmerksamkeit zur Zeit anscheinend am meisten in Anspruch nimmt.

Wir sehen auf der Infinitesimalrechnung und der Mengenlehre sich den Aufbau der Funktionentheorie in der Weise vollziehen, daß zuerst die grundlegenden Sätze über reelle Funktionen, unendliche Reihen usw. abgeleitet werden, wobei eine ökonomische Beschränkung auf das Notwendigste stattfindet; dann wird der Cauchysche Satz in eingehender Ausführlichkeit behandelt.

Für den pädagogischen Takt des Verfassers ist es kennzeichnend, daß er zunächst nicht einen völlig allgemeinen Integrationsbereich wählt, sondern eine solche Randkurve sich gegeben denkt, welche von den Parallelen zur x und y Achse nur in einer endlichen Punktzahl getroffen wird. Erst dann werden die auf Grund eines von Ames herrührenden neuen Beweises des für die Funktionentheorie spezialisierten Jordanschen Satzes die allgemeinen Entwicklungen gegeben.

Ganz besonderes Interesse dürfte die Behandlung der Weierstraßschen Reihensätze mittels eines fundamentalen Satzes von Morera bieten. Dieser Satz von Morera sagt aus, daß eine in einem Bereich I stetige komplexe Funktion, für welche der Cauchysche Integralsatz gilt, notwendig analytisch ist. Mittels dieses als Umkehrung des Cauchyschen Satzes bezeichneten Theorems lassen sich noch außer den genannten eine Reihe äußerst wichtiger Sätze über analytisches Verhalten beim Grenzübergange erschließen.

Das letzte Kapitel der vorliegenden Lieferung bringt eine Darstellung der Untersuchungen von Goursat, welche bekanntlich eine erhebliche Vereinfachung im Aufbau der die komplexen Funktionen betreffenden Theorie gebracht haben. Die prinzipielle Bedeutung dieser Ideen und ihr Verhältnis zu dem bisher behandelten Aufbau wird klar herausgehoben.

Hiermit schließt die erste Lieferung. Die allgemeinen Grundzüge der Theorie sind klargelegt, die zweite Lieferung wird dann die Riemannschen Flächen bringen. Die großen Vorzüge der Darstellung sind schon im vorliegenden Heft deutlich: Die volle geometrische Anschauung, geschult durch die moderne Mengenlehre, ein klares Herausstellen aller prinzipiellen Punkte, und ein frischer lebhaft anmutender persönlicher Stil.

Halle a. S. F. Bernstein.

A. Lippmann, Die absolute Wahrheit der Euklidischen Geometrie. Mit Figuren im Text. [68 S.] gr. 8. Leipzig 1906, Rudolf Gerstäcker. geh. ℳ 3.60.

Zwei Stellen aus dem Vorwort seien angeführt: „Dies Postulat (das V.) muß wahr sein. Die Anschauung predigt es zu deutlich. Darum muß es wohl auch einen streng logischen Beweis dafür geben". — „Wir wollen aus unserem Geiste heraus eine Geometrie konstruieren, die keiner Forderungen bedarf." —

Über die philosophischen Auseinandersetzungen, die diese „Konstruktion aus unserm Geiste heraus" begründen sollen und einen breiten Raum einnehmen, wollen wir hier kurz hinweggehen, wenn auch vielerlei zu bemerken ist darüber. Dagegen möge hier der Kern des „Beweises für das Parallelenpostulat" bloßgelegt werden. Es soll gezeigt werden, daß jeder Kreis durch ein Dreieck eingeschlossen werden kann. Dabei wird ein gleichschenkliges Dreieck ACE gebraucht, mit dem Winkel $\frac{1}{2}R\,(=45^0)$ an der Spitze A. Die Seite $AE = r$ zerfällt durch das Lot CD, das von C aus gefällt ist, in zwei Stücke AD und DE, und es werden nun drei Möglichkeiten betrachtet, a) $AD = \frac{1}{2}r$, b) $AD > \frac{1}{2}r$, c) $AD < \frac{1}{2}r$. Im Falle c (Seite 61) heißt es (ganz richtig), daß die beiden einander gleichen Winkel AEC und $ACE < \frac{1}{2}R$ sind. — Daraus folgt durch Addition, daß im Dreieck ACE die Winkelsumme kleiner als $\frac{3}{2}R$ ist, also doch auch kleiner als $2R$! —

Dies hat der Verfasser übersehen, er setzt sein Schlußverfahren an derselben Figur weiter fort, und folgert (S. 63), daß die Winkelsumme im Dreieck zwei Rechte beträgt!

Leipzig. H. Liebmann.

Liniengeometrie mit Anwendungen. Von Professor Dr. **Konrad Zindler.** II. Band. Mit 24 Figuren. [VII, 252 S.] (Sammlung Schubert Band LI). Leipzig 1906, G. J. Göschen. geb. ℳ 8.—.

Das vorliegende Buch handelt in seinem ersten Abschnitt von der Differentialgeometrie der Regelflächen, im zweiten von der der Linienkongruenzen, im dritten von der allgemeinen Theorie der Komplexe.

Bei unserer Besprechung des ersten Teiles von Zindlers Liniengeometrie (Diese Zeitschrift 1905, S. 14) konnten wir nicht umhin, eine Reihe von Mängeln anzumerken, die großenteils ihre Quelle darin haben, daß der Verfasser es mit der Umgrenzung seiner Begriffe und der Wahl seiner Worte wenig genau genommen hat. Hat er nunmehr den Stoff der Differentialgeometrie, der noch mehr Gelegenheit zu Entgleisungen bietet, mit gebührender Sorgfalt abgehandelt?

§ 1, in dessen Überschrift das Wort Grundbegriffe vorkommt, beginnt also:

„Wir denken uns eine Regelfläche durch Bewegung einer Geraden erzeugt ...“ Daß nur eigentliche (und zwar reelle) gerade Linien gemeint sind, wird nicht gesagt, und was eine Bewegung und eine Regelfläche sei, erfahren wir ebenfalls nicht. Diese Begriffe kommen aber nicht mit uns auf die Welt, und die angewendeten Worte haben keineswegs eine bestimmte allgemein angenommene Bedeutung. Natürlich hat auch das Weitere einen klaren Sinn nur unter gewissen Voraussetzungen, die nicht angegeben sind.

In § 2, Seite 4, sind dann wieder die ersten Worte, dem Sinne nach:

„Wenn die rechtwinkligen Koordinaten eines Stabes als differentiierbare Funktionen einer Veränderlichen gegeben sind, die der Plückerschen Gleichung identisch genügen, so ist dadurch eine Regelfläche bestimmt“.

Die angegebene Voraussetzung wird erfüllt durch die Produkte aus den Koordinaten eines bestimmten Stabes und einer veränderlichen Größe. Danach fällt auch eine einzelne gerade Linie unter den diesmaligen Begriff der „Regelfläche“, was unser Verfasser ganz übersehen hat! Und in diesem Stile geht es weiter. Wir haben gelesen bis zu Seite 14, wo es heißt:

„Sucht man vom Striktionsband einer Regelfläche R wieder das Striktionsband, so kommt man zu R zurück“. (Das Striktionsband ist nach der beigegebenen Erklärung Ort der gemeinsamen Normalen zwischen konsekutiven Geraden allgemeiner Lage der Regelfläche). Ein solcher Satz gilt aber natürlich ebenfalls nur unter gewissen Einschränkungen.

Und diese Einschränkungen liegen nicht nur auf der Hand, und sie finden sich nicht nur in der Literatur, und zwar an eben der von Z. bei dieser Gelegenheit zitierten Stelle angegeben, sondern es ist dort auch zu allem Überfluß noch eine förmliche Warnungstafel errichtet, indem von einer „inkorrekten Fassung desselben Grundgedankens“ die Rede ist!

Was mag sich wohl der Verfasser gedacht haben? Hat er mit einer solchen Eilfertigkeit gearbeitet, daß er, bei einem Satze einfachster Art, den Unterschied zwischen richtig und falsch selbst dann noch nicht zu erkennen

vermochte, als ein anderer ihm die Sache vordemonstriert hatte? Oder sollen wir am Ende gar annehmen, daß er absichtlich Verkehrtes zu Papier gebracht hat? Ist es also nach seiner Meinung zulässig, bei der Formulierung mathematischer Lehrsätze die Regeln der Logik bei Seite zu schieben? Es finden sich ja auch dafür Präzedenzfälle samt den zugehörigen Beschönigungen (Leipz. Ber. 1899, S. 148). Und ist es erlaubt, einen Anderen — wenn auch *optima fide* — für eben das verantwortlich zu machen, was dieser abgelehnt hat?

Es wäre ja offenbar unbillig, in einem hauptsächlich für Anfänger bestimmten Lehrbuch tiefe oder besonders originelle Gedanken suchen zu wollen. Vielleicht würde auch eine geschickte Handhabung des analytischen Apparates schon zu viel verlangt sein. Was man aber nicht nur erwarten darf, sondern gerade von einem Buche dieser Art vor allen Dingen *verlangen muß*, ist ein wissenschaftlicher Ernst, der Gedankenlosigkeiten eines gewissen Kalibers wenigstens ausschließt. Nur der gewissenhafte Arbeiter hat Anspruch auf eine ernsthafte Erörterung seiner Leistung. Dem Referenten hat schon das erste Bändchen des Herrn Zindler einen beinahe physischen Schmerz verursacht. Er hat sich gleichwohl bemüht, das Gute daraus hervorzusuchen, und, ohne Verfehltes zu verschweigen, das Ganze in eine möglichst günstige Beleuchtung zu rücken. Nachdem sich nun aber herausgestellt hat, daß Herrn Zindler gegenüber das alles verlorne Liebesmüh war — man vergleiche auch mit jener Herrn Zindler unzweifelhaft bekannt gewordenen Rezension seine dürftigen „Verbesserungen zum ersten Bande" —, ziehen wir die Folgerung, die damals schon mit diesen Worten angedeutet wurde:

„Was könnten wir wohl einem Fachgenossen erwidern, der es ablehnte, von einem Werke Kenntnis zu nehmen (usw.)".

Bonn. E. Study.

Fr. Ebner, Oberlehrer an der Kgl. höheren Maschinenbauschule in Einbeck, **Leitfaden der technisch wichtigen Kurven.** Mit 93 Figuren im Text. [VIII, 197 S.] gr. 8. Leipzig 1906, B. G. Teubner. geb. ℳ 4.—.

Vorliegendes Buch ist in erster Linie für technische Schulen und alle diejenigen bestimmt, die den Anwendungen der Mathematik auf technische Probleme Interesse entgegenbringen; es behandelt eine Reihe von Kurven, die in den bekannten Sammelwerken von Loria, Salmon-Fiedler etc. entweder gar nicht oder unter ganz anderen Gesichtspunkten dargestellt sind. Das gilt vor allen von den den ersten Abschnitt bildenden Bahnkurven des allgemeinen Kurbelmechanismus, den sogen. Koppelkurven, die für die Gradführungen am Indikator, Wattschen Parallelogramm (Lemniskoidenlenker) etc. von so großer Bedeutung sind. Während diese Kurven gewöhnlich in der Kinematik unter Voraussetzung zahlreicher Sätze aus der neuen synthetischen Geometrie behandelt werden — wie z. B. in dem Standard-Werk von Burmester —, ist der hier eingeschlagene Weg der rechnerisch-analytische, der mit den einfachsten Grundlagen der analytischen Geometrie auskommt und auch historisch bei Roberts, Cayley, R. Müller u. a. der ursprüngliche ist. Gewisse Weitläufigkeiten, die der analytischen Rechnung so leicht anhaften, sind durch Anwendung der neueren symbolischen Darstellungsart und symmetrischen Bezeichnung im allgemeinen vermieden. Besonderer Wert ist auf die Diskussion der Bahnkurven aller jener speziellen Getriebe gelegt,

die in der Technik bei Werkzeugmaschinen, Pumpen und Dampfmaschinen so vielfach Anwendung finden, wie die Zwillingskurbel, das gleichschenklige Getriebe, Schleifkurbel, Schubkurbel etc.; ihre Eigenschaften sind wohl hier zum ersten Male zusammenhängend aus denen des allgemeinen Getriebes entwickelt.

Der 2. Abschnitt behandelt die für die Adiabate wichtigen Parabeln und Hyperbeln höherer Ordnung, die bisher noch nirgends elementar im Zusammenhange dargestellt sind; sie bieten gleichzeitig eine vorzügliche Gelegenheit, im Anschluß an Perrys Ingenieurmathematik anschaulich und einfach die Grundbegriffe des Differentialquotienten und des Integrals zu entwickeln, ohne die auf die Dauer kein Schüler technischer Mittelschulen auskommen kann, der nicht auf jedes Fortschreiten in seinem Fach verzichten will.

Der 3. Abschnitt ist den für die Verzahnungen wichtigen zyklischen Kurven gewidmet. Auf eine ausführliche Behandlung diesen Kurven konnte mit Rücksicht auf die umfangreiche Literatur über diesen Gegenstand verzichtet werden; dagegen wurde das Hauptgewicht auf die neuere, einfache Erzeugung und Einteilung dieser Kurven gelegt, der sich die Technik bisher immer noch verschlossen hat.

Einbeck. Fr. Ebner.

Mathematical Monographs. Unter der Leitung der Herren Merriman und Woodward beginnt in New-York eine Sammlung mathematischer Monographien zu erscheinen. Bis jetzt sind in diesem Jahre 10 Bände herausgekommen: 1. Smith, History of modern mathematics; 2. Halsted, Synthetic projective geometry; 3. Weld, Determinants; 4. Mc. Mahon, Hyperbolic functions; 5. Byerly, Harmonic functions; 6. Hyde, Graßmann's space analysis; 7. Woodward, Probability and theory of errors; 8. Macfarlane, Vector analysis and quaternions; 9. Johnson, Differential equations; 10. Merriman, Solution of equations.

2. Bücherschau.

Byerly, W. E., Harmonic functions. New York 1906. ℳ 5.—.

Dannacher, S., Zur Theorie der Funktionen des elliptischen Zylinders. 38 S. 8°. Frauenfeld 1906. ℳ 2.—.

Descartes, R., Oeuvres. Publiés sous les auspices du ministère de l'instruction publique par C. Adam et P. Tannery. (En environ 10 volumes.) Vol. VIII: Principia philosophiae. 4°. Paris 1906. ℳ 21.—.

Gruner, P., Tabellen für die Exponentialfunktion mit negativen Exponenten $y = e^{-x}$. 15. S. 8°. Leipzig 1906. ℳ 1.—

Haas, K., Lehrbuch über den binomischen und polynomischen Lehrsatz, die arithmetischen Reihen höherer Ordnung und die unendlichen Reihen, mit 259 Fragen und Antworten, 202 Erklärungen, 502 meist gelösten Aufgaben und einem Formelverzeichnis zum Selbststudium und dem Gebrauch an Schulen bearbeitet nach dem System Kleyer. VII, 370 S. 8°. Bremerhaven 1906. ℳ 8.—

Halsted, G. B., Synthetic projective geometry. New York 1906. ℳ 5.—.

Hardy, G. H., Integration of functions of a single variable. 62 p. Cambridge 1906. 2 s 6 d.

Ingenieurwerke in und bei Berlin. Festschrift zum 50 jährigen Bestehen des Vereins Deutscher Ingenieure. Gewidmet vom Berliner Bezirks-Verein Deutscher Ingenieure. Berlin 1906. ℳ 15.—

Johnson, W. W., Differential equations. New York 1906. ℳ 5.—.
Klein, F., Über lineare Differentialgleichungen der 2. Ordnung. Vorlesung. Ausgearbeitet von E. Ritter. Göttingen 1894. Neuer unveränderter Abdruck. IV, 524 S. Leipzig 1906. ℳ 8.50.
Laar, J. J. van, Sechs Vorträge über das thermodynamische Potential und seine Anwendungen auf chemische und physikalische Gleichgewichtsprobleme. Eingeleitet durch zwei Vorträge über nichtverdünnte Lösungen und über den osmotischen Druck. VIII, 119 S. Braunschweig 1906. ℳ 3,50.
La Vallée Poussin, C. J. de, Cours d'analyse infinitésimale. Vol. II. Louvain 1905. ℳ 10.—.
Lebesgue, H., Leçons sur les séries trigonométriques, professées au collège de France. 136 p. Paris 1906. Frs. 3,50.
Macfarlane, A., Vector analysis and quaternions. New York 1906. ℳ 5.—.
Mc Mahon, J., Hyperbolic functions. New York 1906. ℳ 5.—.
Manning, H. P., Irrational numbers and their representation by sequences and series. New York 1906. ℳ 6.50.
Marks, C. J., Mathematical questions and solutions. From the „Educational Times". New Ser. vol. 9. Cambridge 1906. 6 s 6 d.
Merriman, M., The solution of equations. New York 1906. ℳ 5.—.
Mühlemann, F., Enveloppen der Eulerschen Geraden. Bern 1905. ℳ. 3.—.
Oechelhäuser, W. v., Technische Arbeit einst und jetzt. Vortrag zur Feier des 50jährigen Bestehens des Vereins Deutscher Ingenieure zu Berlin am 11. Juni 1906. 51 S. 8°. Berlin 1906. ℳ 1.—.
Smith, D. E., History of modern mathematics. New York 1906. ℳ 5.—.
Weld, L. G., Determinants. New York 1906. ℳ 5.—.
Wend, O., Cayleysche Lösungen mathematischer Elementaraufgaben. Chemnitz 1906. ℳ 2.80.
Wirtinger, W., Über die Entwicklung einiger mathematischer Begriffe in neuerer Zeit. Vortrag. 20 S. 8°. Wien 1906. ℳ 0.60.
Withers, J. W., Euclid's parallel postulate, its nature, validity and place in geometrical systems. 6 s 6 d.
Woodward, R. S., Probability and theory of errors. New York 1906. ℳ 5.—.
Zimmermann, H., Die Knickfestigkeit eines Stabes mit elastischer Querstützung. V, 44 S. 8°. Berlin 1906. ℳ 2.—

3. Zeitschriftenschau.

(Von dem Inhalt der Zeitschriften werden nur die Aufsätze erwähnt, welche dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften angehören.)

Mathematische Annalen. 62. Band. Heft 4.

Carathéodory, Über die starken Maxima und Minima bei einfachen Integralen. Eisenhart, Associate surfaces. v. Lilienthal, Zur Theorie der äquidistanten Kurven auf einer Fläche. Zemplén, Über die Kompatibilitätsbedingungen bei Unstetigkeiten in der Elektrodynamik. Farkas, Über die Ableitung der Impulsgleichungen gewöhnlicher Stoßwellen.

Archiv der Mathematik und Physik. Dritte Reihe. 10. Band. 3. und 4. Heft. Mit Generalregister zu Band 1 — 10.

Segre, Sur la génération projective des surfaces cubiques. Sturm, über die Erzeugung der Fläche 3. Ordnung durch kollineare Bündel und trilineare Büschel. Gleichen, Beitrag zur Dioptrik der Atmosphäre. Safford, Rotation cyclids and Lamé's products. Haentzschel, Bemerkung zu der vorstehenden Note. Meyer, über Partialbruchzerlegung bei vielfachen Linearfaktoren des Nenners.

Spieß, einige Integralsätze. Jourdain, The development of the theory of transfinite numbres. Herzog und Feldmann, über widerstandstreue Umgestaltung elektrischer Leitungsnetze. Rezensionen. Vermischte Mitteilungen.

4. Kataloge.

(Vacat.)

5. Bei der Redaktion eingegangene Schriften.

[Titel, Preis usw. der eingesandten Schriften werden hier regelmäßig veröffentlicht. Besprechungen geeigneter Bücher bleiben vorbehalten. Eine Rücksendung der eingegangenen Schriften kann nicht erfolgen.]

H. Anthes, Versuchsmethode zur Ermittelung der Spannungsverteilung bei Torsion prismatischer Stäbe. Dissertation der Technischen Hochschule zu Hannover. 75 S. Berlin 1906.

Bibliographie der deutschen Universitäten. Systematisch geordnetes Verzeichnis der bis Ende 1899 gedruckten Bücher und Aufsätze über das deutsche Universitätswesen. Im Auftrage des Preußischen Unterrichtsministeriums bearbeitet von Wilhelm Erman und Ewald Horn. 3 Bände. I. Band. XX, 836 S. Lex.-8. geh. ℳ 30.—, geb. ℳ 36.—; II. Band. XX, 1263 S. Lex.-8. geh. ℳ 40.—, geb. ℳ 46.—; III. Band. VI, 313 S. Lex.-8. geh. ℳ 15.—, geb. ℳ 18.—. Leipzig 1904—1905, B. G. Teubner.

R. Bonola, La geometria non-euclidea. Esposizione storico-critica del suo sviluppo. Con 69 figure. VI, 213 p. Bologna 1906, Nicola Zanichelli. 5 Lire.

Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées. Edition française rédigée sous la direction de Jules Molk. Tome I, Volume 3. Fascicule 1. 96 p. Leipzig 1906, B. G. Teubner. ℳ 2.40.

Handbuch für Lehrer höherer Schulen. Bearbeitet von Auler, Boerner, Capitaine, Fricke, Grimsehl, Jansen, Kuhlmann, Lampe, Landsberg, Lyon, Müller, Nelson, Rausch, Schmid, Stiehler, Vollmer, Weede, Weißenfels, Wernicke, Ziehen. XIV, 704 S. Leipzig 1906, B. G. Teubner. geh. ℳ 12.—, geb. ℳ 13.—.

J. Hempel, Schattenkonstruktionen. Mit 51 Textfiguren und 20 Tafeln praktischer Beispiele in Lichtdruck. IV, 60 S. quer Folio. Leipzig 1906, B. G. Teubner. geb. ℳ 5.—.

L. Krüger, Zur Ausgleichung der Widersprüche in den Winkelbedingungsgleichungen trigonometrischer Netze. III, 34 S. gr. 4. Leipzig 1906, B. G. Teubner. ℳ 2.80.

A. v. Öttingen, Die perspektivischen Kreisbilder der Kegelschnitte. Mit 85 Abbildungen im Text und auf vier Tafeln. VIII, 118 S. Leipzig 1906, Wilhelm Engelmann. ℳ 5.—.

Die Physikalischen Institute der Universität Göttingen. Festschrift im Anschlusse an die Einweihung der Neubauten am 9. Dezember 1905. Herausgegeben von der Göttinger Vereinigung zur Förderung der angewandten Physik und Mathematik. Mit zahlreichen Abbildungen und Tafeln. IV, 200 S. gr. 4. Leipzig 1906, B. G. Teubner.

H. Rudolph, Erdmagnetismus und Luftelektrizität. 49 S. 8. Coblenz 1906, Selbstverlag. ℳ 1.50.

H. Steckelberg, Die Elemente der Differential- und Integralrechnung. Mit 15 Figuren im Text. 48 S. gr. 8. Leipzig 1906, B. G. Teubner. kart. ℳ —.80.

P. Zühlke, Ausführung elementargeometrischer Konstruktionen bei ungünstigen Lageverhältnissen. Mit 55 Figuren im Text. 46 S. gr. 8. Leipzig 1906, B. G. Teubner. kart. ℳ 1.—.

Simon, Dr. **Max**, Professor an der Universität Straßburg i. E., Methodik elementaren Arithmetik in Verbindung mit algebraischer Analys. Mit 9 Textfiguren. [VI u. 108 S.] gr. 8. 1906. geb. n. ℳ 3.20.

Starke, Dr. **H.**, Privatdozent in Berlin, experimentelle Elektrizitätslehre. Mit besonderer Berücksichtigung der neueren Anschauungen und Ergebnisse dargestellt. Mit 275 in den Text gedruckten Abbildungen. [XIV u. 422 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. geb. n. ℳ 6.—

Staude, Dr. **Otto**, Professor an der Universität Rostock, analytische Geometrie des Punktes, der geraden Linie und der Ebene. Ein Handbuch zu den Vorlesungen und Übungen über analytische Geometrie. Mit 387 Figuren im Text. [VIII u. 447 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. ℳ 14.—

Stolz, Dr. **Otto**, weil. Professor an der Universität Innsbruck, und Dr. **J. Anton Gmeiner**, Professor an der deutschen Universität Prag, Einleitung in die Funktionentheorie. Zweite, umgearbeitete und vermehrte Auflage der von den Verfassern in der „Theoretischen Arithmetik" nicht berücksichtigten Abschnitte der „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik" von O. Stolz. Mit 21 Figuren im Text [X u. 598 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. ℳ 15.—

Auch in 2 Abteilungen:

I. Abteilung. Mit 10 Figuren im Text. [VI u. 242 S.] 1904. In Leinw. geb. n. ℳ 6.—

II. — Mit 11 Figuren im Text. [VIII u. S. 243—598.] 1905. In Leinw. geb. n. ℳ 9.—

Thomae, Dr. **J.**, Professor an der Universität Jena, Sammlung von Formeln und Sätzen aus dem Gebiete der elliptischen Funktionen nebst Anwendungen. [IV u. 44 S.] 4. 1905. kart. n. ℳ 2.80.

——— Grundriß einer analytischen Geometrie der Ebene. Mit 8 Figuren im Text. [X u. 183 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. ℳ 3.60.

Thomson, **J. J.**, D. Sc. Lld. Ph. D. Er. S. Fellow etc., Elektrizitäts-Durchgang in Gasen. Deutsche autor. Ausgabe unter Mitwirkung des Autors besorgt und ergänzt von Dr. E. Marx, Privatdozent an der Universität Leipzig. Mit 187 Figuren im Text. [VII u. 587 S.] gr. 8. 1906. geh. n. ℳ 18.—, in Leinw. geb. n. ℳ 19.—

Vahlen, Dr. **Karl Theodor**, Professor an der Universität Heidelberg, abstrakte Geometrie. Untersuchungen über die Grundlagen der Euklidischen und Nicht-Euklidischen Geometrie. Mit zahlreichen Figuren im Text. [XII u. 302 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. ℳ 12.—

Vivanti, **G.**, Professor an der Universität Messina, Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen. Umarbeitung unter Mitwirkung des Verfassers deutsch hrsg. von Dr. A. Gutzmer, Professor an der Universität Halle a. S. [VI u. 512 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. ℳ 12.—

Wallentin, Dr. **J.**, Regierungsrat und Landesschulinspektor in Wien, Einleitung in die theoretische Elektrizitätslehre. Mit 81 Figuren im Text. [X u. 444 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. n. ℳ 12.—

Weber, Dr. **H.**, Professor in Straßburg, und Dr. **J. Wellstein**, Professor in Straßburg, Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende. In 3 Bänden. gr. 8. I. Band. Elementare Algebra und Analysis. Bearbeitet von H. Weber. 2. Auflage. Mit 38 Textfiguren. [XVIII u. 539 S.] 1906. In Leinw. geb. n. ℳ 9.60. II. Band. Elemente der Geometrie. Bearbeitet von H. Weber, J. Wellstein und W. Jacobsthal. Mit 280 Textfiguren. [XII u. 604 S.] 1905. In Leinw. geb. n. ℳ 12.— (Bd. III. Anwendungen der Elementar-Mathematik. U. d. Pr.)

Wien, Dr. **W.**, Professor an der Universität Würzburg, über Elektronen. Vortrag gehalten auf der 77. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte in Meran. [28 S.] gr. 8. 1905. geh. n. ℳ 1.—

Wilczynski, **E. J.**, A. M., Ph. D., Research Associate of the Carnegie Institution of Washington, Assistant Professor of Mathematics at the University of California, projektive differential geometry of curves and ruled surfaces. [VIII u. 298 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. ℳ 10.—

Hierzu Beilagen von **B. G. Teubner** in Leipzig, die wir der Beachtung unserer Leser bestens empfehlen.

JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN
MATHEMATIKER-VEREINIGUNG

IN MONATSHEFTEN HERAUSGEGEBEN VON

A. GUTZMER
IN HALLE A. S.

15. BAND. 10./11. (DOPPEL-)HEFT. OKTOBER—NOVEMBER.

AUSGEGEBEN AM 6. NOVEMBER 1906.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1906.

☛ Das nächste Heft wird im Dezember ausgegeben werden.

JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG.

IN MONATSHEFTEN HERAUSGEGEBEN VON A. GUTZMER IN HALLE A. S.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

☛ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Bücher usw.) sind an

Prof. Dr. A. Gutzmer in Halle a. S., Martinsberg 8,

zu richten.

☛ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich: von größeren Aufsätzen 25 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen und Mitteilungen 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☛ Jeder Band des Jahresberichts in Monatsheften umfaßt vom 12. Bande ab 38 Bogen (= 608 Druckseiten) und kostet für Mitglieder der Vereinigung, Porto inbegriffen, Mark 14.70, für Nichtmitglieder Mark 18.—. Mitglieder haben ihr Abonnement bei der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig, Poststraße 3, aufzugeben, Nichtmitglieder dagegen bei einer Sortimentsbuchhandlung.

☛ Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung zählt z. Zt. über 660 Mitglieder. Der jährliche Mitgliedsbeitrag beträgt 3 Mark, kann aber auch durch einmalige Zahlung von 30 Mark abgelöst werden. Beitrittserklärungen nimmt der Schriftführer der Vereinigung, Prof. Dr. A. Krazer, Karlsruhe in Baden, Westendstraße 57, oder die oben genannte Verlagsbuchhandlung entgegen. Die Ablösungssumme bezw. der Jahresbeitrag ist an die Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig einzusenden.

INHALT DES VORLIEGENDEN (DOPPEL-)HEFTES.

Über Flächen zweiter Ordnung, welche einander wechselseitig stützen.

Von GUSTAV KOHN in Wien.

Die einfachste projektive Beziehung, in welcher eine Fläche 2. Ordnung zu einer Fläche 2. Klasse stehen kann, ist durch das Verschwinden der bilinearen Invariante der beiden Flächen gegeben. Hesse[1]) hat bekanntlich gezeigt, daß sich diese Beziehung geometrisch charakterisieren läßt durch die Existenz eines Poltetraeders der ersten Fläche, das der zweiten Fläche umschrieben ist, oder auch eines Poltetraeders der zweiten Fläche, das der ersten eingeschrieben ist, und daß dann immer ∞^3 Tetraeder sowohl der einen als auch der anderen Art existieren. Reye[2]) nennt zwei in dieser Beziehung stehende Flächen 2. Ordnung zueinander *apolar* und sagt insbesondere von der ersten Fläche, sie *stütze* oder *trage* die zweite, von der zweiten, sie *ruhe* auf der ersten.

Man kann nun zwei Flächen 2. Ordnung betrachten, welche doppelt apolar sind, d. h. von denen jede die andere stützt, und A. Voss[3]) hat eine Reihe von merkwürdigen Eigenschaften gefunden, welche ein solches Flächenpaar auszeichnen. Er hat diese Eigenschaften aber nicht erschöpft, wie aus den folgenden Entwicklungen hervorgehen dürfte.

1. Grundlegend für unsere Entwicklungen ist die überraschend einfache Antwort, die wir auf die Frage zu geben vermögen: *welche Flächen 2. Ordnung sind zu einer vorgelegten nichtsingulären Fläche 2. Ordnung F doppelt apolar? Es sind dies die Flächen 2. Ordnung, welche sich durch je ein Paar von windschiefen reziproken Polaren der Fläche F hindurchlegen lassen, nebst ihren Grenzfällen.*

Daß eine Fläche 2. Ordnung F', welche durch ein Paar von windschiefen Geraden g'_1, g'_2 hindurchgeht, welche Polaren bezüglich der Fläche F sind, zu dieser Fläche doppelt apolar ist, bestätigt man so-

1) O. Hesse, Journ. f. Math. Bd. 45, S. 82 f.

2) Th. Reye, Journ. f. Math. Bd. 78 (1873), S. 97 und Bd. 79 (1874), S. 165 f.

3) A. Voss, Math. Ann. Bd. 10 (1876).

fort durch Angabe eines Poltetraeders der Fläche F, das der Fläche F' sowohl um- wie eingeschrieben ist. Um die Ecken eines solchen Tetraeders zu erhalten, hat man lediglich auf jeder von den beiden Geraden g'_1, g'_2 ein Paar von bezüglich der Fläche F konjugierten Punkten anzunehmen.

Das System der Flächen F' hängt von 7 *wesentlichen* Konstanten ab. Denn es existieren ∞^4 Paare von windschiefen reziproken Polaren der Fläche F, durch eines dieser Geradenpaare lassen sich ∞^3 Flächen 2. Ordnung hindurchlegen, und eine beliebige darunter enthält nicht unendlich viele solche Geradenpaare, weil sie sonst in bezug auf F sich selbst polar wäre. Ist aber einmal erkannt, daß das System der Flächen F' von ebensoviel Konstanten abhängt, wie das System der zu F doppelt apolaren Flächen 2. Ordnung, so braucht man nur zu wissen, daß dieses System irreduzibel ist, um der Identität beider Flächensysteme sicher zu sein.

Hervorzuheben ist noch eine Bemerkung: Wenn von zwei Flächen 2. Ordnung die eine durch ein Paar von windschiefen Geraden hindurchgeht, welche Polaren bezüglich der anderen sind, so enthält jede von den beiden Flächen in jeder von ihren beiden Regelscharen ein Paar von Polaren der anderen Fläche. Denn geht die Fläche F' durch die beiden reziproken Polaren g'_1, g'_2 der Fläche F hindurch, so werden diese beiden Geraden, wenn sie windschief sind, der nämlichen Schar von Erzeugenden der Fläche F' angehören müssen, und die der Fläche F' im Polarsystem der Fläche F entsprechende Fläche 2. Ordnung wird, weil sie mit F' zwei Geraden der einen Schar gemein hat, mit dieser Fläche auch zwei Geraden der anderen Schar gemein haben.

2. Die Voraussetzung, die wir von nun an machen wollen, daß die Schnittkurve der beiden doppelt apolaren Flächen F, F' nichtsingulär ist, gestattet uns als Hilfsmittel bei den weiteren Untersuchungen die Theorie der biquadratischen Raumkurve 1. Art heranzuziehen. Wir entlehnen dieser Theorie die folgenden Sätze, welche übrigens aus wohlbekannten Eigenschaften der ebenen Kurve 3. Ordnung leicht gewonnen werden im Hinblick auf den Umstand, daß durch Projektion der Raumkurve aus einem beliebigen ihrer Punkte in eine Ebene eine ebene Kurve 3. Ordnung hervorgeht.[1])

Die Punkte der biquadratischen Raumkurve 1. Art erscheinen in ∞^1 „Quadrupel" so angeordnet, daß die Tangenten in den Punkten eines Quadrupels immer derselben aus Sehnen der Kurve bestehenden Regel-

---

1) Vgl. H. Schröter, Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der Raumkurven vierter Ordnung, erster Species (Leipzig, 1896).

schar 2. O. angehören. Die sämtlichen Quadrupel lassen sich zu gleicher Zeit und zwar auf drei verschiedene Arten in je zwei Paare zerfällen, wodurch die drei Systeme von Paaren „korrespondierender Punkte“ auf der Kurve hervorgehen. Liegen die Seiten eines der Kurve eingeschriebenen einfachen Vierecks abwechselnd in zwei aus Kurvensehnen bestehenden Regelscharen 2. Ordnung, so gruppieren sich die Erzeugenden dieser beiden Regelscharen zu Gegenseitenpaaren von ∞^1 solcher Vierecke und die Gegeneckenpaare dieser Vierecke stellen auf der Kurve die Paare korrespondierender Punkte eines bestimmten Systems dar.

Dies vorausgeschickt, können wir zunächst den nachstehenden von Voss[1]) herrührenden Satz aussprechen.

Sind F, F' zwei doppelt apolare Flächen 2. Ordnung, welche durch die biquadratische Raumkurve 1. Art R_4 hindurchgehen, so hat man in den Erzeugenden der beiden Flächen vier Regelscharen von der Eigenschaft, daß es ∞^1 der Kurve R_4 eingeschriebene Vierecke gibt, welche ihre Seiten abwechselnd aus zwei beliebigen von den vier Regelscharen entnehmen.

Zum Zwecke des Nachweises brauchen wir nur für zwei beliebige von den vier Regelscharen ein einziges Viereck der behaupteten Art anzugeben. Nun existieren in jeder von den beiden Scharen von Erzeugenden einer beliebigen von den beiden Flächen F, F' zwei reziproke Polaren bezüglich der anderen Fläche, und diese Geraden liefern uns sofort die verlangten Vierecke. Denn die Schnittpunkte einer Fläche 2. Ordnung mit einem Paar ihrer reziproken Polaren sind die Ecken eines einfachen Vierecks, dessen Seiten abwechselnd den beiden Regelscharen der Fläche entnommen sind und zugleich die Ecken von zwei weiteren einfachen Vierecken, für die ein Gegenseitenpaar durch zwei Erzeugende derselben Schar und das andere durch die beiden reziproken Polaren gebildet wird.

Hiermit ist das Ergebnis von Voss bewiesen und festgestellt, daß es 6 Systeme von der Kurve R_4 eingeschriebenen Vierecken gibt, deren Seiten abwechselnd zwei von den vier Regelscharen der Flächen F und F' angehören. Über dieses Ergebnis hinaus führt aber der Gedanke, daß die Gegeneckenpaare eines jeden von diesen 6 Systemen von Vierecken auf der Kurve R_4 ein System von korrespondierenden Punkten darstellen.

Zuvörderst folgern wir:

Die vier Punkte, in welchen die vom selben Punkte der Schnittkurve R_4 der Flächen F und F' ausgehenden Erzeugenden dieser

1) A. Voss, a. a. O., vgl. Westphal, Math. Ann. Bd. 13 (1878).

beiden Flächen der Kurve nochmals begegnen, bilden auf ihr ein Quadrupel.

Denn ein beliebiger Punkt der Schnittkurve ist Eckpunkt für 6 der Kurve eingeschriebene Vierecke, deren Seiten abwechselnd aus zwei von den vier Regelscharen der Flächen F, F' stammen, je zwei von den vier Erzeugenden dieser Regelscharen, die von dem Punkte ausgehen, treten als anstoßende Seiten in einem dieser 6 Vierecke auf und ihre weiteren Treffpunkte mit der Kurve als Gegenecken. Damit sind je zwei von den vier Treffpunkten als korrespondierende Punkte der Kurve nachgewiesen und ihre Gesamtheit als ein Quadrupel auf derselben

Nun folgt aber weiter:

Die ∞^1 Quadrupel auf der Schnittkurve von zwei doppelt apolaren Flächen 2. Ordnung F, F' sind in der Weise zu Paaren von „assoziierten“ Quadrupeln gruppiert, daß die 16 Geraden, welche man durch Verbindung der Punkte eines Quadrupels mit den Punkten des assoziierten erhält, teils der einen, teils der anderen von den beiden doppelt apolaren Flächen angehören.

Jeder Punkt der Schnittkurve R_4 bestimmt nämlich das Quadrupel, dem er angehört. Die beiden Treffpunkte einer Erzeugenden einer von den beiden Flächen F, F' bestimmen also je ein Quadrupel, und der schon bewiesene Satz besagt, daß, wenn man aus dem einen Treffpunkte das Quadrupel, dem der andere angehört, projiziert, man die vier von dem ersten Treffpunkte ausgehenden Erzeugenden der beiden Flächen erhält. Damit ist aber jeder Punkt des einen Quadrupels als Treffpunkt einer Erzeugenden einer der beiden Flächen nachgewiesen, deren zweiter Treffpunkt dem anderen Quadrupel angehört, und es kann infolgedessen für jeden Punkt des einen Quadrupels ausgesagt werden, daß seine Verbindungslinien mit den vier Punkten des anderen Quadrupels die vier von ihm ausgehenden Erzeugenden der beiden Flächen darstellen.

3. Weitere Entwicklungen knüpfen wir an eine Figur an, welche aus drei windschiefen Vierseiten V, V', V'' mit den gemeinsamen Diagonalen d, d' besteht von der Eigenschaft, daß auf jeder Diagonale die drei Eckenpaare einander paarweise harmonisch trennen.

Aus der für die drei Vierseite V, V', V'' vorausgesetzten Eigentümlichkeit läßt sich sofort ersehen, daß für jede Fläche 2. Ordnung, welche durch die Seiten eines von ihnen hindurchgeht, die Ecken jedes anderen ein Poltetraeder darstellen. Denn die gemeinsamen Diagonalen d, d' der drei Vierseite sind reziproke Polaren bezüglich der Fläche

2. Ordnung als Diagonalen eines auf der Fläche verlaufenden Vierseits; ferner sind aber die auf einer Diagonale befindlichen Ecken jedes anderen von unseren drei Vierseiten, weil harmonisch getrennt durch das Eckenpaar des ersten Vierseits, konjugiert bezüglich der Fläche. Es folgt nun auch, daß zwei Flächen 2. Ordnung, von denen jede durch die Seiten eines anderen von den drei Vierseiten V, V', V'' hindurchgelegt ist, einander wechselseitig stützen, denn jede von den beiden Flächen geht dann durch zwei Paare von Gegenkanten eines Poltetraeders der anderen Fläche d. h. durch zwei Paare ihrer reziproken Polaren.

Wir können aber umgekehrt auch zeigen, wie bei zwei beliebigen doppelt apolaren Flächen 2. Ordnung F, F' die Figur der drei Vierseite V, V', V'' mit gemeinsamen Diagonalen, auf denen die drei Eckenpaare einander paarweise harmonisch trennen, auftritt, eine Figur, welche übrigens implizite schon bei Voss vorkommt.

Nach Nr. 1 enthält die Fläche F in jeder von ihren beiden Scharen von Erzeugenden ein Paar von reziproken Polaren bezüglich der Fläche F'. Das von diesen vier Geraden gebildete Vierseit bezeichnen wir mit V, seine Diagonalen mit dd'. Da dieses Vierseit sich im Polarsystem der Fläche F' selbst entspricht, stellen seine Ecken ein Poltetraeder dieser Fläche dar und seine Diagonalen d, d' ein Paar reziproker Polaren. Ferner folgt, daß auf der Geraden d bez. d' das Schnittpunktepaar der Fläche F' harmonisch konjugiert ist zu dem auf dieser Geraden befindlichen Eckenpaar des Vierseits V. Diese beiden Schnittpunktepaare sind Gegeneckenpaare eines aus Erzeugenden der Fläche F' bestehenden Vierseits, weil die Geraden d, d' reziproke Polaren bezüglich dieser Fläche sind. Bezeichnet man nun dieses Vierseit mit V', so bleibt nur noch zu beachten, daß die Geraden d, d' als Diagonalen des von Erzeugenden der Fläche F gebildeten Vierseits V auch bezüglich dieser Fläche Polaren sind, um zu erkennen, daß wir die gewünschte Figur vor uns haben, wenn wir den beiden schon konstruierten Vierseiten V und V' als drittes V'' das Vierseit hinzufügen, welches von den vier Kanten gebildet wird, welche das gemeinsame Poltetraeder der Flächen F und F' außer den Kanten d, d' noch besitzt.

Ist aber die Figur einmal abgeleitet, so ist auch der Anschluß an die Theorie von vier paarweise in Involution liegenden linearen Komplexen gewonnen, sobald die augenscheinlich richtige Bemerkung gemacht ist, daß die Figur der drei Vierseite V, V', V'' oder mit anderen Worten die Figur von zwei windschiefen Geraden, von denen jede drei paarweise harmonisch konjugierte Punktpaare trägt, eine, von projektiven Transformationen abgesehen, völlig bestimmte ist.

Nach Caporali und del Pezzo[1]) bestimmen vier lineare Komplexe, die paarweise in Involution liegen, eine Gruppe von 16 linearen Transformationen des Raumes, 8 Kollineationen und 8 Korrelationen, durch welche die Punkte und Ebenen des Raumes zu Möbiusschen Konfigurationen 8_4 geordnet werden, die sich entsprechend den vier Komplexen auf vier Arten in je ein Paar einander um- und eingeschriebener (Möbiusscher) Tetraeder zerlegen lassen. Die Flächen 2. Ordnung, welche bei den Transformationen der Gruppe in sich übergehen, bilden drei Flächenbüschel, als deren Basiskurven drei Vierseite auftreten, welche die Figur unserer Vierseite V, V', V'' bilden, d. h. sie haben gemeinsame Diagonalen, und auf jeder von ihnen trennen einander die Eckenpaare je zweier von drei Vierseiten harmonisch.

Eine Folge dieses Sachverhältnisses ist, daß, wenn die Figur der drei Vierseite V, V', V'' gegeben ist, und durch jedes von ihnen eine Fläche 2. Ordnung hindurchgelegt wird, für die entstehenden Flächen F, F', F'', welche nach Obigem paarweise doppelt apolar sind, die gemeinsamen 8 Punkte die 8 Punkte einer Möbiusschen Konfiguration 8_4 und die gemeinsamen 8 Ebenen die 8 Ebenen derselben Konfiguration darstellen. Sieht man die beiden Flächen F, F' als fest an, so hat man zwei beliebige doppelt apolare Flächen 2. Ordnung vor sich, und kann die Fläche F'' noch in einem Flächenbüschel 2. Ordnung variieren lassen, dessen Basiskurve das Vierseit V'' ist, d. h. ein Kantenvierseit des gemeinsamen Poltetraeders der Flächen F, F'. In den Punktgruppen, welche die Flächen F'' auf der Schnittkurve R_4 der beiden Flächen F, F' ausschneiden, erkennt man die in Nr. 2 betrachteten Gruppen von je 8 Punkten dieser Kurve wieder, die 8 Punkte zweier assoziierter Quadrupel. Denn nach Caporali und del Pezzo lassen sich solche 8 Punkte, sowohl in die Eckenquadrupel von zwei auf der Fläche F, als auch in die Eckenquadrupel von zwei auf der Fläche F' verlaufenden Vierseiten zerfällen.

Erwägt man noch, daß in einem beliebigen Flächenbüschel 2. Ordnung drei Paare von doppelt apolaren Flächen vorkommen, nämlich die drei Flächenpaare des Büschels, welche in demselben zwei seiner vier Kegelflächen und zugleich die beiden übrigen harmonisch trennen, so kann man im Hinblick auf die Ergebnisse der letzten Nr. den folgenden Satz aussprechen.

Die Punkte einer biquadratischen Raumkurve 1. Art sind in bekannter Weise in „Quadrupel“ geordnet. Jede Fläche 2. Ordnung, die durch ein Kantenvierseit des Haupttetraeders der Kurve hindurchgeht,

1) E. Caporali, Memorie di geometria, Neapel, 1888.

schneidet auf derselben zwei Quadrupel aus, und diese stellen zusammen die 8 Punkte einer Möbiusschen Konfiguration 8_4 *dar. Es erscheinen so die Quadrupel der Kurve auf drei Arten zu Paaren von „assoziierten" Quadrupeln geordnet, entsprechend den drei Kantenvierseiten des Haupttetraeders. Verbindet man die vier Punkte jedes Quadrupels der Kurve mit den vier Punkten seines assoziierten, so erhält man, den drei Arten von assoziierten Quadrupeln entsprechend, die Erzeugenden der drei Paare von doppelt apolaren Flächen 2. Ordnung, welche sich durch die Kurve hindurchlegen lassen.*

A. Ameseder[1]) und H. Schröter[2]) haben erkannt, daß sich die Quadrupel einer biquadratischen Raumkurve 1. Art auf drei verschiedene Arten so in Paare ordnen lassen, daß die beiden Quadrupel desselben Paars zusammen 8 assoziierte Punkte (Grundpunkte eines Flächennetzes 2. Ordnung) darstellen. Dieses Ergebnis erscheint durch den vorstehenden Satz in wesentlicher Weise ergänzt.

4. Es dürfte zweckmäßig sein, noch weitere Resultate, die in unseren Entwicklungen enthalten sind oder mit Leichtigkeit aus ihnen gewonnen werden können, in Form von Sätzen ausdrücklich festzulegen.

Wir können sagen:

Damit zwei Flächen 2. Ordnung mit nichtsingulärer Schnittkurve doppelt apolar sind, ist notwendig und ausreichend, daß es eine Möbiussche Konfiguration 8_4 *gibt, der beide Flächen sowohl um- wie eingeschrieben sind, und es gibt dann schon* ∞^1 *solche Möbiussche Konfigurationen.*

Ferner gilt der Satz:

Die einer nichtsingulären Fläche 2. Ordnung eingeschriebenen einfachen Vierseite erscheinen zu Paaren von „Gegenvierseiten" gruppiert, wenn wir zwei eingeschriebene Vierseite als Gegenvierseite bezeichnen, sobald die Diagonalen des einen die des anderen zu reziproken Polaren bezüglich der Fläche haben. *Die 8 Seiten von zwei beliebigen einer Fläche 2. Ordnung F eingeschriebenen Gegenvierseiten lassen sich durch eine Oberfläche 2. Ordnung F' verbinden; diese ist zu F doppelt apolar, und zu einer beliebigen zu F doppelt apolaren Fläche 2. Ordnung gehören* ∞^1 *Paare von dieser Fläche eingeschriebenen Gegenvierseiten, deren Seiten sie enthält.*

Der enge Zusammenhang zwischen den beiden ausgesprochenen Sätzen wird deutlich durch die folgende Erzeugungsart einer Möbiusschen Konfiguration, welche ich nirgends gefunden habe.

1) A. Ameseder, Wiener Ber. Bd. 87 (1883).

2) H. Schröter, a. a. O.

Man erhält die 8 Punkte einer Möbiusschen Konfiguration 8_4, wenn man eine nichtsinguläre Fläche 2. Ordnung mit zwei beliebigen Geraden und zugleich mit ihren reziproken Polaren bezüglich der Fläche zum Durchschnitt bringt, und man kann eine beliebige Möbiussche Konfiguration 8_4 in dieser Weise auf drei Arten entstehen lassen.

Wesentlich dieselbe Entstehungsweise läßt sich durch den Satz ausdrücken:

Die Ecken von zwei windschiefen Vierecken in der Lage, daß jedes Gegenseitenpaar des einen Vierecks von einem anderen Gegenseitenpaar des anderen getroffen wird, bilden die Punkte einer Möbiusschen Konfiguration, und eine beliebige solche Konfiguration läßt drei derartige Entstehungsarten zu.

Über Nicht-Euklidische und Liniengeometrie.

Von E. Study in Bonn.

Nicht gehaltene Vorträge (V—XII).

In einer ersten Reihe „nicht gehaltener Vorträge"[1]) hat der Verfasser einige sogenannte Übertragungsprinzipe dargelegt, und er hat gezeigt, wie man dadurch zu mehreren Arten der Liniengeometrie kommt, die durch gewisse einfache oder halb-einfache Transformationsgruppen bestimmt sind, und zu Raumelementen die als *Linienkreuz* und *Strahl*, *Speer* und *Pfeil* bezeichneten Figuren haben. Wegen der Fülle neuen Stoffs, und weil zur Ausarbeitung nur eine sehr kurz bemessene Spanne Zeit zur Verfügung stand (es handelte sich um eine Gelegenheitsschrift), sind diese mittlerweile auch von anderer Seite verwerteten[2]) Ideen nur in der Beschränkung auf Figuren skizziert worden, die — im engsten Sinne des Wortes — *reell* sind.

Im Folgenden sollen nun diese Betrachtungen nach einer bestimmten Richtung hin fortgesetzt werden, nämlich mit bezug auf die

1) Jahresber. d. D. Math.-Ver. Bd. II (1902), S. 313—340.

2) E. v. Weber, Die komplexen Bewegungen (Leipz. Ber. 1903, S. 384 u. ff.). Das Imaginäre in der Geometrie der konfocalen Flächen zweiter Ordnung (Münch. Ber. 1904, S. 447 u. ff.). A. B. Pierce, Dual Conical Congruences (Diss. Zürich 1903). E. Davis, Die geometrische Addition der Stäbe in der hyperbolischen Geometrie (Diss. Greifswald, 1904). J. Coolidge, *Les congruences isotropes* (Atti di Torino, I. 20. Dic. 1904. II. 8. Genn. 1905). The dual projective geometry of elliptic and spherical space (Diss. Bonn, 1904). H. Beck, Die Strahlenketten im hyperbolischen Raume (Diss. Bonn, 1905). J. Grünwald, Über duale Zahlen und ihre Anwendung in der Geometrie (Monatsh. f. Math. u. Phys. XVII, 1906, S. 81 ff.)

Figur des Pfeils, und unter Aufhebung der genannten Beschränkung. Es wird zunächst ein sehr einfacher, aber anscheinend bisher gleichwohl nicht bemerkter Zusammenhang aufgedeckt, der die als (Lobatschewskyscher) *Parallelismus* und *Parataxie* (oder Cliffordscher Parallelismus) bezeichneten Begriffe verbindet. Sodann wird, als nächst-einfache Anwendung einer weiter reichenden Methode, die Theorie gewisser Kongruenzen entwickelt, allerdings nur in den Grundzügen. Es wird nämlich gezeigt, daß ein wesentlicher Teil der Eigenschaften der *Normalenkongruenzen der Flächen von der Krümmung Null* und der sogenannten *isotropen Kongruenzen* ihre Quelle in denselben analytischen Tatsachen hat, so daß man, durch ein einfaches Übertragungsprinzip, gewisse Eigenschaften der einen aus solchen der anderen *mechanisch* ableiten kann. Es werden dadurch Untersuchungen anderer Mathematiker über diese Kongruenzen[1]) ergänzt, und in einigen Punkten auch berichtigt.

Von allgemeinerem Interesse dürfte es sein, daß in dem Gedankenkreise der reellen Nicht-Euklidischen Geometrie (und auch noch in dem hier nicht betrachteten Euklidischen Grenzfall) die *Theorie der analytischen Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen* eine natürliche Anwendung und geometrische Deutung findet, die — abgesehen von den minder elementaren Voraussetzungen — verglichen werden kann der Deutung der Lehre von den Funktionen einer einzelnen komplexen Veränderlichen mit Hilfe der konformen Abbildung.

In anderen Arbeiten, deren erste sich jetzt im Druck befindet, und demnächst im American Journal of Mathematics erscheinen wird[2]), soll der hier mit Rücksicht auf die Form des Vortrags zurückgedrängte analytische Apparat entwickelt werden.

Die gewählte Darstellungsform hat jedenfalls den Vorzug der Kürze. Aber natürlich können wir uns damit nur an einen wohl ziemlich kleinen Leserkreis wenden. Ein gründliches Lehrbuch der Nicht-Euklidischen Geometrie scheint zu fehlen, und doch müssen wir eine gewisse Vertrautheit des Lesers mit diesem Stoff voraussetzen.

Der erwähnte Zustand kann sich übrigens schnell ändern. Wenn die unfruchtbaren formal-logischen Spekulationen, die jetzt „im Vordergrunde des Interesses stehen", demnächst, zufolge allgemeiner Entkräftung, eines sanften Todes verstorben sein werden, dann wird man

1) M. Bianchi, Sulle superficie a curvatura nulla in geometria ellittica (Ann. di Mat. ser. II, 24, 1896). Sulla rappresentazione di Clifford delle congruenze rettilinee nello spazio ellittico (Atti di Torino, v. 39, 1904, p. 381, ss.), und die erwähnten Arbeiten von Coolidge über isotrope Kongruenzen.

2) Über die Begriffe Links und Rechts in der elliptischen Geometrie.

sich vielleicht daran erinnern, daß die Nicht-Euklidische Geometrie, und die Geometrie überhaupt, nicht bloß aus mehr oder (meistens) minder unabhängigen sogenannten Axiomen besteht, sondern auch einen Inhalt hat. Dann werden sich gewiß Bearbeiter finden, die dem Stoffe gewachsen sind und zugleich den vorhandenen Reichtum weiteren Kreisen zugänglich zu machen verstehen.

Von der Nicht-Euklidischen Geometrie aus fällt Licht auf die Euklidische und auch noch auf manchen anderen Gegenstand. In ihr finden andere Disziplinen schöne Anwendungen. Wer überhaupt Geometrie aus umfassenderen Gesichtspunkten betreiben will, der kann gar nicht umhin, sich mit ihr zu beschäftigen. Die Differentialgeometrie im Nicht-Euklidischen Raume, mit deren Studium Herr Bianchi einen bemerkenswerten Anfang gemacht hat, bietet eine Fülle von Problemen, die schwierig, dabei aber nicht scharfsinnig ausgeklügelt, sondern natürlich und einfach sind, Problemen, die eine Zukunft haben, und die die Vertreter der Analysis sich nicht sollten entgehen lassen. Es erscheint nicht billig, daß diese schöne Disziplin von der Mehrzahl sogar der eigentlichen Geometer auf die Dauer wie ein Stiefkind behandelt werde.

Es ist natürlich richtig, daß keiner sich für alles interessieren kann. Wer aber meint, seinen Interessenkreis nach Willkür umgrenzen zu dürfen, der scheint uns in einem verhängnisvollen Irrtum befangen zu sein.

V.

Das Elementarvierseit als Raumelement.

Bisher hatten wir die verschiedenen Arten reeller Nicht-Euklidischer Geometrie im dreidimensionalen Raume neben einander betrachtet. Jetzt wollen wir uns auf einen umfassenderen Aussichtspunkt stellen, indem wir, von der elliptischen *oder* hyperbolischen Geometrie ausgehend, den Raum von vorn herein zu einer Mannigfaltigkeit von drei komplexen Dimensionen, also zu einer sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit erweitern. Die ebenfalls sachgemäß erweiterten Grundbegriffe beider Arten der Geometrie werden damit noch nicht geradezu identisch, stimmen aber in allen wichtigeren Beziehungen überein. Es bleiben nur einige Unterschiede in der Bezeichnung und in dem, was man als rational-bekannt gelten lassen wird, so daß man durch leichte Änderungen von der einen Art erweiterter Geometrie unmittelbar zur anderen übergehen kann. Man kann aber auch den Grundbegriff der Entfernung und die anderen Begriffe, die an ihn sich anschließen, von vornherein so allgemein fassen, daß sowohl die reelle elliptische als auch die

reelle hyperbolische Geometrie sich als Ausschnitte aus einem umfassenderen System von Begriffen und Lehrsätzen der Geometrie im komplexen Gebiet darstellen.[1])

In dem betrachteten erweiterten Raume liegt nun *die absolute Fläche*, als Ort von Punkten ein, wie man zu sagen pflegt, zweidimensionales, in Wirklichkeit vierdimensionales, algebraisches Gebilde, mit ihren beiden Scharen von je ∞^2 Erzeugenden, die Trägerinnen (komplexer) binärer Gebiete sind. Wir unterscheiden diese beiden Scharen, die wir durchweg als *rational-getrennt* betrachten wollen, durch die Epitheta *links* und *rechts*.[2]) Von grundlegender Bedeutung für die ganze Nicht-Euklidische Geometrie ist nun, wie wir alsbald sehen werden, eine Figur, die aus je zwei Erzeugenden der beiden Scharen besteht, und für die wir daher ein besonderes Wort, *Elementarvierseit* einführen werden. Es gilt zunächst offenbar der folgende Satz:

V. *Die Gesamtheit aller ∞^8 Elementarvierseite bildet ein abgeschlossenes Kontinuum, das in einer (von linearen Transformationen abgesehen) bestimmten Weise sich abbilden läßt auf das Kontinuum, das aus allen Paaren von komplexen Punkten zweier bestimmt (links-rechts) geordneter ternärer Gebiete besteht.*

In dieser Abbildung entsprechen den ∞^4 Elementarvierseiten, die aus doppelt-zählenden Erzeugenden der absoluten Fläche bestehen, die Paare komplexer Punkte zweier irreduzibeler Kurven 2. Ordnung.

Für die erste Hälfte dieser natürlich ganz trivialen, für eine sachgemäße Gliederung des geometrischen Stoffes aber gleichwohl wichtigen Formulierung können wir kürzer sagen:

Das Kontinuum aller Elementarvierseite ist Träger zweier komplexer ternärer Gebiete.

Wir entwickeln nun sogleich den Begriff des Elementarvierseits selbst weiter, indem wir dessen einzelne Erzeugende wiederum in eine bestimmte Reihenfolge setzen, und durch Indices α und ω — ent-

1) Man pflegt zu sagen, daß beide Arten reeller Geometrie durch „imaginäre Transformationen" in einander übergehen. Das möchte vielleicht hingenommen werden, wie viele andere nicht minder unlogische aber einmal eingebürgerte Redewendungen, da vollkommene Logik sich nun doch einmal nicht in die Terminologie hineinbringen läßt. Indessen lassen uns die vielen Unklarheiten, die schon durch nachlässiges Umgehen mit dem Imaginären verursacht worden sind, doch zweifeln, ob man eine so irreleitende Ausdrucksweise beibehalten soll.

2) In der erwähnten im Druck begriffenen Abhandlung hat der Verfasser gezeigt, wie aus diesen Unterscheidungen und den weiter zu besprechenden ähnlicher Art alle anderen, in denen die Begriffe links und rechts auftreten, vermöge präziser *Definitionen* entwickelt werden können.

sprechend den Worten *Anfang* und *Ende* — unterscheiden. Ξ_α und Ξ_ω seien Zeichen für die beiden linkseitigen, H_α und H_ω Zeichen für die beiden rechtseitigen Erzeugenden, Ξ_α z. B. also das Zeichen für die erste linkseitige Erzeugende eines Elementarvierseits. Dieses selbst aber wollen wir, nachdem der Ordnungsprozeß vorgenommen ist, ein *orientiertes Elementarvierseit* nennen. Wir haben dann eine neue Mannigfaltigkeit, als Substrat geometrischer Untersuchungen, erklärt; man sieht, daß diese die zuvor besprochene vierfach überdeckt, und daß (und wie) ihre verschiedenen Blätter in bestimmten leicht anzugebenden *Verzweigungsmannigfaltigkeiten* mit einander zusammenhängen.

Das Kontinuum aller orientierten Elementarvierseite ist Träger von vier binären Gebieten.

Die binären Parameter dieser Gebiete aber können wir in bekannter Weise geometrisch deuten, und so kommen wir zu der folgenden etwas inhaltsreicheren Formulierung:

VI. *Das Kontinuum der ∞^8 orientierten Elementarvierseite läßt sich in einer im wesentlichen*[1]) *bestimmten Weise abbilden auf die Quadrupel von reellen Punkten $\xi_\alpha, \xi_\omega, \eta_\alpha, \eta_\omega$, die man vier Riemannschen sogenannten Zahlenkugeln vom Radius Eins entnehmen kann.*

Unterwirft man die vier Bildkugeln reellen eigentlich-kollinearen Transformationen (bildet man also jede Kugel auf sie selbst ab durch eine eigentliche Möbiussche Kreisverwandtschaft) und zwar in der Weise, daß die beiden linken Kugeln derselben Transformation unterliegen, und ebenso die beiden rechten, so ruft man dadurch eine — übrigens ganz beliebige — komplexe Bewegung im Nicht-Euklidischen Raume hervor.

Wir denken uns natürlich z. B. die beiden linken Kugelgebiete (ξ_α) und (ξ_ω) in der Weise hergestellt und aufeinander gelegt, daß einander überdeckende Punkte $\xi_\alpha = \xi_\omega$ *derselben* linkseitigen Erzeugenden der absoluten Fläche entsprechen. Punkte, die einander überdecken, sollen dann derselben Transformation unterliegen, sodaß sie die genannte Eigenschaft behalten. — Wir erlangen hier auf einfachste Weise einen Einblick in die Struktur der Gruppe der komplexen Bewegungen. Eine (komplexe) *linkseitige Schiebung* entsteht, wenn wir alle Punkte der beiden rechten Bildkugeln festhalten, und analog kommt man zu den *rechtseitigen* Schiebungen. *Zugleich aber ergibt sich eine lange Reihe von neuen Problemen.* Erstens kommt man

1) Das heißt, abgesehen von reellen *eigentlichen* automorphen kollinearen Transformationen einer jeden der vier weiterhin im Satze genannten Kugeln, und von simultanen uneigentlichen automorphen Transformationen der vier Kugeln.

sogleich zu einer Gruppe von $2^4 \cdot 4! \ \infty^{4 \cdot 6}$ Kreisverwandtschaften oder kollinearen Vertauschungen der Bildkugeln, einer Gruppe von Transformationen, die zahlreiche invariante und nicht-invariante Untergruppen enthält, darunter solche, die das Bild der komplexen Nicht-Euklidischen Bewegungen umfassen. Jede von diesen definiert gewisse Äquivalenzbegriffe, also eine besondere Art der Geometrie und eine zugehörige Invariantentheorie, die bei geeigneter Wahl des Raumelementes im Nicht-Euklidischen Raume deutbar sein werden. Alle diese noch im Schoße der Zukunft ruhenden Disziplinen aber sind, wie die sie definierenden Gruppen, völlig bestimmt durch die Nicht-Euklidische Geometrie und ihre Bewegungsgruppe: Die Entwicklung dieser Disziplinen ist nicht ein künstliches und willkürliches, sondern ein *natürliches* Problem. Daß sie alle gleiche Bedeutung hätten, soll nicht behauptet werden. Aber es werden sich unter ihnen solche befinden, die ein eingehendes Studium verdienen. In noch höherem Maße wird dies gelten von gewissen sogenannten *unendlichen Gruppen*, die man erhält, wenn man statt bloß kollinearer Transformationen der Bildkugeln überhaupt *konforme* Transformationen (Abbildungen der vier Kugeln auf dieselben Kugeln, in gleicher oder abweichender Anordnung) in Betracht zieht.

In den Nicht-Euklidischen Raum übertragen erscheinen alle diese Transformationen als Vertauschungen orientierter Elementarvierseite. Aber nicht alle diese Vertauschungen sind analytisch, im üblichen Sinne des Wortes. Vielmehr erkennt man ohne weiteres, daß nur gewissen Untergruppen der genannten Gruppen diese Eigenschaft zukommt. In beiden Fällen gelangt man so zu einer Gruppe, die (statt aus $2^4 \cdot 24$) aus 24 analytisch-getrennten Scharen von Transformationen besteht, und deren kontinuierliche Untergruppe im ersten Falle von 24 Parametern, nämlich von 12 wesentlichen komplexen Parametern abhängt (eine sogenannte 12gliedrige Gruppe), im zweiten Falle eine unendliche Gruppe ist.

Von der Gruppe von $24 \cdot \infty^{24}$ Transformationen läßt sich sehr leicht zeigen, daß sie *alle* analytischen Vertauschungen der orientierten Elementarvierseite umfaßt, die in dem Kontinuum dieser Figuren überall wohldefiniert, eindeutig und stetig sind.

In dem, was folgt, beschränken wir uns, wofern das Gegenteil nicht ausdrücklich bemerkt ist, durchaus auf die Betrachtung von *analytischen* Mannigfaltigkeiten und Transformationen der orientierten Elementarvierseite.

Die Figur des orientierten Elementarvierseits entbehrt einer Eigenschaft, die man bei Objekten „geometrischer“ Untersuchungen ungern

vermissen wird, wiewohl sich eine klare Definition dafür nicht geben läßt. Es ist das die sogenannte Anschaulichkeit der reellen Figuren.

Nennt man, wie es im allgemeinen sachgemäß ist, eine geometrische Figur dann *reell, wenn sie mit ihrer konjugiert-komplexen zusammenfällt*[1]), so gibt es bekanntlich drei gegenüber reellen Kollineationen verschiedene Arten von reellen doppelpunktfreien Flächen 2. Ordnung, als deren Typen eine reell-geradlinige Fläche, eine reelle Kugel von rein-imaginärem Radius, und eine reelle Kugel von reellem (nicht verschwindendem) Radius gelten können. In jedem der drei Fälle enthält die Fläche ∞^4 reelle (nicht-orientierte) Elementarvierseite. Aber nur in dem ersten Fall, der uns hier weniger interessiert, befinden sich darunter ∞^4 solche, deren Erzeugende einzeln reell sind. In diesem Falle allein also sind die nicht orientierten oder orientierten Elementarvierseite wenigstens zum Teil „anschaulich". Wir werden nun diesen Mangel dadurch aufheben, daß wir dem orientierten Elementarvierseit eindeutig-umkehrbar eine andere Figur zuordnen, die wir *Pfeil* nennen werden. Diese, wie auch eine verwandte als *Speer* zu bezeichnende Figur haben wir in besonderen Fällen schon erklärt (Nr. II, III). Das Wesen dieser Begriffe wird aber am besten verstanden, wenn man das orientierte Elementarvierseit in den Mittelpunkt der Betrachtung stellt. Wir geben nunmehr eine allgemeine Erklärung.

VI.

Speere und Pfeile.

Ist eine gerade Linie gegeben, *die nicht Minimalgerade ist*, das heißt, die die absolute Fläche in zwei bestimmten und von einander verschiedenen Punkten trifft, so haben wir zur Auffindung dieser Punkte eine Quadratwurzel auszuziehen, deren Radikand eine ganze Funktion zweiten Grades der Plückerschen Linienkoordinaten ist. Höchstens um eine numerische Irrationalität, die man von vorn herein adjungieren kann, unterscheidet sich dann von dieser Quadratwurzel

1) In besonderen Fällen hat man diese wichtige Definition schon häufig verwendet. Namentlich werden algebraische Flächen mit reeller Gleichung und daher auch reellem Polarsystem jetzt wohl ziemlich allgemein reell genannt. Nicht immer aber ist man bei Gebrauch dieser Begriffsbildung folgerecht verfahren. Dazu ist nötig, daß man einen allgemeinen Begriff „reeller" Figuren aufstellt, der den eben genannten umfaßt. Dies scheint erst C. Segre getan zu haben, der (Math. Ann. Bd. 40, 1892, S. 413) sich so ausspricht: L'ente [*complesso*] si dirà *reale* oppure *imaginario* secondo che coincide o no col [complesso-]conjugato. Non esigiamo dunque per chiamar reale un ente che esso si componga solo di elementi reali, e nemmeno che ne contenga. —

eine andere, deren Rational-Bekanntsein oder (wenn nötig) Adjunktion es bewirkt, daß für alle Punktepaare auf der Geraden die goniometrische Tangente ihrer Entfernung eine rational-bekannte, d. h. durch die Punktkoordinaten rational-ausdrückbare Größe wird; und Entsprechendes gilt für alle Ebenenpaare dieser Geraden.

Wir bezeichnen nun als *Orientierungsprozeß* die Operation, die darin besteht, daß man der genannten Quadratwurzel einen bestimmten unter ihren beiden möglichen Werten beilegt, und deren geometrischer Sinn ist, daß man die beiden Schnittpunkte der Geraden mit der absoluten Fläche deutlich unterscheidet und in eine bestimmte Reihenfolge x_α, x_ω setzt. Für die also erweiterte Figur der Geraden brauchen wir vorläufig unterschiedslos die Worte *Speer oder Pfeil*, und wir stellen sie durch das Zeichen $\overrightarrow{x_\alpha x_\omega}$ dar. x_α heiße der *Anfangspunkt*, x_ω der *Endpunkt* des Speeres oder Pfeiles.

Wir bemerken nun, daß diese Figur im ganzen noch drei andere gleicher Art, und zwar jede von ihnen eindeutig und auf eine gegenüber komplexen Bewegungen invariante Weise bestimmt: Erstens den *umgekehrten* oder *entgegengesetzten* Speer oder Pfeil $\overrightarrow{x_\omega x_\alpha}$, zweitens die beiden Speere oder Pfeile, die aus der absoluten Polare der gegebenen Geraden sich ableiten lassen. In der Tat lassen sich diese, *nachdem (wie vorausgesetzt) die beiden Scharen von Geraden auf der absoluten Fläche rational getrennt sind,* ebenfalls rational trennen und ohne Mehrdeutigkeit unterscheiden. Es werden nämlich vermöge der Anordnung der Punkte x_α, x_ω zugleich auch die zu diesen gehörigen Erzeugenden beider Scharen bestimmt geordnet, nach folgendem Schema:

$$x_\alpha = (\Xi_\alpha, H_\alpha), \quad x_\omega = (\Xi_\omega, H_\omega).$$

Setzt man entsprechend

$$y_\alpha = (\Xi_\alpha, H_\omega), \quad y_\omega = (\Xi_\omega, H_\alpha),$$

so sind die beiden Speere oder Pfeile $\overrightarrow{y_\alpha y_\omega}$ und $\overrightarrow{y_\omega y_\alpha}$ wohl unterschieden, und jeder einzelne von ihnen ist *eindeutig* bestimmt.

Hiernach läßt sich nun der Begriff „Absolute Polare einer Geraden" auf zwei verschiedene analytisch-getrennte Arten auf Speere oder Pfeile ausdehnen.

Wir wählen unter diesen beiden Begriffserweiterungen willkürlich, aber ein- für allemal, eine aus: *Wir bezeichnen als absolute Polare des Speeres oder Pfeiles* $\overrightarrow{x_\alpha x_\omega}$ *den Speer oder Pfeil* $\overrightarrow{y_\alpha y_\omega}$. Es gelten dann die Sätze, daß die absolute Polare der absoluten Polare eines Speeres oder Pfeiles wieder eben dieser Speer oder Pfeil ist,

und daß die beiden Operationen: Umkehrung eines Speeres oder Pfeiles, und Bildung der absoluten Polare, mit einander vertauschbar sind. Beide liefern zusammengesetzt die andere Erweiterung des Polarenbegriffs, für die wir hier ein besonderes Wort nicht nötig haben.

In gleicher Weise wie die vier Schnittpunkte der Seiten des orientierten Elementarvierseits sind nun auch deren Verbindungsebenen angeordnet:

$$u_\alpha = [\Xi_\alpha, H_\alpha], \quad u_\omega = [\Xi_\omega, H_\omega]$$

$$v_\alpha = [\Xi_\alpha, H_\omega], \quad v_\omega = [\Xi_\omega, H_\alpha].$$

Demnach würden wir eine zweite zu der eben betrachteten absolutkorrelative Figur einzuführen haben. Es liegen aber die Punkte x_α, x_ω vereinigt mit den Ebenen v_α, v_ω, und die Punkte y_α, y_ω vereinigt mit den Ebenen u_α, u_ω. Daher ist es zweckmäßiger, nämlich einfacher, nachträglich auch noch die beiden wohlgeordneten Ebenen v_α, v_ω in den Begriff des Speeres oder Pfeiles aufzunehmen, und also auch das Zeichen

$$\overrightarrow{v_\alpha v_\omega}$$

für *äquivalent* mit dem Zeichen $\overrightarrow{x_\alpha x_\omega}$ zu erklären.

Schließlich machen wir noch eine fernere Bemerkung, die uns von Wichtigkeit werden wird.

In dem komplexen Gebiete z. B., das von den Punkten der betrachteten Geraden gebildet wird, gibt es ∞^1 Staudtsche Ketten, die die beiden Punkte x_α, x_ω enthalten. Durch diese Punkte wird jede solche Kette, wie wir sagen wollen, in zwei *Halbketten* zerlegt. Sind x', x'' zwei verschiedene Punkte im Inneren einer solchen Halbkette, so bilden diese eine ganz bestimmte „positive“ oder „negative“ Folge, sie sind geordnet nach einem der beiden Schemata

$$(+) \qquad x_\alpha \longrightarrow x' \longrightarrow x'' \longrightarrow x_\omega,$$

$$(-) \qquad x_\alpha \longrightarrow x'' \longrightarrow x' \longrightarrow x_\omega.$$

Es gibt ferner ∞^1 Staudtsche Ketten, deren jede die beiden Punkte x_α, x_ω in der Art von einander trennt, daß sie in der zur Kette gehörigen Inversion gepaart werden. Das binäre Gebiet der betrachteten Geraden läßt sich dann durch einen komplexen Parameter t projektiv so darstellen, daß erstens die Punkte einer der genannten, wie wir sagen wollen, *ausgezeichneten* Ketten reelle Parameterwerte enthalten, zweitens der Parameter des Punktes x_ω einen positiv-imaginären Bestand-

teil erhält. Wachsenden Werten des reellen Parameters entspricht dann ein völlig bestimmter *positiver Umlaufssinn* der ausgezeichneten Kette, und man kann — mit Rücksicht auf die Verhältnisse in der in üblicher Weise hergestellten Gaußschen Ebene (t) — sagen, daß der Punkt x_α „rechts", der Punkt x_ω „links" von dieser Kette liege. Beide Punkte haben konjugiert-komplexe Parameter. Irgend zwei Punkte x', x'' auf einer ausgezeichneten Kette, die nicht einander diametral gegenüberliegen, d. h., die nicht mit x_α, x_ω durch eine Kette (einen Kreis in der Gaußschen Ebene) verbunden werden können, von denen nämlich keiner auf der absoluten Polarebene des anderen liegt, haben dann wieder eine bestimmte Reihenfolge $x' \longrightarrow x''$ oder $x'' \longrightarrow x'$: Ein veränderlicher Punkt x kann im positiven Sinne (d. h. mit wachsenden Werten von t) auf der Kette *entweder* von x' nach x'' *oder* von x'' nach x' so sich bewegen, daß der ganze durchlaufene Kettenbogen kein Paar diametral-gegenüberliegender Punkte enthält.

Die genau entsprechenden Bestimmungen treffen wir für die von Ebenen gebildeten Halbketten und ausgezeichneten Ketten, die durch die beiden Ebenen v_α, v_ω bestimmt werden. Wir sehen dann, daß bei einer projektiven (kollinearen oder korrelativen) Zuordnung zwischen Speeren oder Pfeilen die positiven Folgen auf den entsprechenden Ketten und Halbketten in einander übergehen. Jene Zuordnung aber, bei der jede Figur durch die konjugiert-komplexe Figur ersetzt wird, gehört zu den genannten nicht: Hier werden die orientierten Halbketten einander zugeordnet, die orientierten ausgezeichneten Ketten aber gehen jede in die *entgegengesetzt*-orientierte entsprechende Halbkette über. Wir erhalten also dann eine neue Figur, die von der eben beschriebenen wohl zu unterscheiden ist. Um die Mannigfaltigkeit der zu betrachtenden Figuren nicht verdoppeln zu müssen, setzen wir fest, *daß der Übergang eines Speeres oder Pfeils zur konjugiert-komplexen Figur stets von einer Umkehrung der Orientierung aller ausgezeichneten Ketten begleitet sein soll.*

Wir heben von dem Gesagten folgendes hervor:

Einer Geraden, die nicht Minimalgerade ist, lassen sich durch den Orientierungsprozeß zwei verschiedene Speere oder Pfeile zuordnen.

Jeder von diesen besteht aus der Geraden selbst zusammen mit einem Paar wohlgeordneter Punkte x_α, x_ω und einem Paar wohlgeordneter Ebenen v_α, v_ω, die der Geraden und zugleich der absoluten Fläche angehören.

Die Speere oder Pfeile sind zu Paaren als „absolute Polaren" angeordnet: Die Punkte und Ebenen des einen sind, in gleicher Reihenfolge, absolut-polar zu den Ebenen und Punkten des anderen.

Im Gebiete der Punkte (Ebenen) eines solchen Speeres oder Pfeiles sind die durch die Punkte x_α, x_ω (Ebenen v_α, v_ω) bestimmten ∞^1 ausgezeichneten Ketten und ebenso die ∞^1 Halbketten sämtlich orientiert.

Versuchen wir nun die Beschränkung aufzuheben, unter der wir den Begriff des Speers *oder* Pfeils bis jetzt erklärt haben, so bieten sich uns zwei ganz verschiedene natürliche Wege dar.

Wir setzen zunächst die Mannigfaltigkeit der betrachteten Geraden, samt ihrer doppelten Überdeckung durch die Mannigfaltigkeit der Speere (oder Pfeile) in das Gebiet der Minimalgeraden fort. Die so erhaltenen Figuren sollen ebenfalls Speere (aber nicht Pfeile) genannt werden.

So kommen wir zu einem abgeschlossenen *Speerkontinuum*, das aus dem doppelt überdeckten und mit einer *Verzweigungsmannigfaltigkeit* versehenen Plückerschen Linienkontinuum besteht und folgende Figuren umfaßt:

1. Die ∞^8 schon beschriebenen Speere (oder Pfeile).

2. Die ∞^6 Minimalgeraden, die zugleich Speere — aber nicht Pfeile — sind, und in ihrer Gesamtheit — als „*Minimalkomplex*" — die Verzweigungsmannigfaltigkeit ausmachen. Sie sind von dreierlei Beschaffenheit:

2a). Tangenten der absoluten Fläche, die nicht Erzeugende sind. Zu jeder gehört ein (wie man zu sagen pflegt, doppelt zählender) Punkt $x_\alpha = x_\omega$ und eine (doppelt zählende) Ebene $v_\alpha = v_\omega$ der absoluten Fläche (eine Minimalebene).

2b, c). Die 2. ∞^2 Erzeugenden der absoluten Fläche (mit unbestimmtem Punktepaar und unbestimmtem Ebenenpaar dieser Fläche).

Offenbar gehören zu allen unter 2. genannten Fällen bestimmt-orientierte Halbketten und ausgezeichnete Ketten nicht.

Zweitens ergänzen wir die Mannigfaltigkeit der betrachteten orientierten Elementarvierseite zur Gesamtheit aller orientierten Elementarvierseite. Die so, durch analytische Fortsetzung, aus der Figur des zugehörigen Pfeils (oder Speers) abzuleitenden Figuren sollen gleichfalls Pfeile (aber nicht Speere) heißen.

Das so entstehende abgeschlossene Kontinuum, das vollkommen eindeutig-umkehrbar und stetig dem Kontinuum der orientierten Elementarvierseite entspricht, ja von diesem eigentlich kaum verschieden ist, nennen wir *Pfeilkontinuum.* Es besteht aus folgenden Figuren:

1. Wiederum den ∞^8 beschriebenen Pfeilen (oder Speeren) allgemeiner Art.

2b und 2c). 2. ∞^6 *akzessorischen Pfeilen* (wie wir sagen wollen), die in ihrer Gesamtheit die beiden durch die Epitheteta links und

rechts zu unterscheidenden *akzessorischen Pfeilkomplexe* bilden. Keiner dieser besonderen Pfeile ist zugleich Speer.

Ein linkseitig- aber nicht zugleich auch rechtseitig-akzessorischer Pfeil besteht aus einer linkseitigen Erzeugenden der absoluten Fläche, und zwei darauf gelegenen *von einander verschiedenen* Punkten $x_\alpha(=y_\omega)$, $x_\omega(=y_\alpha)$, samt deren absoluten Polarebenen $v_\alpha(=u_\omega)$, $v_\omega(=u_\alpha)$. Zu den Punkten x_α, x_ω gehören, ganz wie im Falle 1., ∞^1 orientierte Halbketten und ∞^1 orientierte ausgezeichnete Ketten. —

Das Pfeilkontinuum umfaßt aber noch eine weitere aus „akzessorischen Pfeilen" bestehende Mannigfaltigkeit, die als *Durchschnittsfigur der beiden akzessorischen Komplexe* aufgefaßt werden muß, deren Pfeile mithin als zugleich linkseitig und rechtseitig-akzessorisch anzusehen sind, und übrigens orientierte Ketten nicht mehr bestimmen:

3. Das Pfeilkontinuum umfaßt fener die ∞^4 *Punktpfeile* (oder, wie man mit gleichem Rechte sagen könnte „Ebenenpfeile"), deren jeder aus einem (zweimal gesetzten) Punkt der absoluten Fläche und dessen (ebenfalls zweimal gesetzter) Polarebene besteht, einer *bestimmten* Geraden aber *nicht* zugeordnet ist, vielmehr zu allen Geraden eines Tangentenbüschels der absoluten Fläche gehört. In ihrer Gesamtheit bilden diese Pfeile *die absolute Pfeilkongruenz.*

Aus dieser Zusammenstellung ersieht man:

Das Speerkontinuum und das Pfeilkontinuum sind in der Umgebung von Stellen allgemeiner Lage, nämlich in einem kontinuierlich zusammenhängenden achtdimensionalen Teilgebiete, aber keineswegs durchweg mit einander identisch. Vielmehr ist die Zuordnung zwischen den Begriffen Speer und Pfeil, die „im allgemeinen" eindeutig ist, mit singulären Stellen behaftet, wie aus folgender Zusammenstellung hervorgeht:

Speer allgemeiner Art.	Pfeil allgemeiner Art.
∞^2 Minimalspeere, die ein ebenes Büschel bilden, darunter zwei Erzeugende der absoluten Fläche.	Punktpfeil.
Linkseitige [rechtseitige] Erzeugende der absoluten Fläche.	∞^4 linkseitige [rechtseitige] akzessorische Pfeile, darunter ∞^2 Punktpfeile.

Beide Kontinua, die in solcher Art einander teilweise überlagern, haben nun eine einfache algebraische Struktur. Das Speerkontinuum läßt sich *erschöpfend* darstellen durch ein System von sieben homogenen komplexen Koordinaten, zwischen denen gewisse zwei quadratische Gleichungen stattfinden (deren eine die Plückersche ist); das Pfeilkontinuum dagegen, ebenfalls *erschöpfend,* durch vier Paare von je zwei

homogenen komplexen Koordinaten. (Satz VI.) Aber weder sind die Speerkoordinaten zur erschöpfenden Darstellung der Pfeile brauchbar, noch findet das Umgekehrte statt. Zu jedem der beiden Kontinua gehört daher eine eigentümliche algebraische Geometrie, erklärt durch eine Gruppe vollkommen eindeutiger und stetiger Transformationen; eine Art der Geometrie, die in ähnlichem Sinne als eine *natürliche Fortsetzung der Nicht-Euklidischen Geometrie* angesehen werden kann, wie z. B. die Plückersche Liniengeometrie eine natürliche Fortsetzung der Nicht-Euklidischen (oder auch Euklidischen) Geometrie ist. (S. 481).

Wir werden weiterhin uns in der Hauptsache auf die Betrachtung des Pfeilkontinuums beschränken, das das interessantere von beiden zu sein scheint. Das Speerkontinuum aber liegt der sonst üblichen Betrachtungsweise näher; in der Tat haben Untersuchungen über Differentialgeometrie schon vielfach Anlaß zur Betrachtung von Speeren geboten. Man hat jedoch diesen Begriff ebenso wenig wie viele andere wichtige Begriffe der Geometrie mit genügender Schärfe und Vollständigkeit entwickelt, ja man hat ihn sogar mit dem ganz verschiedenen Begriff der (nicht orientierten) geraden Linie zusammengeworfen: Schon deshalb ist es nützlich, ihn ebenfalls zu betrachten.

Die Tatsachen, von denen nun die Rede sein soll, lassen sich zur Not auch so beschreiben, daß man statt des Begriffes Pfeil den Begriff Speer benutzt, ja man kann in gewissem Umfange den Begriff „gerade Linie" gebrauchen. Es scheint uns aber von Bedeutung zu sein, daß diese Beschreibung, *wenn sie (bei gleicher Allgemeinheit) Anspruch auf Klarheit und Präzision erheben soll*, dann eine ungemein viel verwickeltere Form annehmen muß.

Man kann in der mathematischen Literatur eine weitverbreitete Scheu vor der Einführung neuer Begriffe bemerken. Nötig ist natürlich die Ablehnung gedankenloser Erweiterungen des Wörterschatzes, solcher, wie sie jetzt in einigen Artikeln der Mathematischen Encyklopädie mit rührender Unparteilichkeit der hierfür gewiß dankbaren Nachwelt überliefert werden. Damit aber dürfte das Gute an der Sache auch erschöpft sein.

Es mag vielleicht zutreffen, daß einige Disziplinen mit ziemlich wenigen und einfachen Begriffen auskommen können. Die Geometrie aber gehört zu diesen gewiß nicht. Der Geometer arbeitet an einem Werke, dessen Bauplan selbst in den Grundlinien noch fortwährenden Änderungen unterliegt. Je mehr wirklich eigenes ein Autor beizutragen hat, um so öfter wird er neues und besseres Baumaterial brauchen. Dessen Beschaffung ihm durch engherzige Urteilsbildung erschweren, das heißt eine Prämie auf die Mittelmäßigkeit setzen. Der *horror novarum notionum* hat aber noch ganz anderes Unheil angerichtet. Da man nämlich doch viel mehr Begriffe brauchte, als man sich eingestehen wollte, namentlich auch solche, die einander teilweise überdecken, so hat man sie unter falscher Flagge eingeschmuggelt, indem man den vorhandenen Worten neue Bedeutungen unterschob. Mit unerklärten und proteusartigen Begriffen arbeiten, heißt das nicht, sich und anderen Sand in die Augen streuen? Heißt das nicht, die klare und lichtvolle Schönheit der mathematischen Wissenschaft in ihr Gegenteil verkehren?

Wer solche Erschleichungen gewohnheitsmäßig betreibt, hat der überhaupt ein mathematisches Gewissen? Gibt es für ihn noch eine Grenzlinie zwischen richtig und falsch? Hätten wir eine wissenschaftliche Kritik . . . . .

Vorurteilen zum Trotz habe man also den Mut, zu tun was die Sache verlangt. Man bete nicht an das Idol einer innerlich-unwahren Einfachheit, noch verderbe man sich das Konzept durch ängstliches Kleben am Überlieferten.

Den rechten Weg zeigt, in vielen Fällen wenigstens, die Gruppentheorie. Die Geometrie einer jeden Transformationsgruppe hat ihre eigentümlichen Bedürfnisse. Figuren, die z. B. in der Elementargeometrie wesentlich-verschieden sind, können äquivalent sein in einer anderen Art der Geometrie, die durch eine umfassendere Gruppe bestimmt wird. Der Fortschritt aber, den man mit solcher Erkenntnis gemacht hat, wird manchmal von einem gewissen Unbehagen begleitet sein: Für einen häufig benutzten und dabei vielleicht sehr einfachen Begriff hat man nur schleppende Umschreibungen zur Verfügung. In solchen Fällen bringt Befreiung *ein Wort*, und dieses wird dann zugleich Markstein nicht einer bloßen Verbreiterung, sondern einer Vertiefung unserer Erkenntnis. „Doch ein Begriff — und zwar ein zweckmäßig umgrenzter Begriff — muß bei dem Worte sein."

Die Geometrie wird noch viele neue Worte nötig haben; eine kritische Geschichte derer, die bis jetzt verständig oder unverständig gebildet worden sind, eine Geschichte also auch all des Unfugs, den man mit ihnen getrieben hat, würde ein lehrreiches Kapitel sein — in Wahrheit kaum weniger als eine Geschichte der Geometrie, von der wir freilich noch weit entfernt sind.

VII.

Parallelismus und Parataxie.

Unsere Betrachtungen führen unmittelbar zu der Einsicht, daß zwei bisher als ganz verschieden betrachtete[1]) Grundbegriffe der Nicht-Euklidischen Geometrie in einem engen Zusammenhang mit einander stehen, ja als in gewissem Sinne *äquivalent* zu erachten sind. Es sind das die Begriffe des gewöhnlichen und des sogenannten *Clifford*schen Parallelismus, oder, wie wir vorziehen zu sagen, die Begriffe Parallelismus und Parataxie, Begriffe, denen übrigens noch ein dritter analoger Begriff beigesellt werden muß. Übertragen wir z. B. den Begriff „parallele Gerade" sachgemäß auf Pfeile, so sehen wir, daß wir im ganzen vier neue Begriffe zu bilden haben: Zwei Pfeile können „parallel" sein in jeder der durch die folgenden symbolischen Gleichungen angedeuteten Arten:

$$x_\alpha = x'_\alpha; \quad x_\omega = x'_\omega; \quad x_\alpha = x'_\omega; \quad x_\omega = x'_\alpha.$$

Ebenso aber gibt es, wie man sogleich erkennt, auch vier Arten der Parataxie. Indessen genügt es uns, von diesen Begriffsbildungen nur die Hälfte zu betrachten.

1) F. Klein, Math. Ann. Bd. 37. Ebenso bei späteren Autoren.

Wir werden das Wort „parallel“ in Bezug auf Pfeile nur in dem beschränkteren Sinne gebrauchen, der durch die folgenden Erklärungen gegeben ist:

Zwei Pfeile heißen alpha-parallel, wenn sie in ihren Anfangspunkten übereinstimmen ($x_\alpha = x'_\alpha$).

Sie heißen omega-parallel, wenn sie in ihren Endpunkten übereinstimmen ($x_\omega = x'_\omega$).

Entsprechend bestimmen wir:

Zwei Pfeile heißen links-syntaktisch, wenn die zugehörigen orientierten Elementarvierseite in ihren linkseitigen Erzeugenden übereinstimmen ($\Xi_\alpha = \Xi'_\alpha$, $\Xi_\omega = \Xi'_\omega$). *Sie heißen rechts-syntaktisch, wenn diese Vierseite in ihren rechtseitigen Erzeugenden übereinstimmen* ($H_\alpha = H'_\alpha$, $H_\omega = H'_\omega$).

Wenden wir nun die absolute Korrelation an, so sehen wir, daß neben die beiden ersten noch zwei ganz analoge Begriffe gestellt werden nicht nur können, sondern auch müssen:

Zwei Pfeile heißen alpha-pseudoparallel, wenn sie in ihren Anfangsebenen übereinstimmen ($v_\alpha = v'_\alpha$). *Sie heißen omega-pseudoparallel, wenn sie in ihren Endebenen übereinstimmen* ($v_\omega = v'_\omega$).

Wie man sieht, entsprechen die sechs definierten Begriffe den sechs Paaren, die man aus vier Dingen herausgreifen kann:

Linkseitige Syntaxie	$\{\Xi_\alpha, \Xi_\omega\}$:	$\Xi_\alpha = \Xi'_\alpha$,	$\Xi_\omega = \Xi'_\omega$;
Rechtseitige Syntaxie	$\{H_\alpha, H_\omega\}$:	$H_\alpha = H'_\alpha$,	$H_\omega = H'_\omega$;
α-Parallelismus	$\{\Xi_\alpha, H_\alpha\}$:	$\Xi_\alpha = \Xi'_\alpha$,	$H_\alpha = H'_\alpha$;
ω-Parallelismus	$\{\Xi_\omega, H_\omega\}$:	$\Xi_\omega = \Xi'_\omega$,	$H_\omega = H'_\omega$;
α-Pseudoparallelismus	$\{\Xi_\alpha, H_\omega\}$:	$\Xi_\alpha = \Xi'_\alpha$,	$H_\omega = H'_\omega$;
ω-Pseudoparallelismus	$\{\Xi_\omega, H_\alpha\}$:	$\Xi_\omega = \Xi'_\omega$,	$H_\alpha = H'_\alpha$.

Es gilt also der folgende grundlegende Satz:

VII. *Unterwirft man die vier binären Gebiete, auf deren Inbegriff die Gesamtheit aller Elementarvierseite oder Pfeile abgebildet ist (Satz VI), irgend welchen projektiven Transformationen, in der Weise, daß man sie gleichzeitig auf irgend eine der 24 möglichen Arten unter einander vertauscht, so werden die sechs erklärten Begriffe unter einander vertauscht, und zwar ebenso, wie die sechs Paare, die man vier Dingen entnehmen kann.*

Die genannten Transformationen bilden eben die Gruppe von $24 \cdot \infty^{24}$ vollkommen-eindeutigen Transformationen, die wir schon in Art. VI eingeführt haben.

Wir haben nun hier ein sogenanntes *Übertragungsprinzip* vor uns, das mit dem als „Prinzip der Dualität“ bekannten Verfahren Verwandtschaft hat, und dieses (nämlich die Polarität in bezug auf ein räumliches Polarsystem) außerdem umfaßt. Wie die Gruppe aller komplexen Kollineationen und Korrelationen, eine Gruppe von $2 \cdot \infty^{2 \cdot 15}$ Transformationen, durch die Gruppe der Nicht-Euklidischen Bewegungen schon bestimmt ist, so ist unsere Gruppe von $24 \cdot \infty^{4 \cdot 6}$ Transformationen ebenfalls durch die Nicht-Euklidischen Bewegungen bestimmt. Jede dieser Gruppen definiert ferner eine besondere Art der Geometrie, *die in der Nicht-Euklidischen enthalten ist*, d. h., deren sämtliche Sätze ohne weiteres auch Sätze der Nicht-Euklidischen Geometrie sind, aber — zunächst wenigstens — nur einen Teil der zu dieser gehörigen Wahrheiten ausmachen. Und hier wie dort werden die einzelnen Begriffe und Theoreme gruppenweise angeordnet: *Dieselbe Rolle wie dort die Zahl 2, übernimmt hier die Zahl 24.* Es ist für Den, der überhaupt die Bedeutung des Gruppenbegriffs sich deutlich gemacht hat, kaum nötig, das noch weiter auszuführen. Den Zusammenhang solcher zusammengehöriger Sätze aufzudecken, deren jeder alle anderen durch ein mechanisches Verfahren liefert, ist ohne Zweifel ein zentrales Problem auch der Nicht-Euklidischen Geometrie selbst — um so mehr, als — hierin ungleich dem Prinzip der Dualität — solche Sätze eine recht verschiedenartige Form haben können, und daher, bei dem gegenwärtigen Stande der geometrischen Wissenschaft, ihre Wesensgleichheit nicht auch dem flüchtigen Blick sofort zu offenbaren brauchen. Ein erstes noch ganz an der Oberfläche liegendes Beispiel haben wir soeben kennen gelernt, in der Koordination der Begriffe Syntaxie, Parallelismus, Pseudoparallelismus. Ein weiteres Beispiel werden wir sogleich ausführlich behandeln. Zuvor aber wollen wir kurz noch einige Eigenschaften der eingeführten Begriffe besprechen.

Offenbar hat man zunächst drei Sätze nach dem Muster des folgenden:

Es gibt einen einzigen Pfeil, der zu einem gegebenen Pfeil links-syntaktisch, nnd zu einem zweiten rechts-syntaktisch ist.

Die absolute Polare irgend eines Pfeiles z. B. ist vollkommen dadurch bestimmt, daß sie zu diesem Pfeil selbst links-syntaktisch, und zu dem umgekehrten Pfeil rechts-syntaktisch ist. Ferner folgt, daß das Pfeilkontinuum sich eindeutig-umkehrbar und stetig abbilden läßt auf das Kontinuum aller Paare von Pfeilen, deren geradlinige Träger einen vorgeschriebenen der absoluten Fläche nicht angehörigen Punkt enthalten, oder auch in einer Ebene liegen, die nicht Minimalebene ist. Es ist das ein Fundamentalsatz unserer Theorie, den wir jedoch in

einer etwas abweichenden Form zu benutzen zweckmäßig finden (Lehrsätze II, IX).

Drei weitere elementare Lehrsätze sind gebildet nach folgendem Schema:

Wenn zwei Pfeile zu einem dritten α- (oder ω-)parallel sind, so sind sie es auch unter einander.

Hier findet sich also eine Haupteigenschaft der Parallelen des Euklidischen Raumes wieder. *Im Nicht-Euklidischen Raume erweist sich hierin der Begriff des Pfeiles als einfacher als der Begriff der geraden Linie.* Zwei Gerade nämlich, die zu einer dritten parallel sind, brauchen offenbar nicht unter einander parallel zu sein.

Beachtung verdient schließlich noch der Umstand, daß der Zusammenhang eines Bündels z. B. α-paralleler Pfeile ganz verschieden ist von dem Zusammenhang eines von Geraden gebildeten Lobatschewskyschen Parallelenbündels. Das erste Kontinuum läßt sich eindeutig-umkehrbar und stetig abbilden auf eine nicht-singuläre Fläche 2. Ordnung, nämlich auf die absolute Fläche, während das zweite Träger eines ternären Gebietes ist.

VIII.

Die drei Familien ausgezeichneter Kongruenzen.

Stellen wir die Verhältnisse der homogenen binären Parameter der vier Erzeugenden Ξ_α, Ξ_ω, H_α, H_ω eines orientierten Elementarvierseits als analytische Funktionen von einem oder zwei oder drei wesentlichen komplexen Parametern dar, so erhalten wir eine analytische Mannigfaltigkeit von ∞^2, ∞^4, ∞^6 solchen Elementarvierseiten und von entsprechenden Pfeilen: Einen *Regulus*, eine *Kongruenz*, einen *Komplex* von Pfeilen. Es sind das offenbar Begriffe, die analog sind den Begriffen (analytische) Regelfläche, Linienkongruenz, Linienkomplex der Plückerschen Liniengeometrie, sich mit diesen aber keineswegs decken.

Wir wollen nun drei Familien von Pfeilkongruenzen betrachten, deren jede zu den Erzeugenden der absoluten Fläche eine besonders einfache Beziehung hat. Es kann nämlich eintreten, daß durch Elimination der beiden wesentlichen Parameter einer Kongruenz ein Paar analytischer Gleichungen $\varphi = 0$, $\psi = 0$ entsteht, in das die Parameter der vier binären Gebiete (ξ_α), (ξ_ω), (η_α), (η_ω) auf eine der drei möglichen Arten *getrennt* eingehen:

(I) $\qquad \varphi(\xi_\alpha, \xi_\omega) = 0, \quad \psi(\eta_\alpha, \eta_\omega) = 0,$

(II) $\qquad \varphi(\xi_\alpha, \eta_\alpha) = 0, \quad \psi(\xi_\omega, \eta_\omega) = 0,$

(III) $\qquad \varphi(\xi_\alpha, \eta_\omega) = 0, \quad \psi(\xi_\omega, \eta_\alpha) = 0.$

Wir nennen diese besonderen Kongruenzen *ausgezeichnete Kongruenzen.*

In jedem der drei Fälle kann es eintreten, daß mindestens in eine der beiden Abhängigkeiten $\varphi = 0$, $\psi = 0$ nur eine der darin der Form nach vorkommenden Geraden wirklich eingeht. Diese ausgezeichneten Kongruenzen, bei denen jedesmal das erzeugende Elementarvierseit wenigstens eine Gerade von unveränderlicher Lage enthält, wollen wir als *singulär* bezeichnen. Besonderes Interesse haben unter diesen singulären Kongruenzen die, die *doppelt-singulär* sind, bei denen nämlich beide Abhängigkeiten $\varphi = 0$, $\psi = 0$ zugleich die vorausgesetzte Besonderheit haben. Man erkennt ohne weiteres:

Es gibt sechs Arten doppelt-singulärer ausgezeichneter Pfeilkongruenzen, deren jede vierfach unendlich viele Kongruenzen umfaßt, und durch je einen der sechs in Art. VII eingeführten Begriffe erklärt werden kann. Diese sechs Arten sind auf drei Paare verteilt, und zwar so, daß die beiden Arten eines Paares jedesmal den vollständigen Durchschnitt von zweien der drei Familien ausgezeichneter Kongruenzen bilden.

Genauer zeigt dies folgendes Schema:

(II, III).

$\xi_\alpha = \text{const.}$, $\xi_\omega = \text{const.}$ Kongruenzen linkssyntaktischer Pfeile.
$\eta_\alpha = \text{const.}$, $\eta_\omega = \text{const.}$ Kongruenzen rechtssyntaktischer Pfeile.

(III, I).

$\xi_\alpha = \text{const.}$, $\eta_\alpha = \text{const.}$ Kongruenzen α-paralleler Pfeile.
$\xi_\omega = \text{const.}$, $\eta_\omega = \text{const.}$ Kongruenzen ω-paralleler Pfeile.

(I, II).

$\xi_\alpha = \text{const.}$, $\eta_\omega = \text{const.}$ Kongruenzen α-pseudoparalleler Pfeile
$\xi_\omega = \text{const.}$, $\eta_\alpha = \text{const.}$ Kongruenzen ω-pseudoparalleler Pfeile.

Die vier letzten Arten doppelt-singulärer Kongruenzen werden offenbar von den komplexen Bewegungen vollkommen-transitiv vertauscht, nicht so aber die beiden ersten. Vielmehr enthalten diese je eine Unterart, die aus ∞^2 akzessorischen Kongruenzen besteht ($\xi_\alpha = \xi_\omega = \text{const.}$ oder $\eta_\alpha = \eta_\omega = \text{const.}$), und deren Individuen durch Bewegungen nur unter einander vertauscht werden können.

Die absolute Kongruenz ($\xi_\alpha = \xi_\omega$, $\eta_\alpha = \eta_\omega$) gehört zu den *nicht-singulären* Kongruenzen der ersten Familie.

Identifizieren wir jetzt für einen Augenblick die absolute Fläche mit einer Kugel im Euklidischen Raume, so sehen wir, daß eine analytische Transformation $x_\alpha \to x_\omega$ der Punkte dieser Fläche eigentlich-

oder uneigentlich-konform ist, wenn sie die beiden Scharen von Erzeugenden einzeln in Ruhe läßt oder vertauscht. Wir wollen daher allgemein erklären:

Die Transformation $x_\alpha \rightarrow x_\omega$ von Punkten der absoluten Fläche heiße *eigentlich-[uneigentlich-]konform*, wenn sie (im Gebiete regulären Verhaltens) die beiden Scharen von Erzeugenden der absoluten Fläche in Ruhe läßt [vertauscht].

Die Transformation $v_\alpha \rightarrow v_\omega$ von Ebenen der absoluten Fläche heiße *eigentlich-[uneigentlich-]konform*, wenn sie die beiden Scharen von Erzeugenden der absoluten Fläche in Ruhe läßt [vertauscht].

Es gelten dann offenbar, im Gebiete regulären Verhaltens, von dem allein hier die Rede sein wird, die folgenden Sätze:

(I). *Die Pfeile* $\overrightarrow{x_\alpha x_\omega}$ *oder* $\overrightarrow{v_\alpha v_\omega}$ *einer jeden* n i c h t - s i n g u l ä r e n *Kongruenz der ersten Familie vermitteln irgend eine (d. h. keinerlei Beschränkung unterworfene) eigentlich-konforme Transformation der Punkte, und eine eigentlich-konforme Transformation der Ebenen der absoluten Fläche.*

(II). *Die Pfeile* $\overrightarrow{x_\alpha x_\omega}$ *oder* $\overrightarrow{v_\alpha v_\omega}$ *einer jeden* n i c h t - s i n g u l ä r e n *Kongruenz der zweiten Familie haben ihre Anfangs- und Endpunkte auf irgend zwei (nicht notwendig verschiedenen)* k r u m m e n *analytischen Kurven der absoluten Fläche, und sie vermitteln eine uneigentlich-konforme Transformation von deren Ebenen.*

(III). *Die Pfeile* $\overrightarrow{x_\alpha x_\omega}$ *oder* $\overrightarrow{v_\alpha v_\omega}$ *einer jeden* n i c h t - s i n g u l ä r e n *Kongruenz der dritten Familie vermitteln irgend eine uneigentlich-konforme Transformation der Punkte der absoluten Fläche, und ihre Anfangs- und Endebenen berühren zwei auf dieser gelegene* k r u m m e *analytische Kurven.*

Augenscheinlich sind diese drei oder vielmehr sechs Sätze, die man leicht durch die etwas umständlichere Beschreibung der ausgeschlossenen Grenzfälle ergänzen wird, für die nicht-singulären ausgezeichneten Kongruenzen *charakteristisch.* Und Ähnliches gilt von den folgenden Eigenschaften, deren Formulierung sich auf sämtliche Fälle erstreckt:

(I). *Die Pfeile einer jeden Kongruenz der ersten Familie lassen sich auf zwei verschiedene Arten auf Reguli verteilen, derart, daß alle Pfeile jedes einzelnen Regulus zu einander syntaktisch sind.*

(II). *Die Pfeile einer jeden Kongruenz der zweiten Familie lassen sich auf zwei verschiedene Arten auf Reguli verteilen, derart, daß alle Pfeile jedes einzelnen Regulus zu einander parallel sind.*

(III). *Die Pfeile einer jeden Kongruenz der dritten Familie lassen sich auf zwei verschiedene Arten auf Reguli verteilen, derart, daß alle Pfeile desselben Regulus zu einander pseudoparallel sind.*

Im Falle (I) sind offenbar die Reguli derselben Schar — vermöge komplexer Bewegungen — zu einander kongruent, abgesehen von Grenzfällen, die als Ausartungen der übrigen betrachtet werden können.

Zugleich erkennt man:

Durch jeden Regulus, der nicht zu den soeben unter (I) — *oder* (II) — *oder* (III) — *genannten gehört, geht eine Kongruenz der ersten — oder zweiten — oder dritten — Familie.*

Hat also der Regulus keine der genannten drei Besonderheiten, so geht durch ihn je eine Kongruenz der ersten, zweiten *und* dritten Familie.

Bis hierher haben wir nicht viel anderes getan, als die Definitionsgleichungen der dreierlei ausgezeichneten Kongruenzen durch Worte zu umschreiben — was wir übrigens für durchaus notwendig halten. Nicht ganz so an der Oberfläche liegen die metrischen Sätze, von denen wir jetzt reden wollen.[1])

(I). Zu den Kongruenzen der ersten Familie gehört zunächst die absolute Kongruenz, die von allen Punktpfeilen $\Xi_\alpha = \Xi_\omega$, $H_\alpha = H_\omega$ gebildet wird. Es gehören ferner dazu zwei Gattungen von Kongruenzen, deren Pfeile zwar nicht sämtlich Punktpfeile, wohl aber sämtlich akzessorisch sind. ($\Xi_\alpha = \Xi_\omega$ *oder* $H_\alpha = H_\omega$.) Alle diese Kongruenzen schließen wir jetzt aus. Unter den übrig bleibenden befinden sich dann vier Arten von doppelt singulären Kongruenzen, und zwei von diesen

$$\xi_\alpha = \text{const.},\ \eta_\omega = \text{const.};\quad \xi_\omega = \text{const.},\ \eta_\alpha = \text{const.}$$

haben ihre Geraden in Minimalebenen, d. h. in Ebenen der absoluten Fläche. Auch diese beiden Arten von Kongruenzen (nicht aber auch die beiden anderen) wollen wir ausschließen.

Es gilt dann der folgende Satz:

Von den soeben aufgezählten Grenzfällen abgesehen besteht jede Kongruenz der ersten Familie aus den Normalen einer Schar von parallelen orientierten Flächen der Krümmung Null, und eventuell aus der analytischen Fortsetzung dieser (natürlich ebenfalls orientierten)

1) Wir können auf diese Dinge hier nur so weit eingehen, als es für unsere Zwecke durchaus nötig ist. — Wegen der Flächen von der Krümmung Null verweisen wir auf L. Bianchi, Lezioni di Geometria differenziale, vol. I (Pisa 1902), §§ 200, 219, 220, 221.

Normalenkongruenz in das von allen Pfeilen gebildete Kontinuum. Jede solche Normalenkongruenz wird auf diese Weise gefunden.[1])

Es ergibt sich, daß die zu einer solchen Normalenkongruenz absolut-korrelative Kongruenz wieder eine solche ist, ausgenommen dann, wenn die vorgelegte Kongruenz aus parallelen Pfeilen besteht.

Ferner bemerken wir, daß die sechsgliedrige Gruppe aller linkseitigen Schiebungen (bei denen alle rechtseitigen Erzeugenden — H — der absoluten Fläche einzeln in Ruhe bleiben) nicht nur die linkseitigen Erzeugenden, sondern auch die Paare von verschiedenen Erzeugenden (Ξ_α, Ξ_ω) (sowie auch noch die Tripel) transitiv untereinander vertauscht. Man kann daher alle Paare ξ_α, ξ_ω von Lösungen der Gleichung $\varphi(\xi_\alpha, \xi_\omega) = 0$ aus einem nicht zu speziell gewählten unter ihnen, nötigenfalls mit Hilfe eines Grenzübergangs, dadurch ableiten, daß man eine passend gewählte analytische Schar von linkseitigen Schiebungen zur Ausführung bringt. Das Entsprechende gilt von den Lösungen der Gleichung $\psi(\eta_\alpha, \eta_\omega) = 0$.

Beide Scharen von Schiebungen, die noch auf unendlich viele Arten sich wählen lassen, sind dann, wie verschiedenartige Schiebungen überhaupt, mit einander vertauschbar. Umgekehrt, entstehen die Pfeile allgemeiner Lage einer analytischen Pfeilkongruenz aus irgend einem Pfeil durch Zusammensetzung zweier analytischer Scharen von linkseitigen und rechtseitigen Schiebungen, deren jede aus einem Pfeil allgemeiner Lage ∞^2 andere hervorgehen läßt, so gehört die Kongruenz zur ersten Familie ausgezeichneter Kongruenzen. Wir können diesen Sachverhalt, ohne diesmal eine Einschränkung hinzufügen zu müssen, kurz so ausdrücken:

Die Kongruenzen der ersten Familie sind die Translationskongruenzen.[2])

---

1) Vergleichen wir diesen Satz mit dem zuvor angeführten, so ergibt sich:

„Wenn die gemeinsamen Normalen $\overrightarrow{x_\alpha x_\omega}$ einer Schar von (orientierten) parallelen Flächen von der Krümmung Null nicht alle dieselbe Erzeugende der absoluten Fläche treffen, so vermitteln sie eine eigentlich-konforme Beziehung $x_\alpha \rightarrow x_\omega$ zwischen Punkten dieser Fläche, *die nicht die Besonderheit hat, in einer der beiden Scharen alle Erzeugenden in Ruhe zu lassen* (soweit nämlich die Abbildung für diese Erzeugenden definiert ist)." Ebenso gilt das Umgekehrte.

2) Unter diesen Begriff fallen *nicht* die syntaktischen Kongruenzen, die ebenfalls, aber in ganz anderer Weise, durch Schiebungen erzeugt werden können. Wohl aber fallen unter ihn die Kongruenzen von parallelen oder pseudoparallelen Pfeilen, sowie die absolute Kongruenz.

Die oben erwähnte Willkür kann man dazu benutzen, die Flächen von der Krümmung Null selbst durch Translation entstehen zu lassen. Es ergeben sich dann die Bianchischen Sätze (s. die Zitate S. 495).

Man kann auch sagen: Die (orientierten) Flächen von der Krümmung Null

Natürlich liefert die Erzeugung, von der hier die Rede ist, die schon erwähnten kongruenten Reguli.

(II und III). Während die erste Familie ausgezeichneter Kongruenzen zu sich selbst absolut-korrelativ ist, sind es die zweite und dritte zu einander. Wir können diese zusammen behandeln.

Bei einer Kongruenz, die nicht von lauter akzessorischen Pfeilen gebildet wird, bilden die gemeinsamen Normalen[1]) zwischen einem Pfeil allgemeiner Lage und den zu ihm benachbarten Pfeilen in der Regel eine irreduzibele Regelfläche 4. Ordnung, die hier die Stelle des dem Euklidischen Raume angehörigen sogenannten Zylindroids vertritt. Diese Fläche kann aber in verschiedener Weise ausarten und sogar unbestimmt werden. Sie kann z. B. in zwei irreduzibele Flächen 2. Ordnung — sogenannte Cliffordsche Flächen — zerfallen. Man kommt dann offenbar wieder zu den soeben unter I behandelten Kongruenzen allgemeiner Art, und also, wenn man die sich darbietenden Grenzfälle nachträglich hinzufügt, zu allen diesen Kongruenzen. Die Fläche 4. O. kann ferner auch — als Ort gerader Linien betrachtet — derart in vier ebene Büschel zerfallen, daß deren zwei stets von Minimalgeraden gebildet werden. Lassen wir diese letzten als „uneigentliche“ Normalenörter beiseite, so bleiben als Örter „eigentlicher“ Normalen noch zwei — nicht notwendig von einander und von den eben genannten verschiedene — ebene Büschel von Geraden übrig, die einander in der absoluten Korrelation zugeordnet sind. Zwei solche Büschel aber können auf zwei verschiedene, einander korrelativ-zugeordnete Arten zu einer Geraden (die nicht Minimalgerade ist) normal sein: Entweder geht die Gerade durch die beiden Scheitel der Büschel, und diese liegen in zwei zu der Geraden und zu einander senkrechten Ebenen; oder die Gerade liegt in den zu einander senkrechten Ebenen der beiden Büschel, und diese haben ihre Scheitel auf der absoluten Polare der Geraden.[2]) Eine bekannte Definition aus dem Euklidischen Raum auf den Nicht-Euklidischen ausdehnend, nennen wir nun Kongruenzen (von Geraden, und ebenso) von Pfeilen, bei denen an einer Stelle allgemeiner Lage der erste dieser beiden Fälle eintritt, *isotrop*. Die zu diesen Kon-

entstehen, als Vereine betrachtet, durch Translation von (orientierten) Flächenelementen. Dieselbe Eigenschaft haben dann noch einige andere Vereine, die Grenzfälle der genannten sind.

1) Zwei Gerade sind zu einander „normal“, wenn jede die andere und zugleich deren absolute Polare schneidet. Es ist daher in dem hier allein in Betracht kommenden allgemeinen Falle klar, was man unter den zu einem Pfeil normalen Geraden zu verstehen hat.

2) Wir haben hier mehrere Fälle zusammengefaßt, die bei einer eingehenderen Untersuchung getrennt werden müssen.

gruenzen korrelativen, bei denen der zweite Fall eintritt, werden dann analog der schon eingeführten Bezeichnung „pseudoparallel“ *pseudisotrop* zu nennen sein. Zu *beiden* Familien von Kongruenzen aber werden wir die speziellen Kongruenzen rechnen müssen, bei denen *alle* Normalen irgend eines Pfeils allgemeiner Lage auch benachbarte Pfeile der Kongruenz senkrecht treffen. Es sind das alle Kongruenzen, die von syntaktischen, aber nicht akzessorischen Pfeilen gebildet werden: Eben die Kongruenzen, deren Vorhandensein wir schon oben angedeutet hatten, zu denen nämlich bestimmte dem Zylindroid analoge Flächen überhaupt nicht gehören. *Grenzfälle* dieser $2 \cdot \infty^4$ Kongruenzen sind schließlich alle Kongruenzen der zweiten und dritten Familie, die einem der beiden akzessorischen Komplexe ganz angehören: Es sind das die $2 \cdot \infty^2$ speziellen syntaktischen Kongruenzen $\xi_\alpha = \xi_\omega =$ const. und $\eta_\alpha = \eta_\omega =$ const. Auf diese also werden wir, nachdem wir schon die übrigen syntaktischen Kongruenzen als zugleich *isotrop* und *pseudisotrop* bezeichnet hatten, diese Worte — vermöge einer neuen Definition — zweckmäßigerweise ebenfalls in Anwendung bringen.

Nunmehr können wir weitere charakteristische Eigenschaften unserer Familien II, III sehr kurz ausdrücken:

Die zweite Familie ausgezeichneter Kongruenzen besteht aus allen pseudisotropen, die dritte aus allen isotropen Pfeilkongruenzen.

Beiden Familien zugleich gehören an die $2 \cdot \infty^4$ Kongruenzen syntaktischer Pfeile: unter diesen allein finden sich ($2 \cdot \infty^2$) *Kongruenzen, die ganz aus akzessorischen Pfeilen bestehen* (und also selbst in der Umgebung von Stellen allgemeiner Lage nicht als Kongruenzen von Speeren, und ebenso wenig von Geraden, angesehen werden können).

Wenden wir uns jetzt zurück zu dem in Art. VII verlassenen Gedankengang, so sehen wir, daß wir ein bemerkenswertes Resultat erhalten haben:

VIII. *Die zuvor erklärte aus 24 getrennten kontinuierlichen Scharen analytischer Transformationen bestehende unendliche Gruppe hat die — für sie (als analytische Gruppe) charakteristische — Eigenschaft, die folgenden drei Dinge in allgemeinster Weise unter einander zu vertauschen:*

(I). *Die Familie aller Translationskongruenzen.*

(II). *Die Familie aller pseudisotropen Kongruenzen.*

(III). *Die Familie aller isotropen Kongruenzen.*

Hierin also ist begründet die Anordnung von mehreren der vorhergehenden Sätze zu Tripeln.

Aber schon die im Satze VII genannte endliche Untergruppe von $24 \cdot \infty^{4 \cdot 6}$ Transformationen der Pfeile hat dieselbe Eigenschaft. Da diese spezielleren Transformationen den Vorzug haben, überall eindeutig zu sein, so wird man am besten irgend eine geeignet gewählte unter ihnen verwenden, wenn es sich darum handelt, die drei Dinge I, II, III in vorgeschriebener Weise unter einander zu vertauschen.

Jede unserer drei Familien ausgezeichneter Kongruenzen gehört zu einer eigentümlichen Art der Geometrie, oder vielmehr zu deren zweien. Jede bleibt nämlich in Ruhe bei einer unendlichen Gruppe von analytischen Transformationen der Pfeile, die aus zwei getrennten kontinuierlichen Scharen besteht, und diese Gruppe, sowie namentlich ihre (invariante) kontinuierliche Untergruppe definieren in bekannter Weise Äquivalenzbegriffe. Die z. B. zu den drei kontinuierlichen Untergruppen gehörigen Arten der Geometrie haben wir als in einem höheren Sinne äquivalent, nämlich in einander transformierbar erkannt: Und dieses scheint uns ein wichtiges Ergebnis zu sein, obwohl die Entwickelung der genannten Disziplinen selbst noch ganz eine Aufgabe der Zukunft ist.

Die genannten unendlichen Gruppen lassen sich ohne weiteres angeben. Im Falle I z. B. werden sie durch die folgenden wohl unmittelbar verständlichen Gleichungen[1]) ausgedrückt:

$$\left.\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{ll} \xi'_\alpha = \xi'_\alpha(\xi_\alpha, \xi_\omega), & \eta'_\alpha = \eta'_\alpha(\eta_\alpha, \eta_\omega) \\ \xi'_\omega = \xi'_\omega(\xi_\alpha, \xi_\omega), & \eta'_\omega = \eta'_\omega(\eta_\alpha, \eta_\omega) \end{array}\right. \\ \quad \begin{array}{ll} \xi'_\alpha = \xi'_\alpha(\eta_\alpha, \eta_\omega), & \eta'_\alpha = \eta'_\alpha(\xi_\alpha, \xi_\omega) \\ \xi'_\omega = \xi'_\omega(\eta_\alpha, \eta_\omega), & \eta'_\omega = \eta'_\omega(\xi_\alpha, \xi_\omega) \end{array} \end{array}\right\}$$

Ebenso bestimmt man ohne weiteres die noch vier getrennte Scharen umfassende unendliche Gruppe aller analytischen Transformationen der Pfeile, die zwei der drei Familien ausgezeichneter Kongruenzen, und folglich auch die dritte, einzeln in Ruhe lassen. Ihre invariante kontinuierliche Untergruppe

$$\xi'_\alpha = \xi'_\alpha(\xi_\alpha),\ \xi'_\omega = \xi'_\omega(\xi_\omega),\ \eta'_\alpha = \eta'_\alpha(\eta_\alpha),\ \eta'_\omega = \eta'_\omega(\eta_\omega)$$

und die zugehörige Art der Geometrie können auch dadurch charakterisiert werden, daß die sechs Begriffe der link- und rechtseitigen Syntaxie, des α- und ω-Parallelismus und Antiparallelismus einzeln in Ruhe bleiben.

1) Es versteht sich, daß diese Gleichungen wirklich Transformationen darstellen, d. h. im allgemeinen auflösbar sein müssen. Ebenso versteht es sich, daß die ihnen zu unterwerfenden Figuren dazu geeignete Existenzbereiche haben müssen.

Bemerkenswert ist der Umstand, daß die Translationskongruenzen, die isotropen und pseudisotropen Kongruenzen alle den *gleichen* Grad sogenannter Allgemeinheit haben, wiewohl das verallgemeinerte Zylindroid im ersten Falle nur zwei irreduzibele Bestandteile zu haben braucht, in den beiden anderen aber deren vier hat. Daß durch die letzte Art des Zerfallens keine stärkere Beschränkung herbeigeführt wird, als durch die erste, wird verständlich, wenn man bedenkt, daß das verallgemeinerte Zylindroid selbst schon eine stark-spezialisierte Regelfläche 4. Ordnung ist.

IX.

Die elliptische Geometrie mit dem reellen Pfeil als Raumelement.

Bis zu diesem Punkte haben wir unsere Untersuchung in der Hinsicht völlig allgemein geführt, daß wir reelle Figuren gegenüber den komplexen nicht ausgezeichnet haben. Wiewohl nun diese Art von Betrachtung sich noch weiter fortsetzen ließe, wollen wir jetzt die Voraussetzung einführen, die für die elliptische Geometrie charakteristisch ist.

Wir nehmen nunmehr an, daß die absolute Fläche reell ist, und überdies reelle Scharen von Erzeugenden, nicht aber reelle einzelne Erzeugende, und folglich auch keine reellen Punkte und Ebenen hat.

In Folge hiervon liegen jetzt irgend zwei verschiedenartige Erzeugende der absoluten Fläche in einem *reellen (nicht orientierten) Elementarvierseit*, das aus vier paarweise konjugiert-komplexen Erzeugenden Ξ und $\overline{\Xi}$, H und $\overline{H}$ besteht. *Reelle orientierte Elementarvierseite, und entsprechende reelle Pfeile aber gibt es, nach unserer früheren Definition reeller Figuren, überhaupt nicht.* Denn wenn man die eben genannten Erzeugenden in eine bestimmte Reihenfolge bringt, also etwa

$$\Xi_\alpha = \Xi,\ \Xi_\omega = \overline{\Xi},\ H_\alpha = H,\ H_\omega = \overline{H}$$

setzt, so erhält man, bei Übergang von dieser Figur zur konjugiert komplexen, das orientierte Elementarvierseit

$$\Xi'_\alpha = \overline{\Xi},\ \Xi'_\omega = \Xi,\ H'_\alpha = \overline{H},\ H'_\omega = H,$$

das mit dem ersten niemals identisch sein kann, vielmehr aus ihm durch den von uns als *Umkehrung* bezeichneten Prozeß hervorgeht. Es ist nun aber offenbar sachgemäß, den Begriff der „reellen Figur" im vorliegenden Falle derart zu erweitern, daß auch diese orientierten Elementarvierseite noch als „reell" bezeichnet werden.

Wir erklären daher:

Ein orientiertes Elementarvierseit heißt reell, wenn das konjugiert-komplexe orientierte Elementarvierseit aus ihm durch Umkehrung der Orientierung hervorgeht.

Als notwendige, d. h. bei zweckmäßiger Begriffsbildung unvermeidliche, Folgen dieser Definition ergeben sich dann noch andere:

Ein Pfeil heißt reell, wenn er konjugiert-komplex ist zum umgekehrten Pfeil.

Eine von komplexen Pfeilen gebildete Figur heißt reell, wenn sie mit der zu ihrer Umkehrung konjugiert-komplexen Figur zusammenfällt.

In einem reellen Paar von imaginären Pfeilen ist dann jeder Pfeil konjugiert komplex *nicht* zu dem anderen, sondern zu der Umkehrung des anderen.

Entsprechend wird man z. B. erklären:

„Ein *Speer* heißt reell, wenn er zu einer reellen Geraden gehört". Er ist dann konjugiert-komplex zum umgekehrten Speer, und es ergibt sich, daß die Begriffe „reeller Pfeil" und „reeller Speer im elliptischen Raume" gar nicht von einander verschieden sind: Beide Begriffe decken sich, soweit sie Örter reeller Punkte und Ebenen bedeuten, vollkommen mit dem Begriff, den man als *orientierte reelle Gerade* zu bezeichnen pflegt (eigentlich aber, nachdem der Begriff der Geraden einmal auf das komplexe Gebiet ausgedehnt worden ist, reellen Zug einer reellen orientierten Geraden nennen sollte). Jeder reelle Pfeil oder Speer enthält nämlich eine ausgezeichnete Kette (S. 484), die von reellen Punkten, und eine andere, die von reellen Ebenen gebildet wird. Die Elemente einer jeden dieser Ketten haben eine bestimmte „positive" Reihenfolge — wobei in bezug auf *einen* Pfeil oder Speer die Zuordnung zwischen beiden „positiven" Folgen willkürlich gewählt werden kann, von uns aber bereits bestimmt worden ist (S. 485) — und diese beiden Folgen sind eben das, was man gewöhnlich als *positive Richtung* und als *positiven Drehungssinn* bezeichnet. Ein reeller Pfeil oder Speer ist schon durch eine der beiden zu seiner Definition dienenden Ebenen, etwa durch seine *Anfangsebene* vollkommen bestimmt.[1]) Also:

---

1) Bestimmt man in gleicher Weise den reellen Pfeil etwa durch seinen Anfangs*punkt*, so erhält man natürlich Sätze, die den folgenden äquivalent sind, und aus ihnen mechanisch abgeleitet werden können. An Stelle der isotropen Kongruenzen treten dann die pseudisotropen. Wir geben in unserer Formulierung den Ebenen und isotropen Kongruenzen den Vorzug vor den Punkten und pseudisotropen Kongruenzen mit Rücksicht auf den Grenzfall der Euklidischen Geometrie.

In der Mannigfaltigkeit aller reellen Pfeile oder Speere des elliptischen Raumes hat man ein vollkommenes Bild des algebraischen Kontinuums der ∞^4 *Ebenen (oder Punkte) der absoluten Fläche. Jeder dieser imaginären sogenannten Minimalebenen kann nämlich ein völlig bestimmter reeller Pfeil zugeordnet werden, und zwar (z. B.) der in ihr liegende reelle Pfeil, der die Minimalebene zur Anfangsebene hat.*

Jeder analytischen Mannigfaltigkeit von ∞^2 *solchen Ebenen entsprechen dann die reellen Pfeile einer isotropen Kongruenz.*[1])

Ist die analytische Mannigfaltigkeit insbesondere reell (d. h. sind ihre Ebenen paarweise konjugiert-imaginär), so ist die isotrope Kongruenz eine „Doppelkongruenz", sie ändert sich nicht, wenn man ihre sämtlichen Pfeile umkehrt.[2])

Die linkseitigen [rechtseitigen] Erzeugenden der absoluten Fläche haben zu reellen Bildern die links- [rechts-] syntaktischen Kongruenzen reeller Pfeile.

Nachdem man einmal für die Ebenen der absoluten Fläche reelle Bilder gefunden hat, hat man solche offenbar auch für deren wohlgeordnete Paare, also für alle komplexen Pfeile. In der Art der Zuordnung hat man dabei noch eine gewisse Willkür. Über diese verfügen wir so, daß bei Übergang von einem imaginären Pfeil zu einem reellen die reellen Bilder mit dem reellen Pfeil zusammenfallen:

Als reelles Bild eines komplexen Pfeils soll die Figur von zwei wohlgeordneten reellen Pfeilen fungieren, deren erster mit dem komplexen Pfeil die Anfangsebene, und deren zweiter mit ihm die Endebene gemein hat.

In Zeichen kann diese Definition so dargestellt werden:

$$(\Xi_\alpha,\ \Xi_\omega;\ H_\alpha,\ H_\omega) \sim$$

$$(\Xi_\alpha,\ \overline{\Xi}_\alpha;\ \overline{H}_\omega,\ H_\omega) \to (\Xi_\omega,\ \overline{\Xi}_\omega;\ H_\alpha,\ \overline{H}_\alpha).$$

Ist der komplexe Pfeil ein *Punktpfeil*, so besteht sein reelles Bild aus zwei entgegengesetzten Pfeilen, deren *erster* der zu dem Punktpfeil gehörigen Minimalebene zugeordnet ist.

---

1) Man kann hier nicht etwa von den Ebenen einer „der absoluten Fläche umschriebenen Developpabelen" reden; denn die ∞^2 Ebenen, die eine Erzeugende der absoluten Fläche enthalten, bilden zwar eine analytische Mannigfaltigkeit, eine „Developpabele" aber bilden sie in keinem Sinne, ganz abgesehen davon, daß dieses viel mißbrauchte Wort eine metrische Bedeutung hat.

2) Doppelkongruenz nennen wir jede Kongruenz mit dieser Eigenschaft, unter Ausschluß der absoluten Kongruenz.

Es gilt nunmehr der Satz[1]):

Die isotropen Kongruenzen reeller Pfeile haben die — für sie charakteristische — Eigenschaft, daß die reellen Bilder ihrer komplexen Pfeile aus den sämtlichen Paaren reeller Pfeile bestehen, die der betrachteten Kongruenz selbst angehören.

Auch die *pseudisotropen* Kongruenzen kann man natürlich sehr leicht durch die reellen Bilder ihrer komplexen Pfeile charakterisieren. Jeder von beiden reellen Pfeilen des Bildes nämlich ist hier dadurch bestimmt, daß er linkssyntaktisch zu dem einen und rechtssyntaktisch zu dem anderen von zwei Pfeilen ist, die man der Kongruenz selbst entnehmen kann; und jede analytische Kongruenz, der diese Eigenschaft zukommt, ist pseudisotrop.

Zugleich ergibt sich noch eine andere bemerkenswerte Folgerung:

Wenn eine isotrope oder pseudisotrope Pfeilkongruenz reell ist, so hat sie immer einen, aber auch nur einen reellen Zug, und diesem gehören alle in der Kongruenz enthaltenen reellen Pfeile an.

Unter einem reellen Zug verstehen wir natürlich ein Kontinuum von ∞^2 (und nicht weniger) reellen Pfeilen der Kongruenz.

Wir benutzen jetzt die gewonnene Einsicht dazu, das in Art. VIII erörterte Übertragungsprinzinp noch in eine andere Form zu bringen. Wir gehen dabei aus von der folgenden nahe liegenden Bemerkung:

Bezieht man die linkseitigen — rechtseitigen — Erzeugenden der absoluten Fläche des elliptischen Raumes projektiv auf ein binäres Gebiet (ξ) — (η) —, *so werden konjugiert-imaginären Erzeugenden solche Punkte zugeordnet, die einander im Polarsystem einer definiten Hermiteschen Form entsprechen.*[2])

Solche Polarsysteme (die alle zueinander projektiv sind) kann man sich nun sehr leicht in zweckmäßiger Form verschaffen. Wir nehmen im Euklidischen Raume eine reelle Kugel vom Radius Eins an und unterscheiden deren Erzeugende, nicht wie zuvor, durch Epitheta links und rechts, sondern durch Indices α, ω, so daß z. B. Ξ'_α das Zeichen für irgend eine Erzeugende der ersten, Ξ'_ω das Zeichen für eine Erzeugende der zweiten Schar wird. Durch den Schnitt der Kugel mit der unendlich fernen Ebene sind nun beide Scharen von Erzeugenden projektiv aufeinander bezogen, so daß sie als Trägerinnen *desselben* binären

1) Man vergleiche hiermit und mit dem Folgenden eine Abhandlung des Verfassers: *Sugli enti analitici.* Rend. Circ. Pal. t. 21, 1906 (teoremi VIII, XIV).

2) In der Gaußschen Ebene ist das die Inversion, oder sogenannte Transformation durch reziproke Radien, die zu irgend einem Kreis mit reellem Mittelpunkt und rein-imaginärem Radius gehört.

Gebietes (ξ) angesehen werden können. Die reellen Punkte von zusammengehörigen Erzeugenden liegen dann auf der Kugel einander diametral gegenüber. Legt man nun durch solche gepaarte Punkte gleichartige Erzeugende, oder was auf dasselbe hinauskommt, legt man durch denselben reellen Kugelpunkt verschiedenartige Erzeugende, so entsprechen die zugehörigen Stellen des binären Gebietes (ξ) einander in einem der besprochenen Polarsysteme. In der Kugelfläche selbst aber hat man zugleich einen reellen Repräsentanten des Gebietes (ξ), indem man sie als Riemannsche Zahlenkugel benutzt, und etwa jeder Erzeugenden Ξ'_α ihren reellen, kurz mit ξ zu bezeichnenden Punkt zuordnet. In der Spiegelung am Mittelpunkt der Kugel entspricht dann diesem Punkt ξ derselbe Punkt ξ^*, der ihm durch das Hermitesche Polarsystem zugeordnet wird.[1])

Die evidente Anwendung dieser Überlegung läßt sich etwa so in Worte fassen:

IX. *Die (komplexen) orientierten Elementarvierseite* (Ξ_α, Ξ_ω; H_α, H_ω) *und die zugehörigen Pfeile des elliptischen Raumes lassen sich (projektiv) zuordnen je zwei Paaren von Erzeugenden* (Ξ'_α, Ξ'_ω); (H'_ω, H'_α), *die man zwei Kugeln vom Radius Eins des Euklidischen Raumes entnehmen kann.*[2]) *Damit sind dann zugleich die sämtlichen Pfeile den Paaren von (komplexen) Punkten*

$$x'_l = (\Xi'_\alpha, \Xi'_\omega), \quad x'_r = (H'_\alpha, H'_\omega)$$

eben dieser Kugeln zugeordnet.

Diese Abbildung läßt sich so einrichten, daß den reellen Pfeilen die Paare reeller Punkte x'_l, x'_r *beider Kugeln zugeordnet werden, und daß außerdem der Umkehrung eines Pfeiles die Spiegelung (Diametralspiegelung) an beiden Kugelmittelpunkten, und der absoluten Korrelation die Diametralspiegelung der rechten Bildkugel entspricht.*

Die Abbildung, zu der wir hier gelangt sind, ist offenbar ganz dieselbe, von der — unter Beschränkung auf das reelle Gebiet — schon im Satze II die Rede war, und die wir damals als eine *Ausdehnung der Gaußschen Methode der sphärischen Bilder auf den elliptischen Raum* bezeichnet hatten. Namentlich entspricht jeder reellen oder komplexen linkseitigen [rechtseitigen] Schiebung im elliptischen Raume

1) Diese Dinge sind bekannt. Vgl. F. Klein, Math. Ann. Bd. 37.

2) Die etwas störende Umkehrung der Anordnung der beiden letzten Indices kann man vermeiden; dann aber werden weiterhin die Bewegungen und eigentlich-konformen Abbildungen nicht Punkten und isotropen Kongruenzen, sondern den korrelativen Figuren zugeordnet.

eine ebenfalls reelle oder komplexe Bewegung (Drehung) der linken [rechten] Bildkugel. Ferner entsprechen den ∞^2 oder ∞^4 Punktepaaren, die man erhält, wenn man die linke Kugel mit der rechten durch eine reelle oder komplexe *Bewegung* (Umlegung) zur Deckung bringt, die ∞^2 reellen oder ∞^4 komplexen Pfeile, die durch denselben reellen oder komplexen, nicht der absoluten Fläche angehörigen *Punkt* des elliptischen Raumes gehen [in derselben Ebene liegen].[1])

Ferner steht die Zuordnung des Satzes IX in einer einfachen Beziehung zu der des Satzes VI.

Es habe der komplexe Pfeil $\overrightarrow{v_\alpha v_\omega}$ die reellen Bilder $\overrightarrow{v_\alpha \bar{v}_\alpha}$ und $\overrightarrow{\bar{v}_\omega v_\omega}$ und diesen drei Pfeilen mögen entsprechen die drei Punktepaare (x'_l, x'_r), (y'_l, y'_r), (z'_l, z'_r), von denen die beiden letzten reell sind. Dann sind y'_l und z'_l die reellen Punkte der α- und ω-Erzeugenden durch x'_l und ebenso y'_r und z'_r die reellen Punkte der α- und ω-Erzeugenden durch x'_r. Die beiden Punktepaare y'_l, z'_l und y'_r, z'_r sind also — in dieser Anordnung — *reelle Bilder der beiden komplexen Punkte* x'_l, y'_r. Bei einer komplexen linkseitigen Schiebung werden nun die α- und ω-Erzeugenden der linken Bildkugel in *gleicher* Weise projektiv vertauscht, nämlich so, daß der absolute Kegelschnitt der Euklidischen Geometrie, der Träger des binären Gebietes (ξ), in Ruhe bleibt. Die linke Bildkugel wird dabei, als Ort der Punkte y'_l, in allgemeinster Weise eigentlich-kollinear transformiert, als Ort der Punkte z'_l aber so, daß diese zweite Transformation aus der ersten durch die Diametralspiegelung

1) Wie in Art. II angegeben, kann man die homogenen Koordinaten des genannten Punktes (oder der Ebene) so wählen, daß sie identisch werden mit den Eulerschen Parametern der Bewegung (Umlegung). Diese Bemerkung bildet den Ausgangspunkt für zahlreiche weitere Folgerungen kinematischer Natur, mit denen wir uns in einem späteren Aufsatze zu beschäftigen gedenken.

Was die Methode der sphärischen Bilder selbst angeht, so bemerken wir nachträglich noch, daß ein verwandtes Verfahren neuerlich auch von Herrn Bianchi angewendet wird. (Atti di Torino, 1904, p. 381 ss.) Dieses Verfahren stellt jedoch, in der Anwendung auf Probleme der vorliegenden Art, nur eine Entwickelungsstufe des unsrigen dar. Der Begriff des Pfeiles fehlt, und jedesmal *vier* der von uns wohl-unterschiedenen Figuren erhalten, nach Bianchi, *dieselbe „Rappresentazione di Clifford"*, wie er seine Bildfiguren nennt. Als Urheber dieser Methode bezeichnet Herr Bianchi (ausschließlich) Herrn G. Fubini, und er verweist auf dessen — dem Schreiber dieser Zeilen leider nicht zugängliche — Dissertation (Il parallelismo di Clifford negli spazi ellittici, Annali. della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, vol. IX, 1900). Dasselbe Verfahren ist jedoch, wohl ziemlich gleichzeitig (20. III. 1900), auch vom Verfasser explizite angegeben worden (Jahresber. d. D. M. V. 1902, S. 313, Anmerkung; S. 319, *Satz I*), zusammen mit weitergehenden Entwickelungen, die zum Teil mit späteren Darlegungen von Bianchi sich decken. (Vgl. S. 507).

hervorgeht. Modifizieren wir also die Abbildung in der Weise, daß an Stelle des Punktes z'_l dessen diametrales Spiegelbild z^*_l gesetzt wird, so entsteht eine Abbildung der komplexen Pfeile auf Punktepaare y'_l, z^*_l und y'_r, z^*_r zweier Kugeln, bei der die komplexen Bewegungen durch je *eine* eigentliche Kollineation der Bildkugeln dargestellt werden, d. h. es entsteht eine Abbildung vom Typus des Satzes VI.

Bleiben wir jetzt bei der minder einfachen, aber zur Darstellung reeller Beziehungen geeigneteren Abbildung des Satzes IX, so ist vor allem zu beachten: Konjugiert-imaginären Pfeilen des elliptischen Raumes entsprechen *nicht* konjugiert-imaginäre Punktepaare, sondern solche, deren jedes konjugiert-imaginär ist zum diametralen Spiegelbild des anderen. Konjugiert-imaginären Punktepaaren der Bildkugeln entsprechen ebenso Pfeile, deren jeder konjugiert-imaginär ist *nicht* zu dem anderen, sondern zur Umkehrung des anderen. Reellen Paaren imaginärer Pfeile entsprechen aber reelle Paare imaginärer Punktepaare.

Ferner heben wir hervor:

Eine komplexe Bewegung im elliptischen Raume bewirkt erstens natürlich eine Vertauschung der komplexen Pfeile untereinander, zweitens aber auch zwei i. a. verschiedene Vertauschungen der reellen Pfeile. Die beiden letzten Transformationen sind eben die, die aussagen, wie die reellen Bilder der komplexen Pfeile transformiert werden. (Nur dann, wenn die gegebene komplexe Bewegung reell ist, fallen diese Transformationen mit einander und mit eben dieser Bewegung zusammen.) Sie gehen durch den Umkehrungsprozeß in einander über, und haben zu sphärischen Bildern eigentlich-kollineare Transformationen, die durch die doppelte Diametralspiegelung in einander übergehen.

Ähnliche Beziehungen erhält man offenbar auch, wenn man überhaupt komplex-konforme Transformationen der Bildkugeln auf das Pfeilkontinuum überträgt.

Nachdem hiermit das gegenseitige Verhältnis der Sätze II, VI und IX aufgeklärt ist, betrachten wir den letzten noch etwas näher. Wir bemerken, daß die ausgeführten Operationen im Grunde nur eine Spezialisierung derer sind, die zu dem Satze VII geführt haben; wir haben jedoch, statt eine einzelne Fläche 2. Ordnung zu betrachten, jetzt deren drei in Beziehung zu einander gesetzt. Dies ist für die ausgeführten Schlüsse gleichgültig; es ist also deutlich, daß alle in Art. VIII entwickelten Sätze sich hier wiederfinden werden, natürlich mit abgeändertem Wortlaut. Bei der Ausführung dieses Gedankens fassen wir uns kurz und betrachten nur *reelle* Figuren.

X. *In der Abbildung der Sätze II und IX entsprechen einander unter anderen die folgenden Figuren:*

(I.) *Reelle Translationskongruenz.*	*Paar reeller analytischer Kurven.*[1])
(II.) *Reelle nicht-syntaktische pseudisotrope Kongruenz.*	*Reelle uneigentlich-konforme Abbildung der linken Kugel auf die rechte.*[2])
(III.) *Reelle nicht-syntaktische isotrope Kongruenz.*	*Reelle eigentlich-konforme Abbildung der linken Kugel auf die rechte.*[2])
(II, III.) *Reelle Kongruenz links- [rechts]-syntaktischer Pfeile.*	*Reeller Punkt der linken [rechten] Bildkugel, verbunden mit allen komplexen Punkten der rechten [linken].*

Dieser Satz bedarf, um richtig aufgefaßt zu werden, wohl noch einer Erläuterung.

Eine *reelle* (analytische) Kongruenz von Pfeilen ist nach unserer Definition eine solche, deren komplexe Pfeile paarweise in der Beziehung stehen, daß jeder Pfeil eines Paares konjugiert-komplex ist

1) Vgl. Greifswalder Festschrift 1900 S. 76 = Jahresber. d. M. V. 1902, S. 321, wo jedoch unter reellen Kurven und Kongruenzen nur reelle Züge von solchen verstanden werden.

Später hat den gleichen Gedanken auch Herr Bianchi entwickelt (Atti di Torino 1904). Indessen erhält seine Darstellung einiges, womit wir nicht einverstanden sein können. Durch Erfahrung darüber belehrt, daß stillschweigend ausgeführte Berichtigungen zum Schaden der Sache leicht übersehen werden können, machen wir die Differenzpunkte namhaft: Es ist unzutreffend, daß die Paare reeller analytischer Kurvenzüge (Bianchi sagt Kurven) Grenzfälle konformer Abbildungen sind; wirkliche Grenzfälle sind vielmehr die im Texte genannten Figuren von Punktepaaren mit festem Punkt, und Systeme von solchen. Entsprechend ist die Normalenkongruenz einer reellen Fläche von der Krümmung Null im elliptischen Raume niemals isotrop — auch nicht nach Bianchis von der unsrigen materiell-abweichender Erklärung dieses Begriffs — und ebenso wenig ist sie Grenzfall einer „isotropen" Kongruenz. Es gibt aber Grenzfälle, nämlich die bei Bianchi nicht erwähnten parataktischen Kongruenzen (von Cliffordschen Parallelen); und diese sollten unseres Erachtens in den Begriff der „isotropen" Kongruenzen selbst einbezogen werden. Bianchis Definition, die — in minder präziser Form — auch den erwähnten Arbeiten von Coolidge zugrunde liegt, können wir auch dann nicht für zweckmäßig halten, wenn sie folgerecht gehandhabt wird.

2) Dieser Doppelsatz rührt im wesentlichen von Herrn J. Coolidge her. Vgl. die Zitate auf Seite 477.

Im komplexen Gebiete sind offenbar alle *singulären* isotropen und pseudisotropen Kongruenzen, und keine anderen, auszuschließen.

zur *Umkehrung* des anderen. Sie braucht nicht notwendig reelle Pfeile zu enthalten, und noch weniger braucht sie einen *reellen Zug* zu haben, das heißt (in ihrem Existenzbereich) ein Kontinuum von ∞^2 reellen Pfeilen zu enthalten. Sie kann aber einen oder mehrere, auch unendlich viele reelle Züge enthalten; und außerdem kann sie isolierte reelle Pfeile, und Kontinua von ∞^1 solchen haben. Das ganz Entsprechende gilt von einer reellen sphärischen Kurve; diese kann nur paarweise konjugiert-komplexe Punkte haben, oder einzelne reelle Punkte, oder reelle Züge von solchen. Im Falle (I) nun sind alle diese Denkmöglichkeiten auch Wirklichkeiten. Unser Satz gibt vollständige Auskunft darüber, wie die Örter reeller Pfeile auf der einen Seite und die Örter reeller Punktepaare auf der anderen einander entsprechen, *aber auch darüber*, wie reelle Paare imaginärer Pfeile reellen Paaren von imaginären Punktepaaren entsprechen. — Ganz anders verhalten sich, wie wir schon gesehen haben, die reellen Kongruenzen der II. und III. Familie. Demnach hat man auch einen entsprechenden Satz über konforme Abbildung, den man sehr leicht direkt beweisen wird:

„*Wenn eine konforme Beziehung zwischen zwei Kugelflächen reell ist, das heißt, wenn sie konjugiert-komplexen Punkten der einen solche der anderen zuordnet, so hat sie immer einen und nur einen „reellen Zug“: Es existieren zwei Riemannsche Flächen, deren Punkte durch die Abbildung einander zugeordnet werden.*“[1])

Der tiefgehende Unterschied, der hiernach zwischen den *reellen* ausgezeichneten Kongruenzen der ersten Familie und denen der zweiten und dritten stattfindet, zeigt sich zum Beispiel auch in folgendem Satze, dem ein analoger aus der Theorie der Translationskongruenzen offenbar nicht gegenübersteht:

Wenn in einem gewissen Gebiete die Koordinaten[2]) *eines veränderlichen reellen Pfeils stetige und (wenigstens) einmal differentiierbare Funktionen von zwei wesentlichen reellen Parametern sind, und wenn daselbst die gemeinsamen reellen Normalen zwischen einem beliebigen Pfeil und seinen Nachbarpfeilen zwei ebene Büschel bilden (oder unbestimmt*

1) Vgl. die auf Seite 503 zitierte Abhandlung, und Math. Ann. Bd. 63, 1906. Wir bemerken dazu noch: Entnimmt man einer reellen konformen Abbildung zwischen beiden Kugelflächen zwei Paare entsprechender reeller Punkte (ξ, η) und (ξ', η'), so sind diese selbst, wohlgeordnet, das reelle Bild eines Paares zugeordneter komplexer Punkte, wenn die Abbildung eigentlich ist. Ist die Abbildung aber uneigentlich, so besteht das reelle Bild aus den wohlgeordneten Paaren (ξ, η') und (ξ', η). Vgl. die Sätze auf S. 503 und 514.

2) Bei Gebrauch homogener Koordinaten natürlich „die Verhältnisse der Koordinaten“.

sind), so ist dieses Gebiet von ∞^2 *Pfeilen ganz enthalten in einer bestimmten analytischen, und zwar in einer isotropen oder pseudisotropen Kongruenz.*

Beschränkt man sich auf das reelle Gebiet, und faßt man dann die Begriffe allgemein genug, so kann man hierfür auch kürzer sagen:

Im elliptischen Raume ist jede isotrope und jede pseudisotrope Kongruenz analytisch.

Die — unschwer zu bestimmende — unendliche Gruppe analytischer Pfeiltransformationen, die die *reellen* (analytischen) Translationskongruenzen unter einander vertauscht, ist natürlich *nicht* isomorph zu der Gruppe, die die reellen isotropen Pfeilkongruenzen unter einander vertauscht.

X.

Die hyperbolische Geometrie mit dem reellen Pfeil als Raumelement.

Statt der Voraussetzung des Artikels IX machen wir jetzt eine andere:

Wir nehmen nunmehr an, daß die absolute Fläche reell ist, reelle Scharen von Erzeugenden aber nicht hat.

Die Erzeugenden der einen Schar haben jetzt die konjugiert-imaginären Erzeugenden in der anderen; und je zwei zusammengehörige schneiden sich in einem reellen Punkt und liegen in einer reellen Ebene der absoluten Fläche, die wir als eine *Kugel vom Radius Eins* des Euklidischen Raumes auffassen dürfen. Wie im vorhergehenden Falle gibt es auch jetzt ein Kontinuum von ∞^4 reellen nicht-orientierten Elementarvierseiten; und hier wie dort existieren keine (nach der allgemeinen Definition reeller Gebilde) *reellen* orientierten Elementarvierseite. Man kann ferner auch jetzt diese Definition sachgemäß erweitern — aber, abweichend von dem vorher betrachteten Falle, gibt es jetzt *zwei* verschiedene natürliche Begriffserweiterungen dieser Art.

Wir kommen hierauf am Schlusse des Paragraphen zurück; vorläufig wählen wir eine unter diesen beiden Möglichkeiten aus. Wir erklären:

Ein orientiertes Elementarvierseit des hyperbolischen Raumes heiße dann und nur dann reell, wenn seine Erzeugenden Ξ''_α *und* H''_α *und ebenso* Ξ''_ω *und* H''_ω *konjugiert-imaginär sind.*

Damit ist dann zugleich auch schon ein *Begriff des reellen Pfeiles* festgesetzt. Ein solcher hat immer einen reellen Anfangspunkt x''_α und einen reellen Endpunkt x''_ω; fallen beide zusammen, so ist der Pfeil

ein reeller *Punktpfeil.* Ist der Pfeil nicht Punktpfeil, so hat er eine imaginäre Anfangsebene v''_α und eine zu dieser konjugiert-imaginäre Endebene v''_ω, im Falle des Punktpfeiles aber vereinigen sich diese zu einer reellen Tangentialebene der absoluten Fläche (einer Minimalebene). Schließt man die Punktpfeile aus, so hat der Pfeil einen bestimmten reellen geradlinigen Träger, nämlich die Verbindungslinie der Punkte x''_α, x''_ω. Die reellen Ebenen dieser Geraden bilden eine orientierte ausgezeichnete Kette (S. 485). Der reelle Zug der als Ort von Punkten aufgefaßten Geraden aber wird durch die Punkte x''_α, x''_ω in zwei reelle orientierte Halbketten zerlegt (S. 484). Die erste Halbkette dringt in das Innere der absoluten Fläche ein, und ist in gewissem Sinne entgegengesetzt-orientiert zur zweiten, die, abgesehen von den Grenzpunkten x''_α, x''_ω, ganz außerhalb liegt. Die Zuordnung zwischen der Orientierung der ersten Halbkette und der Orientierung der ausgezeichneten Kette aber ist für *einen* reellen Pfeil willkürlich wählbar, und ist übrigens von uns bereits bestimmt gewählt (S. 485). Offenbar genügt zur Bestimmung des reellen Pfeils schon der Teil der beschriebenen Figur, der in das Innere der absoluten Fläche eindringt, ja schon das Paar x''_α, x''_ω von reellen Punkten der absoluten Fläche. Wir können also hier auf die Betrachtung der außerhalb dieser Fläche liegenden reellen Figuren ganz verzichten: Wir haben damit den Standpunkt der Lobatschewskyschen oder *hyperbolischen Geometrie* erreicht, den wir bereits in Art. III eingenommen hatten.[1]) Ein reeller Pfeil, der nicht Punktpfeil ist, wird jetzt repräsentiert durch eine *orientierte reelle Gerade,* d. h., durch den im Inneren der absoluten Fläche gelegenen reellen Zug dieser Geraden, der mit einer sogenannten *positiven Richtung* und einem bestimmten *positiven Drehungssinn* ausgestattet ist. Der Begriff unterscheidet sich nicht von dem des *reellen Speers,* der aus dem Begriff einer in das Innere der absoluten Fläche eindringenden Geraden dadurch entsteht, daß man die Schnittpunkte x''_α, x''_ω aufsucht und in eine bestimmte Reihenfolge bringt. Ein *reeller Punktpfeil* jedoch ist nichts anderes als ein reeller Punkt der absoluten Fläche, und wohl zu unterscheiden von dem *reellen Minimalspeer,* der eine reelle Tangente

1) Vielleicht ist es nützlich, daran zu erinnern, daß in der reellen *pseudosphärischen Geometrie* die von uns weggelassenen Figuren überhaupt nicht existieren. Ersetzt man die Gerade $x_\alpha x_\omega$ durch einen Kreis, der auf der — als Euklidische Kugel gedeuteten — absoluten Fläche in x_α und x_ω senkrecht steht, so ergänzt man damit das Kontinuum der im Inneren gelegenen Punkte, statt zum Punktkontinuum der projektiven Geometrie, zu einem sphärischen Kontinuum, das ganz andere Eigenschaften hat. An den von uns anzustellenden Betrachtungen wird jedoch hierdurch nichts Wesentliches geändert.

der absoluten Fläche ist. Das Kontinuum aller dieser reellen Speere ist ebenso abgeschlossen wie das Kontinuum aller reellen Pfeile, aber beide sind offenbar nur „im allgemeinen“ eindeutig auf einander abgebildet.

Einen Pfeil, der nicht nach der oben aufgestellten Definition reell ist, nennen wir natürlich *imaginär*, unbekümmert darum, ob wir nicht auch ihm, auf andere Weise, reelle Figuren zuordnen können. Die imaginären Pfeile sind dann paarweise konjugiert, d. h. Anfangspunkt und Endpunkt des einen Pfeils eines reellen Paares imaginärer Pfeile sind konjugiert-komplex zu Anfangs- und Endpunkt des anderen. Fällt ein Pfeil mit dem konjugiert-komplexen zusammen (vgl. S. 485), so ist er *reell*, nach obiger Definition. *Reell* heißt ferner überhaupt jede Figur von Pfeilen, die mit der konjugiert-komplexen Figur zusammenfällt.

Die Ausführungen des Art. VIII liefern nun, auf unseren Fall angewendet, offenbar den Satz:

XI. *Die Pfeile $\overrightarrow{x''_\alpha x''_\omega}$ irgend einer reellen ausgezeichneten Kongruenz im hyperbolischen Raume sind durch folgende Gegenüberstellung charakterisiert:*

(I.) *Reelle Translationskongruenz nicht paralleler Pfeile.*	*Reelle eigentlich-konforme Transformation $x''_\alpha \to x''_\omega$.*[1]
(II.) *Reelle pseudisotrope (analytische) Kongruenz.*	*Paar reeller (analytischer) Kurven als Ort der Punkte x''_α, x''_ω.*[2]
(III.) *Reelle isotrope Kongruenz nicht paralleler Pfeile.*	*Reelle uneigentlich-konforme Transformation $x''_\alpha \to x''_\omega$.*
(III, I.) *Reelle Kongruenz α-paralleler [ω-paralleler] Pfeile.*	*Reeller Punkt x''_α [x''_ω] verbunden mit allen komplexen Punkten x''_ω [x''_α] der absoluten Fläche.*

Vergleichen wir nun diese Zusammenstellung, und deren Ausdehnung auf das komplexe Gebiet, mit der in Satz X enthaltenen, so sehen wir sofort, daß auch folgender Satz richtig ist:

---

1) Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie (Leipzig, 1899), S. 640. Study, Greifsw. Festschrift 1900 (Jahresber. 1902, S. 329.)

Die Formulierung des Herrn Bianchi ist übrigens etwas unvorsichtig abgefaßt. Die Lobatschewskyschen Grenzkugeln haben die (nach Bianchis Terminologie absolute) Krümmung Null, ihre Normalenkongruenzen aber sind Parallelenbündel, und vermitteln daher nicht konforme Abbildungen.

Der Verfasser hat diesen Satz richtig angegeben, ist aber an anderer Stelle in einen ganz ähnlichen Fehler verfallen. Der a. a. O. S. 330 oben formulierte Satz gilt nicht „ausnahmslos“, sondern nur für *krumme* analytische Streifen, solche, die keinem geraden Verein angehören.

2) Man unterscheide wohl diesen Begriff von dem *weiteren* Begriff „Reelles Paar analytischer Kurven“, der auch Paare konjugiert-imaginärer Kurven umfaßt.

XII. *Das Kontinuum der reellen (und komplexen) Pfeile des elliptischen Raumes läßt sich auf das Kontinuum der reellen (und komplexen) Pfeile des hyperbolischen Raumes birational, sowie überall eindeutig-umkehrbar und stetig abbilden, einfach dadurch, daß man die beiden Bildkugeln, die zu dem elliptischen Raume gehören, auf die absolute Fläche des hyperbolischen Raumes legt, und dann das linke und rechte Bild des ersten Pfeiles mit dem Anfangs- und Endpunkt des zweiten identifiziert.*

Dadurch werden, unter anderem, in einander übergeführt:

Elliptischer Raum.	*Hyperbolischer Raum.*
(I.) *Die reellen (komplexen) Translationskongruenzen.*	(II.) *Die reellen (komplexen) pseudisotropen Kongruenzen.*
(II.) *Die reellen (komplexen) pseudisotropen Kongruenzen.*	(III.) *Die reellen (komplexen) isotropen Kongruenzen.*
(III.) *Die reellen (komplexen) isotropen Kongruenzen.*	(I.) *Die reellen (komplexen) Translationskongruenzen.*

Ferner entsprechen einander:

(II, III.) *Die Begriffe der reellen (komplexen) linkseitigen und rechtseitigen Syntaxie.*	(III, I.) *Die Begriffe des reellen (komplexen) α-Parallelismus und ω-Parallelismus.*
(III, I.) Die Begriffe des (stets imaginären) α- und ω-Parallelismus.	(I, II.) Die Begriffe des[1]) *stets imaginären α-* und ω-Pseudoparallelismus.
(I, II.) Die Begriffe des (stets imaginären) α- und ω-Pseudoparallelismus.	(II, III.) Die Begriffe der (stets imaginären) link- und rechtseitigen Syntaxie.

So entsprechen einander zum Beispiel die Sätze:

E. R.	*H. R.*
(I.) Durch jeden reellen Regulus, *der nicht von syntaktischen Pfeilen gebildet wird*, geht eine einzige reelle Translationskongruenz.	(II.) Durch jeden reellen Regulus, *der nicht von parallelen Pfeilen gebildet wird*, geht eine einzige reelle pseudisotrope Kongruenz.
(II, III.) Durch *jeden* reellen Regulus geht eine einzige reelle pseudisotrope und eine einzige reelle isotrope Kongruenz.	(III, I.) Durch *jeden* reellen Regulus geht eine einzige reelle isotrope und eine einzige reelle Translationskongruenz.

1) (auf Grund obiger Definition der Begriffe Reeller Pfeil, Imaginärer Pfeil.)

Man beachte dabei, daß ein reeller Regulus keine reellen Pfeile zu enthalten braucht (S. 482, 511).

Auch hier kommt die Gesetzmäßigkeit der Zuordnung am einfachsten zum Ausdruck in der Art, wie sich die reellen und imaginären orientierten Elementarvierseite des elliptischen und des hyperbolischen Raumes entsprechen, nämlich in der Zusammenstellung

$$\Xi''_\alpha \sim \Xi_\alpha, \quad \Xi''_\omega \sim H_\omega, \quad H''_\alpha \sim \Xi_\omega, \quad H''_\omega \sim H_\alpha.$$

Man sieht, daß die Zuordnung der reellen und komplexen Figuren des elliptischen Raumes zu solchen des hyperbolischen vollkommen ist. *Der Satz* XII *wird von keinerlei Ausnahme durchlöchert.* Dem entsprechend sind an diesen Satz ähnliche Bemerkungen zu knüpfen, wie an den Satz X; z. B. folgt, daß im hyperbolischen Raum die reellen *isotropen* und die *Translationskongruenzen* je einen einzigen reellen Zug haben, und daß jede „einmal differentiierbare“ Kongruenz von ∞^2 reellen Pfeilen, die die für die Kongruenzen der Familien III und I charakteristischen Eigenschaften hat, zu diesen Familien analytischer Kongruenzen gehört (vgl. S. 509). Von der absoluten Kongruenz abgesehen, sind alle reellen Translationskongruenzen, d. h. alle durch konjugiert-imaginäre Schiebungen beider Arten erzeugbaren Kongruenzen (S. 496) Normalenkongruenzen reeller orientierter Flächen der Krümmung Null.

Ein besonderes Interesse haben in der hyperbolischen Geometrie die reellen Doppelkongruenzen.[1])

Die absolute Korrelation ist hier eine *imaginäre* Transformation, sie ordnet einem reellen Pfeil nicht wieder einen solchen zu, es sei denn, daß der Pfeil ein Punktpfeil ist. Das hindert aber nicht, daß sie einer reellen Kongruenz wieder eine solche zuordnen kann. Es gilt nun der Satz:

Im hyperbolischen Raume haben unter den reellen Kongruenzen, außer der absoluten Kongruenz, alle Doppelkongruenzen, aber auch nur diese, die Eigenschaft, in der absoluten Korrelation wiederum reellen Kongruenzen zugeordnet zu sein.

(I). Unter den reellen Translationskongruenzen sind Doppelkongruenzen alle die und nur die, die zu symmetrischen eigentlich-konformen Abbildungen gehören. Jede von ihnen fällt mit der zu ihr absolut-korrelativen Kongruenz zusammen.

(II). Unter den reellen pseudisotropen Kongruenzen sind Doppelkongruenzen alle die und nur die, die zu Paaren mit einander identischer reeller Kurven gehören.

1) Doppelkongruenz heißt jede von der absoluten verschiedene Kongruenz, die bei Umkehrung aller ihrer Pfeile sich nicht ändert. Vgl. S. 502.

(III). Unter den reellen isotropen Kongruenzen sind Doppelkongruenzen alle die und nur die, die zu symmetrischen uneigentlich-konformen Abbildungen gehören.

Die beiden letzten Unterfamilien ausgezeichneter Kongruenzen werden natürlich durch die absolute Korrelation mit einander gepaart. Hat die reelle Kurve, die zu einer pseudisotropen Doppelkongruenz gehört, einen oder mehrere reelle Züge, so bestimmt deren jeder eine Schwarzsche konforme Spiegelung, und diese oder vielmehr ihre analytische Fortsetzung, *die unabhängig ist von der Auswahl des reellen Zugs,* liefert unmittelbar die absolut-korrelative isotrope Doppelkongruenz.

Dem Begriff der reellen Bilder eines imaginären Pfeils im elliptischen Raume stellt unser Übertragungsprinzip natürlich eine vollkommen analoge Begriffsbildung gegenüber:

Reelle Bilder eines komplexen Pfeils im hyperbolischen Raume heißen die beiden wohlgeordneten reellen Pfeile, deren erster zu dem gegebenen links-syntaktisch, und deren zweiter zu ihm rechts-syntaktisch ist.

In Zeichen:

$$(\Xi''_\alpha,\ \Xi''_\omega,\ H''_\alpha,\ H''_\omega) \sim$$

$$(\Xi''_\alpha,\ \Xi''_\omega,\ \Xi''_\alpha,\ \overline{\Xi}''_\omega) \rightarrow (\overline{H}''_\alpha,\ \overline{H}''_\omega,\ H''_\alpha,\ H''_\omega).$$

Es ergeben sich daraus charakteristische Eigenschaften der reellen isotropen und Translationskongruenzen: *Die komplexen Pfeile irgend einer reellen Translationskongruenz haben zu reellen Bildern die Paare reeller Pfeile eben dieser Kongruenz.* Die komplexen Punktpfeile z. B. werden repräsentiert durch die Paare reeller Punkte der absoluten Fläche, der absoluten Pfeilkongruenz. Die Bilder der komplexen Pfeile einer reellen *isotropen Kongruenz* werden dagegen in der Weise gefunden, daß man dieser zwei reelle Pfeile entnimmt und deren Endpunkte vertauscht. (S. 508, Anmerkung). Das so erhaltene neue Paar reeller Pfeile ist das Bild eines beliebigen komplexen Pfeils der Kongruenz.

In den reellen Zügen der reellen isotropen Kongruenzen hat man endlich auch hier wieder reelle Bilder für sämtliche auf der absoluten Fläche verlaufenden analytischen Kurven.

Bild eines komplexen Punktpfeils sind nämlich, nach Obigem (nicht, wie im elliptischen Raume, entgegengesetzte reelle Pfeile, sondern) zwei wohlgeordnete reelle Punktpfeile. Die Punkte dieser Pfeile sind Anfangs- und Endpunkt eines neuen Pfeils, dessen Anfangsebene die absolute Fläche im Punkte des komplexen Punktpfeils berührt. *Diesen einzelnen reellen Pfeil kann man also dem Punkte der*

absoluten Fläche, oder der zugehörigen Minimalebene, als reelles Bild zuordnen. Durchläuft dann der komplexe Punkt eine analytische Kurve, so bewegt sich der zugeordnete den Punkt repräsentierende reelle Pfeil in einer isotropen Kongruenz. Aber — abweichend von der elliptischen Geometrie — lassen sich *nur* die isotropen, nicht auch die pseudisotropen Kongruenzen in dieser oder ähnlicher Weise verwenden zur Darstellung analytischer Kurven auf der absoluten Fläche.

Allen diesen Überlegungen liegen die oben festgesetzten Definitionen der Begriffe „Reelles Elementarvierseit", „reeller Pfeil im hyperbolischen Raume" zu grunde. Man kann aber, wie bemerkt, an Stelle dieser Definitionen auch andere (zu ihnen absolut-korrelative) setzen. Ein orientiertes Elementarvierseit würde dann „reell" zu nennen sein, wenn seine Erzeugenden Ξ_α''' und H_ω''', sowie Ξ_ω''' und H_α''' konjugiert-imaginär sind. Es ergibt sich hieraus, daß die nach der zweiten Erklärung als „reell" zu bezeichnenden Pfeile (soweit sie nicht Punktpfeile sind) auf reellen Geraden liegen, deren reelle Züge mit der absoluten Fläche keinen Punkt gemein haben. Offenbar besteht zwischen den reellen Pfeilen erster und denen zweiter Definition eine gegenseitig-eindeutige und dabei sehr einfache Zuordnung. Fügt man nämlich zu einem reellen Pfeil erster Art den entgegengesetzten Pfeil, so hat man das reelle Bild eines imaginären Pfeils, der „reell" ist nach der zweiten Definition. Die Resultate, zu denen wir von der zweiten Definition aus gelangen würden, sind demnach von den geschilderten nicht wesentlich verschieden, sie sind nur andere Ausdrucksformen der gleichen Gedanken. Es darf uns genügen, eine (und zwar die interessantere) der beiden möglichen Annahmen erörtert zu haben.

XI.

Die ausgezeichneten Membranen und ihre reellen Bilder.

Durch das Übertragungsprinzip des Satzes XII wird jedem Pfeil des elliptischen Raumes ein bestimmter Pfeil des hyperbolischen Raumes zugeordnet, und insbesondere jedem reellen Pfeil des ersten Raumes ein reeller Pfeil im zweiten. Die Anfangsebenen und Endebenen beider reellen Pfeile berühren aber die zugehörigen absoluten Flächen in bestimmten Punkten; es sind also damit im ganzen vier (für die Punkte der absoluten Flächen erklärte) Punkttransformationen gegeben, deren jede alle übrigen vollkommen bestimmt. Wie man sofort erkennt, ordnen diese Transformationen jedesmal eine Schar von Erzeugenden Ξ oder H der ersten absoluten Fläche einer Schar von Erzeugenden Ξ'' oder H'' der zweiten *projektiv* zu, während die

beiden anderen Scharen, nach Segres Ausdruck, *antiprojektiv* auf einander bezogen sind, nach folgendem Schema:

$$\begin{aligned} y_\alpha &\longrightarrow y_\alpha'': \quad (\Xi, \overline{H}) \longrightarrow (\Xi'', H''), \\ y_\omega &\longrightarrow y_\omega'': \quad (\overline{H}, \Xi) \longrightarrow (\Xi'', H''), \\ y_\alpha &\longrightarrow y_\omega'': \quad (H, \overline{\Xi}) \longrightarrow (\Xi'', H''), \\ y_\omega &\longrightarrow y_\alpha'': \quad (\overline{\Xi}, H) \longrightarrow (\Xi'', H''). \end{aligned}$$

Keine dieser Zuordnungen ist also analytisch. Ersetzt man aber jedesmal die mit einem Strich bezeichnete Erzeugende der absoluten Fläche im elliptischen Raume durch die konjugiert-komplexe Erzeugende (die dasselbe Zeichen hat, ohne Strich), so hat man vor sich eine analytische, nämlich projektive Zuordnung einfachster Art. Wir sehen uns so zur Betrachtung von Punkttransformationen veranlaßt, die dadurch charakterisiert sind, daß die Erzeugenden der einen Schar der absoluten Fläche projektiv (oder überhaupt analytisch) transformiert werden, die der anderen Schar aber antiprojektiv (oder anti-analytisch). Diese halb-projektiven, halb-antiprojektiven Punkttransformationen erzeugen zusammengesetzt offenbar eine aus vier kontinuierlichen Scharen bestehende Gruppe, und, wenn man noch eine Umlegung hinzufügt, eine Gruppe mit acht Scharen von Transformationen, deren kontinuierliche Untergruppe aus den komplexen Bewegungen besteht.

Durch jede der beiden beschriebenen Scharen von je $\infty^6 \cdot \infty^6$ Transformationen wird also die Gruppe der komplexen Bewegungen isomorph auf sie selbst bezogen.[1])

Um andere Resultate, die in unserem Zusammenhang Interesse zu bieten scheinen, einfach ausdrücken zu können, führen wir noch einige weitere Begriffe ein.

Fassen wir die ∞^4 komplexen Punkte der absoluten Fläche als eine sogenannte reelle Mannigfaltigkeit auf, so können wir in dieser gelegene reelle Züge *analytischer* „Flächen" betrachten. Solche spezielle Figuren von ∞^2 komplexen Punkten nennen wir jedoch, da das Wort Fläche für uns schon eine andere Bedeutung hat, lieber *Membranen* (*tele*, nach Segre). Eine Membran ist in der Regel nicht analytisch im *gewöhnlichen* Sinne des Wortes, d. h. sie ist nicht darstellbar durch eine analytische Abhängigkeit zwischen den *komplexen* Parametern ξ, η der beiden Scharen von Erzeugenden. Hat aber die Membran diese Eigenschaft, dann ist sie eine auf der absoluten Fläche gelegene *ana-*

1) Die ganze Gruppe von $8 \cdot \infty^{12}$ Transformationen liefert *alle* holoëdrischen Isomorphismen der Bewegungsgruppe.

lytische Kurve. Eine anti-analytische Abhängigkeit der Art definiert nun, wie wir sagen wollen, eine *ausgezeichnete Membran.* Da in dem Fall, wo in die genannten Abhängigkeiten nur eine der Erzeugenden Ξ, H wirklich eingeht, der Unterschied zwischen analytischen und anti-analytischen Abhängigkeiten verschwindet, so gibt es $2 \cdot \infty^2$ Membranen, die *gleichzeitig Kurven und ausgezeichnet* sind, nämlich die sämtlichen Erzeugenden der absoluten Fläche. Wir sehen nunmehr:

Die beschriebenen $2 \cdot \infty^{12}$ Punkttransformationen vertauschen die auf der absoluten Fläche gelegenen analytischen Kurven mit den ausgezeichneten Membranen.

Die (eigentlichen und uneigentlichen komplexen) konformen Abbildungen aber haben die (für sie als analytische Transformationen charakteristische) Eigenschaft, sowohl die analytischen Kurven auf der absoluten Fläche als auch die ausgezeichneten Membranen nur unter einander zu vertauschen.

Die ausgezeichneten Membranen nehmen also eine Stellung ein, die in gewisser Hinsicht gleichberechtigt ist der systematischen Stellung der analytischen Kurven auf der absoluten Fläche.

Dem entsprechend gibt es eine Reihe von Sätzen, ähnlich solchen, die wir schon entwickelt haben, Sätzen, in denen statt des Kurvenbegriffs der Begriff der ausgezeichneten Membran erscheint. Wir führen dafür ein Beispiel an.

Vermöge der durch den Satz XII vermittelten Zuordnung reeller Pfeile, und der Zugehörigkeit eben dieser Pfeile zu den Berührungspunkten ihrer Anfangsebenen gehören die folgenden vier Sätze zusammen:

(III). Der reelle Zug irgend einer reellen *isotropen* Kongruenz im elliptischen Raume ist das reelle Bild irgend einer analytischen *Kurve* auf der absoluten Fläche.

(I). *Der reelle Zug irgend einer reellen Translationskongruenz im hyperbolischen Raume ist das reelle Bild irgend einer ausgezeichneten Membran auf der absoluten Fläche.*

(II). *Der reelle Zug irgend einer reellen pseudisotropen Kongruenz im elliptischen Raume ist das reelle Bild irgend einer ausgezeichneten Membran auf der absoluten Fläche.*

(III). Der reelle Zug irgend einer reellen *isotropen* Kongruenz im hyperbolischen Raume ist das reelle Bild irgend einer analytischen *Kurve* auf der absoluten Fläche.

Zu den ausgezeichneten Membranen, von denen im ersten Satze rechts die Rede ist, gehört der reelle Zug der absoluten Fläche selbst.

In diesem bemerkenswerten Falle ist die ausgezeichnete Membran mit der zugehörigen Translationskongruenz identisch.

Von anderen Eigenschaften der ausgezeichneten Membranen wollen wir nur noch eine anführen, weil sie auf deren Sonderstellung Licht wirft.

Nach der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen[1]) bestimmt jede beliebige *nicht-analytische* Membran in einem gewissen Bereiche eine (in der Regel mehrdeutige, aber) wechselseitige anti-analytische Zuordnung der Punkte der absoluten Fläche, die „reguläre Spiegelung an der Membran". Andererseits hat das Punktkontinuum der absoluten Fläche eine, wie man wohl sagen darf, *natürliche Streifung*, entsprechend der Imprimitivität der Bewegungsgruppe: Es wird von zwei Scharen gerader Linien durchzogen. Hierdurch ist aber für jede *nicht gerade* Membran eine zweite Spiegelung, die „singuläre Spiegelung an der Membran" bestimmt. Zusammengehörige Punktepaare werden hier gefunden, wenn man irgend zwei Punkte der Membran als gegenüberliegende Ecken eines Elementarvierseits auffaßt, und dann die beiden anderen Ecken einander zuweist. Dürfen wir nun die hiermit eingeführte etwas unbefriedigende Terminologie vorübergehend gebrauchen, so läßt sich eine weitere wichtige Eigenschaft der ausgezeichneten Membranen kurz so ausdrücken:

Die nicht-geraden ausgezeichneten Membranen sind dadurch charakterisiert, daß die zugehörige reguläre Spiegelung mit der singulären zusammenfällt.

Zu jeder solchen Membran gehört also nur eine Spiegelung. Man wird sich ohne Schwierigkeit das reelle Bild dieser Transformation konstruieren, und man wird sich deutlich machen, daß die so entstehende symmetrische Transformation reeller Pfeile zu denen gehört, die (in ihrem Existenzbereich) jede Familie ausgezeichneter Kongruenzen in Ruhe lassen. —

Kehren wir jetzt zurück zu den vorhin beschriebenen $2 \cdot \infty^{12}$ Punkttransformationen, und versuchen wir, unter ihnen Exemplare von besonders einfacher Beschaffenheit aufzufinden. Im elliptischen Raume zunächst bieten sich dann, wenn man eine Schar von Erzeugenden ganz in Ruhe läßt, als offenbar einfachste Transformationen der Art dar die Vertauschung einer jeden rechten oder linken Erzeugenden der absoluten Fläche mit der konjugiert-komplexen Erzeugenden. Das reelle Bild dieser Transformationen ist im ersten Falle

1) Sugli enti analitici, teoremi XVI, XVII. — Ist die Membran der reelle Zug der absoluten Fläche im hyperbolischen Raume, so ist die zugehörige Spiegelung identisch mit der Paarung konjugiert-komplexer Punkte.

die absolute Korrelation, im zweiten die absolute Korrelation verbunden mit der Umkehrung aller reellen Pfeile. Suchen wir nun die nach dem Satze XII diesen Transformationen zugeordneten Transformationen reeller Pfeile im hyperbolischen Raume, so erhalten wir zwei Transformationen, bei deren erster jeder reelle Pfeil durch einen Pfeil mit gleichem Anfangspunkt und (im Sinne der Euklidischen Geometrie) diametral gegenüberliegendem Endpunkt ersetzt wird, während bei der zweiten der Endpunkt unverändert bleibt, und der Anfangspunkt diametral gespiegelt wird. In den Parametern der beiden Scharen von Erzeugenden aber lassen sich diese beiden involutorischen Transformationen nach wie vor sehr einfach ausdrücken, mit Hilfe der Zuordnung durch das (S. 503) besprochene Hermitesche Polarsystem: Sie werden dargestellt durch Formelpaare des Typus

$$\xi' = \xi, \quad \eta' = \eta^*;$$
$$\xi'' = \xi^*, \quad \eta'' = \eta.$$

Wir bemerken nun, daß jede dieser Transformationen, und dann natürlich auch jede Transformation, die aus ihnen durch Zusammensetzung mit einer reellen Bewegung oder Umlegung hervorgeht, die Eigenschaft hat, den Schnitt $\xi = \eta$ der absoluten Fläche mit der uneigentlichen Ebene des Euklidischen Raumes in die spezielle Membran überzuführen, die aus allen reellen Punkten der absoluten Fläche besteht. Wir heben hervor:

Unter den beschriebenen $2 \cdot \infty^{12}$ halb-analytischen Punkttransformationen auf der absoluten Fläche gibt es in der hyperbolischen Geometrie zwei von besonders einfachen Eigenschaften.

Beide sind involutorisch, und beide vertauschen den Schnitt der absoluten Fläche mit der uneigentlichen Ebene der Euklidischen Geometrie mit dem reellen Zug der absoluten Fläche. Die erste [zweite] Transformation ist dann völlig dadurch bestimmt, daß zugeordnete Punkte auf derselben linkseitigen [rechtseitigen] Erzeugenden der absoluten Fläche liegen.[1])

Betrachten wir etwa die erste Transformation, die dem komplexen Punkt (ξ, η) oder (Ξ, H) der absoluten Fläche den Punkt (ξ, η^*) oder

1) An Stelle der uneigentlichen Ebene kann hier irgend eine Ebene treten, die die absolute Fläche nicht berührt. Entsprechend läßt sich der folgende Satz XIII noch etwas erweitern. An Stelle der sphärischen Geometrie kann auch die im komplexen Gebiet von ihr nicht wesentlich verschiedene pseudosphärische treten.

$(\Xi, \overline{H})$ zuordnet, und repräsentieren wir diesen Punkt (ξ, η^*) in der zuvor (S. 514) beschriebenen Art durch den reellen Pfeil

$$(\Xi_\alpha, \Xi_\omega; H_\alpha, H_\omega) = (\xi, \eta; \xi^*, \eta^*),$$

so gelangen wir zu dem folgenden, der hyperbolischen Geometrie eigentümlichen Lehrsatz:

XIII. *Zwischen den komplexen Punkten auf einer reellen Kugelfläche des Euklidischen Raumes und den reellen Pfeilen im hyperbolischen Raume lassen sich zwei Zuordnungen herstellen, deren jede durch folgende Eigenschaften vollkommen bestimmt ist:*

1. Die Kugel im Euklidischen Raume ist zugleich absolute Fläche im hyperbolischen Raume.

2. Jeder Punkt der Kugel liegt mit dem Anfangspunkt des repräsentierenden Pfeils auf derselben linkseitigen [rechtseitigen] Erzeugenden.

3. Der diametral gegenüberliegende Punkt liegt mit dem Endpunkt des repräsentierenden Pfeils auf derselben linkseitigen [rechtseitigen] Erzeugenden.

Demzufolge entsprechen einander unter anderen die folgenden Figuren:

Die eigentlichen (im Endlichen gelegenen) Punkte der Euklidischen Kugel.	*Die eigentlichen (im Endlichen gelegenen) reellen Pfeile des hyperbolischen Raumes.*
Die uneigentlichen Kugelpunkte.	*Die reellen uneigentlichen oder Punktpfeile.*
Die komplexen automorphen Bewegungen und Umlegungen der Kugel.	*Die reellen Bewegungen und Umlegungen im hyperbolischen Raume.*
Linkseitige Erzeugende der Kugel.	*Bündel α-[ω-]paralleler Pfeile.*
Rechtseitige Erzeugende der Kugel.	*Bündel ω-[α-]paralleler Pfeile.*
Analytische Kurve auf der Kugel.	*Reeller Zug einer reellen Translationskongruenz.*
Ausgezeichnete Membran auf der Kugel.	*Reeller Zug einer reellen isotropen Kongruenz.*

Die Abbildung, zu der wir hier gelangt sind, ist dieselbe, von der schon die Rede in unserem Satze IV war, dessen Inhalt wir in dem Satze XIII wiederholt haben. Sie hat bemerkenswerte metrische Eigenschaften, vermöge der bei Gelegenheit des Satzes IV schon besprochenen Zuordnung der Begriffe *Sphärischer Abstand* und *Dualer Winkel*. Wir gehen auf diesen (wiewohl besonderen wichtigen) Gegenstand hier nicht mehr ein; es mag uns genügen, durch eine ausgedehntere Verwendung imaginärer Figuren einen deutlicheren Einblick in das Wesen jenes Satzes IV erlangt zu haben.

Wir beschließen nun unsere Darlegung mit weiteren Erläuterungen und mit einigen Beispielen.

XII.

Ergänzungen und Beispiele.

1. Algebraische ausgezeichnete Kongruenzen.

Unter den ausgezeichneten Kongruenzen sind die einfachsten, nämlich die doppelt-singulären, algebraisch. Man kann aber offenbar einen allgemeinen Begriff der „algebraischen ausgezeichneten Kongruenz“ bilden, der dem Begriff der analytischen ausgezeichneten Kongruenz analog ist: Wir rechnen eine algebraische Pfeilkongruenz zur ersten, zweiten oder dritten Familie ausgezeichneter algebraischer Kongruenzen, wenn ihre irreduzibelen und daher analytischen Bestandteile sämtlich zu eben dieser Familie analytischer Kongruenzen gehören. Die algebraischen ausgezeichneten Kongruenzen einer jeden Familie lassen sich dann auf Gattungen verteilen, deren jede durch vier ganze Zahlen charakterisiert ist, nach folgendem Schema:

(I) $$\varphi(\overset{l'_\alpha}{\xi_\alpha}, \overset{l'_\omega}{\xi_\omega}) = 0, \quad \psi(\overset{r'_\alpha}{\eta_\alpha}, \overset{r'_\omega}{\eta_\omega}) = 0;$$

(II) $$\varphi(\overset{l''_\alpha}{\xi_\alpha}, \overset{r''_\alpha}{\eta_\alpha}) = 0, \quad \psi(\overset{l''_\omega}{\xi_\omega}, \overset{r''_\omega}{\eta_\omega}) = 0;$$

II) $$\varphi(\overset{l'''_\alpha}{\xi_\alpha}, \overset{r'''_\omega}{\eta_\omega}) = 0, \quad \psi(\overset{l'''_\omega}{\xi_\omega}, \overset{r'''_\alpha}{\eta_\alpha}) = 0.$$

Die Zeichen $l_\alpha \ldots r_\omega$ bedeuten in jedem Falle den Grad, in dem das entsprechende Paar von binären homogenen Veränderlichen in der homogenen Gleichung $\varphi = 0$ oder $\psi = 0$ auftritt. Offenbar enthält jede dieser Gattungen solche Kongruenzen, deren sämtliche irreducibele Bestandteile doppelt-singulär sind.

Entsprechend der einfachen Struktur der Gleichungen $\varphi = 0$, $\psi = 0$ ist es nun möglich, Begriffe der Multiplizität gemeinsamer Pfeile zweier solcher Kongruenzen festzusetzen. Denkt man sich dies ausgeführt, so ergibt sich ein Lehrsatz, analog dem Bézoutschen, der in allen Fällen die Gesamtzahl der gemeinsamen (komplexen) Pfeile liefert, es sei denn, daß deren unendlich viele vorhanden sind. Und diese Zahl kann nach den von H. Schubert angegebenen Regeln symbolisch bezeichnet werden: Man ordne z. B. im Falle I der betrachteten Kongruenz ein Symbol

$$\{l'_\alpha(\xi_\alpha) + l'_\omega(\xi_\omega)\}\,\{r'_\alpha(\eta_\alpha) + r'_\omega(\eta_\omega)\}$$

zu, und verfahre entsprechend in den anderen Fällen. Multipliziert man dann zwei solche Symbole nach den gewöhnlichen Rechnungsregeln, unterdrückt man alle Produkte, in denen eines der vier Zeichen $(\xi_\alpha) \dots (\eta_\omega)$ zweimal vorkommt, und ersetzt man schließlich das Produkt

$$(\xi_\alpha)(\xi_\omega)(\eta_\alpha)(\eta_\omega)$$

durch die Einheit, so hat man die gesuchte Anzahl. Die geometrische Bedeutung der Zahlen $l'_\alpha \dots r'''_\omega$ ergibt sich nach derselben Regel: Es sind die Anzahlen von Pfeilen, die die vorgelegten Kongruenzen mit je vieren von den sechserlei doppelt-singulären Kongruenzen gemein haben. Diese vier Zahlen vertreten also die beiden (hier nicht, oder wenigstens nicht überall und unmittelbar zu verwendenden) Begriffe Ordnung und Klasse einer Plückerschen Linienkongruenz.

Neben die angeführte Regel, die sich auf das komplexe Gebiet bezieht, stellt sich eine andere, die — mit gleicher Allgemeinheit — die Zahl der *reellen* gemeinsamen Pfeile von zwei algebraischen reellen *isotropen* Kongruenzen liefert; wobei natürlich, im Falle des elliptischen Raumes, Entsprechendes von den reellen pseudisotropen Kongruenzen, und im Falle des hyperbolischen von den Translationskongruenzen gilt.

Sind die reellen Pfeile zweier reeller isotroper Kongruenzen ohne gemeinsamen Bestandteil Bilder zweier algebraischer Scharen von Minimalebenen (oder der zugehörigen Kurven),

$$f(\overset{\mu,}{\xi}, \overset{\nu}{\eta}) = 0, \quad f'(\overset{\mu',}{\xi}, \overset{\nu'}{\eta}) = 0,$$

so haben diese Kongruenzen, zu Örtern komplexer Pfeile erweitert, nach Obigem $(\mu\nu' + \nu\mu')^2$ gemeinsame Pfeile, und *unter diesen sind immer* $\mu\nu' + \nu\mu'$ *reell.*

Unter den algebraischen Kongruenzen haben ein besonderes Interesse jene, deren vier charakteristische Zahlen sämtlich gleich der Einheit sind. Da sie also durch Paare bilinearer Gleichungen dargestellt werden, bezeichnen wir sie als „bilineare Kongruenzen". Wir betrachten, als ein Beispiel zu den vorausgehenden Überlegungen, kurz

2. *Die reellen Pfeile der irreduzibeln reellen bilinearen Kongruenzen.*[1]

I, E. R. ∞^6 Translationskongruenzen. Wenn eine solche ∞^2 reelle Pfeile enthält, so entstehen diese aus irgend einem unter ihnen dadurch, daß man diesen Pfeil der zweigliedrigen Gruppe aller reellen Schraubungen

1) Dieser Begriff ist nicht zu verwechseln mit dem etwas weiteren der reell-irreduziblen reellen bilinearen Kongruenzen, deren einige (im komplexen Gebiet) reduzibel sind.

um ein gewisses Achsenpaar unterwirft. Das sphärische Bild besteht aus zwei Kreisen mit je ∞^1 reellen Punkten.

II, H. R. ∞^6 Pseudisotrope Kongruenzen, im Falle von ∞^2 reellen Pfeilen bestimmt durch zwei wohlgeordnete ebene Schnitte der absoluten Fläche, mit je ∞^1 reellen Punkten. —

II, E. R. ∞^6 Pseudisotrope Kongruenzen, deren *jede* ∞^2 reelle Pfeile enthält. Jeder unebene reelle Rotationskegel mit ∞^1 reellen Erzeugenden bestimmt zusammen mit der absoluten Fläche ein spezielles Büschel sogenannter konzyklischer Flächen 2. Ordnung. Unterwirft man die reellen Erzeugenden aller dieser Flächen einem Orientierungsprozeß, so entstehen dadurch zwei einander entgegengesetzte Pfeilkongruenzen, und irgend eine von diesen ist die sogenannte allgemeine Kongruenz der betrachteten Art. Außerdem gehören hierher noch ∞^3 Doppelkongruenzen, deren jede ihre reellen Pfeile in einer reellen Ebene hat. Das sphärische Bild ist irgend eine reelle uneigentliche Möbiussche Kreisverwandtschaft zwischen beiden Bildkugeln.

III, H. R. ∞^6 Isotrope Kongruenzen, deren jede ∞^2 reelle Pfeile enthält. Jede vermittelt auf der absoluten Fläche eine reelle uneigentliche Möbiussche Kreisverwandtschaft, ist also, wie wir wohl kurz werden sagen dürfen, in einem gewissen Sinne *Sehnenkongruenz einer reellen Umlegung.*

Bezieht man den reellen Zug eines geeigneten ebenen Schnittes der absoluten Fläche projektiv auf ihn selbst, und zwar vermöge einer Projektivität, die von der Identität verschieden und nicht involutorisch ist, und außerdem einen sogenannten positiven Sinn des Zuges nicht ändert, so sind die zugehörigen Sehnen Tangenten an einen gewissen orientierten Kreis (der nicht immer einen zugänglichen Mittelpunkt haben wird, und im besonderen auch ein Grenzkreis sein kann, immer aber, von höchstens zwei Punkten abgesehen, ganz im Inneren der absoluten Fläche liegt). Dieser reelle Kreis bestimmt zusammen mit der absoluten Fläche eine spezielle Schar von konfokalen Flächen 2. Klasse. Setzt man die Orientierung des Kreises fort in die Kongruenz hinein, die von reellen Erzeugenden von Flächen der Schar gebildet wird, so entsteht die sogenannte allgemeine unter den hier zu betrachtenden Kongruenzen. Dazu kommen noch zwei Scharen von je ∞^3 Doppelkongruenzen, entsprechend den Spiegelungen an Punkten im Inneren und außerhalb der absoluten Fläche. —

III, E. R. ∞^6 Isotrope Kongruenzen mit je ∞^2 reellen Pfeilen. Jede gehört zu einer reellen eigentlichen Möbiusschen Kreisverwandtschaft zwischen den Bildkugeln. Diese Figuren sind absolut-korrelativ zu

den schon betrachteten pseudisotropen bilinearen Kongruenzen (II, E. R.), gehören also teils zu orientierten Kreisen und den durch diese bestimmten Scharen von konfokalen Flächen 2. Klasse, teils sind sie Doppelkongruenzen und entsprechen den ∞^3 reellen Punkten des elliptischen Raumes.

I, H. R. ∞^6 Translationskongruenzen mit je ∞^2 reellen Pfeilen. Jede vermittelt eine reelle eigentliche Möbiussche Kreisverwandtschaft der Punkte der absoluten Fläche. Jede, mit Einschluß der absoluten Kongruenz, ist also in gewissem Sinne *Sehnenkongruenz einer reellen Bewegung.*[1]) —

Durch drei reelle Pfeile des E. R., deren keine zwei syntaktisch sind, geht *eine* Kongruenz einer jeden Art I, II, III; und durch drei reelle Pfeile des H. R., deren keine zwei parallel sind, geht *eine* Kongruenz einer jeden Art II, III, I. —

Alle *reellen* analytischen Transformationen, die auch im Gebiete der *komplexen* Pfeile überall eindeutig und stetig sind, bilden eine Gruppe, die acht getrennte Scharen von Transformationen umfaßt, und deren kontinuierliche Untergruppe halb-einfach ist und $2 \cdot 6$ wesentliche Parameter im Ausdruck ihrer allgemeinen Transformation enthält. *Diese Gruppe von* $8 \cdot \infty^{12}$ *reellen Transformationen, mit dem reellen Pfeil als Raumelement, ist das Bild der zuvor* (S. 516) *betrachteten Gruppe von Transformationen auf der absoluten Fläche.* Sie ist eine Erweiterung der Gruppe der reellen Möbiusschen Kreisverwandtschaften, und sie hat ähnliche Eigenschaften wie diese. Z. B. kann jede Transformation der genannten invarianten Untergruppe (oder irgend einer der zugehörigen sieben Nebengruppen) völlig dadurch be-

---

1) Ein weiteres interessantes Beispiel zu der vorgetragenen Theorie liefern die konfokalen Flächen 2. Klasse mit einer Basiskurve 4. Klasse vom Geschlechte Eins. Einiges darüber findet man bei Coolidge a. a. O., und für den Grenzfall des Euklidischen Raumes, bei E. v. Weber, Bayer. Akadber. 1904, S. 447 u. ff. — Die geeignetste analytische Grundlage für solche Untersuchungen scheint mir in folgendem Satze zu liegen: Die Ebenenkoordinaten lassen sich so wählen, daß die Koordinaten der Ebenen der Kurve 4. Klasse vom Geschlechte Eins direkt proportional werden den vier Θ-Funktionen (und die Koordinaten der zugehörigen Kurvenpunkte *gleichzeitig* den dritten Potenzen eben dieser Funktionen). Vgl. Am. Journal, 1904, S. 156 u. f. Das dort entwickelte *vollständige* System von Additionstheoremen enthält ein sehr einfaches Mittel für Untersuchungeu dieser Art, was wir besonders mit Rücksicht auf den Umstand bemerken, daß diese Arbeit und die damit zusammenhängende algebraische Theorie (Am. Journal, 1904, S. 193 u. f.) nur wenig bekannt geworden zu sein scheinen, und daß die damit gegebenen Hilfsmittel (abgesehen von des Verfassers Trigonometrie) noch niemals recht ausgenutzt worden sind.

stimmt werden, daß man drei reellen Pfeilen drei andere zuordnet. Beide Figuren von je drei Pfeilen sind dabei nahezu willkürlich; nur dürfen im Falle der elliptischen Geometrie in keiner dieser beiden Figuren zwei syntaktische, und im Falle der hyperbolischen Geometrie in keiner zwei parallele Pfeile vorkommen. Die invariante Untergruppe läßt jede einzelne der drei Arten von reellen bilinearen Kongruenzen einzeln in Ruhe; die ganze Gruppe läßt die bilinearen Kongruenzen der ersten Art im elliptischen und die der zweiten Art im hyperbolischen Raume in Ruhe. —

Offenbar kann man die Vorstellung einer (algebraischen und transzendenten) *abstrakten Pfeilgeometrie* entwickeln. Objekte dieser Geometrie sind die reellen (und komplexen) Punkte (Stellen) einer vierfach (achtfach) ausgedehnten reellen algebraischen Mannigfaltigkeit, die vollkommen eindeutig und stetig unserem Pfeilkontinuum im reellen (komplexen) Gebiet zugeordnet ist; zugehörige Äquivalenzbegriffe werden erklärt durch eben die von uns betrachteten Gruppen. Man kann z. B. im projektiven Kontinuum achter Stufe sehr leicht eine reelle Punktmannigfaltigkeit von der Ordnung 24 angeben[1]), derart, daß die zuletzt betrachtete Gruppe als Gruppe aller reellen automorphen Kollineationen dieser Mannigfaltigkeit erscheint, während für die früher erörterte umfassendere Gruppe (von $24 \cdot \infty^{24}$ eindeutigen Transformationen) ein Gleiches im komplexen Gebiete gilt. Die elliptische und hyperbolische Geometrie gehören dann zu gewissen reellen Untergruppen der zuerst genannten reellen Gruppe. Die elliptische und hyperbolische Geometrie verhalten sich also zur (algebraischen) abstrakten Pfeilgeometrie ganz ähnlich, wie zur projektiven Geometrie.

3. Die reellen Bewegungen und Umlegungen im hyperbolischen Raume.

Was wir über die algebraischen Kurven auf der absoluten Fläche gesagt haben, läßt sich sinngemäß auf die entsprechenden (quasialgebraischen) Membranen übertragen. Wir wollen nicht zum Schrecken des Lesers auch diesen Gedanken noch ausführen, sondern wir wollen uns auf einige spezielle Bemerkungen beschränken, die man wohl nicht ohne Interesse finden wird. Es ist nämlich soeben eine besonders einfache Beziehung der reellen Bewegungen und Umlegungen im *hyperbolischen* Raume zu den reellen bilinearen Translationskongruenzen

1) S. des Verfassers Abhandlung „Schraubenflächen als Extreme“, die demnächst im American Journal of Mathematics erscheinen wird.

und isotropen Kongruenzen hervorgetreten. Diese Figuren hängen aber in der in Art. XI beschriebenen Weise zusammen mit ausgezeichneten Membranen — die wir ebenfalls „bilinear“ werden nennen dürfen — und Kurven, nämlich irreduzibelen ebenen Schnitten der absoluten Fläche.

Es gilt nun der folgende Satz:

Faßt man im hyperbolischen Raume jeden reellen Pfeil zusammen mit dem ihm durch eine reelle Bewegung zugeordneten Pfeil als reelles Bild eines komplexen Pfeils auf, so haben die so erklärten ∞^4 komplexen Pfeile ihre Anfangs- und Endpunkte in irgend zwei Punkten einer bestimmten irreduzibelen bilinearen Membran. Die reellen Bilder der einzelnen Punkte dieser Membran bilden die Sehnenkongruenz der Bewegung.

Umgekehrt bestimmt jede irreduzibele bilineare Membran eine reelle Bewegung. Die konjugiert-komplexe Membran gehört zur umgekehrten Bewegung.

Setzt man an Stelle der Bewegung eine reelle Umlegung, so kommt man zu einem beinahe gleichlautenden Satz; nur tritt an Stelle der Membran irgend ein irreduzibeler ebener Schnitt der absoluten Fläche. Beide Sätze aber sind Spezialfälle von zwei umfassenderen, in denen an Stelle der Bewegung oder Umlegung eine beliebige eigentliche oder uneigentliche reelle konforme Abbildung der absoluten Fläche, und an Stelle der bilinearen Membran oder Kurve irgend eine *krumme* ausgezeichnete Membran oder krumme analytische Kurve auf der absoluten Fläche tritt.

Die reellen Bewegungen im hyperbolischen Raume bilden ein nichtabgeschlossenes Kontinuum. Man sieht aber sofort, daß man ein abgeschlossenes Kontinuum u. a. dadurch erhält, daß man die wohlgeordneten Paare reeller Punkte auf der absoluten Fläche, also die reellen Pfeile hinzufügt. Dieses Kontinuum, das natürlich auch wieder ins komplexe Gebiet fortgesetzt werden kann, ist das Objekt einer kinematischen Theorie, ähnlich der, die der Verfasser im Anhang zu seiner Geometrie der Dynamen skizziert hat; und das Gleiche gilt natürlich von den reellen Bewegungen im elliptischen Raume, deren Kontinuum von vorn herein abgeschlossen und dem Kontinuum der Paare reeller Punkte aus zwei quaternären Gebieten äquivalent ist. Auch leistet die Geometrie der reellen *Somen* (Lagen eines starren Körpers) im hyperbolischen Raume Ähnliches für die Theorie der Funktionen von drei komplexen Veränderlichen, wie die Geometrie der reellen Pfeile für die Theorie der Funktionen von zweien. Aber Fragen dieser Art, wie

auch das Studium jener Grenzfälle und Trümmer der vorgetragenen Sätze, die im Euklidischen Raume übrig bleiben, liegen jenseits der Schranken, die wir uns für diesesmal gesetzt haben. Wir bemerken nur noch, daß schon einige Untersuchungen über den zuletzt berührten Gegenstand vorliegen.[1])

Bonn, 3. August 1906.

Protokoll der Stuttgarter Versammlung vom 16. bis zum 20. September 1906.

Sonntag, den 16. September, nachmittags 4 Uhr: Vorstandssitzung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung; abends $8\frac{1}{2}$ Uhr zwangloser Begrüßungsabend für Damen und Herren in der Liederhalle.

Montag, den 17. September, vormittags $9\frac{1}{2}$ Uhr: Erste allgemeine Versammlung im Festsaal der Liederhalle (Gutzmer erstattet den Bericht der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte); nachmittags 3 Uhr: Konstituierung der Abteilung und erste Abteilungssitzung; abends 8 Uhr: Gartenkonzert mit festlicher Beleuchtung und Feuerwerk in den Kuranlagen von Cannstatt, für Nichtteilnehmer Zusammenkunft bei Koppenhöfer.

Dienstag, den 18. September, vormittags 9 Uhr: Zweite Abteilungssitzung; nachmittags $3\frac{1}{2}$ Uhr: Dritte Abteilungssitzung; abends 7 Uhr: Festmahl in der Liederhalle, für Nichtteilnehmer Zusammenkunft bei Koppenhöfer.

Mittwoch, den 19. September, vormittags 9 Uhr: Vierte Abteilungssitzung; nachmittags $3\frac{1}{2}$ Uhr: Fünfte Abteilungssitzung; abends Festvorstellungen in den k. Theatern, im Interimtheater: Der Barbier von Sevilla, im Wilhelmatheater: Matthias Gollinger, dann Zusammenkunft bei Koppenhöfer.

Donnerstag, den 20. September, vormittags 9 Uhr: Geschäftssitzung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, hierauf Vorstandssitzung; mittags: Ausflug nach Tübingen; abends 8 Uhr: Empfang auf dem Rathause.

---

1) Study, Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903, S. 305—309, 430—431, sowie namentlich die zitierten Arbeiten der Herren E. v. Weber und J Grünwald, wo u. a. ein G. d. D. S. 340 ausgesprochener Gedanke ausgeführt wird.

Protokoll der Vorstandssitzung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung zu Stuttgart am 16. September 1906.

Anwesend: Pringsheim als Vorsitzender, ferner Ackermann-Teubner, v. Brill, Gutzmer, Krazer, Stäckel.

Es wird die Tagesordnung der am folgenden Tage beginnenden Jahresversammlung, und insbesondere der auf den 20. ds. einberufenen Geschäftssitzung durchberaten.

Stuttgart, den 16. September 1906.

Pringsheim, Vorsitzender. Krazer, Schriftführer.

Protokoll der Mitgliederversammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung zu Stuttgart vom 17. bis 20. September 1906.

Erste Sitzung, Montag, den 17. September, nachmittags 3 Uhr.

Reuschle begrüßt die Versammlung im Namen der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte und Pringsheim als Vorsitzender der Deutschen Mathematiker-Vereinigung im Namen dieser. Es wird die Tagesordnung für die Vorträge festgesetzt und beschlossen, daß die Dauer eines Vortrages 20 Minuten, die eines Referates 40 Minuten betragen solle. Stäckel legt im Auftrage des Herausgebers Schlesinger den zweiten Band der gesammelten mathematischen Werke von L. Fuchs vor. Es wird Reuschle zum Vorsitzenden dieser, Pringsheim zum Vorsitzenden der zweiten Sitzung gewählt.

Vorsitzender: Reuschle.

1. Blumenthal-Aachen: Über die ganzen transzendenten Funktionen und den Picardschen Satz (Referat).
2. A. Pringsheim-München: Über das Fouriersche Integraltheorem.
3. G. Faber-Karlsruhe: Über Reihen nach Legendreschen Polynomen.
4. O. Perron-München: Über die singulären Punkte auf dem Konvergenzkreise.

Zweite Sitzung, Dienstag, den 18. September, vormittags 9 Uhr.

Vorsitzender: Pringsheim.

1. F. Hartogs-München: Über neuere Untersuchungen auf dem Gebiete der analytischen Funktionen mehrerer Variablen (Referat).
2. P. Stäckel-Hannover: Über Potenzreihen von mehreren Veränderlichen.
3. D. Hilbert-Göttingen: Über Wesen und Ziele der Theorie der Integralgleichungen.

4. E. Hilb-Augsburg: Über eine Erweiterung des Kleinschen Oszillationstheorems.

v. Brill ladet die Mitglieder zu einem Besuche Tübingens für den Donnerstag Nachmittag ein.

Nöther wird zum Vorsitzenden der dritten Sitzung gewählt.

Dritte Sitzung, Dienstag, den 18. September, nachmittags 3½ Uhr.

Vorsitzender: Nöther.

1. M. Krause-Dresden: Zur Theorie der Funktionen reeller Veränderlichen.
2. P. Koebe-Göttingen: Über konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Bereiche.
3. F. Meyer-Königsberg: Anwendung des erweiterten Euklidischen Algorithmus auf Resultantenbildungen.
4. P. Schafheitlin-Berlin: Zur Theorie der Besselschen Funktionen.

v. Brill wird zum Vorsitzenden der vierten Sitzung gewählt.

Vierte Sitzung, Mittwoch, den 19. September, vormittags 9 Uhr.

Vorsitzender: v. Brill.

1. A. Schoenflies-Königsberg: Bericht über die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. II. Teil. (Geometrie und Funktionentheorie).
2. G. Hessenberg-Berlin: Potenzen transfiniter Ordnungszahlen.
3. G. Landsberg-Breslau: Über die Totalkrümmung.
4. K. Rohn-Leipzig: Lineale Konstruktion der Kurve 3. Ordnung.
5. C. Juel-Kopenhagen: Über nichtanalytische Raumkurven.
6. Th. Schmid-Wien: Zur konstruktiven Behandlung des Achsenkomplexes.
7. R. Müller-Braunschweig: Polbestimmung für Verzweigungslagen bei der Bewegung eines ebenen ähnlich-veränderlichen Systems in seiner Ebene.
8. H. Wiener-Darmstadt: Demonstrationen.

Klein wird zum Vorsitzenden der fünften Sitzung gewählt.

Fünfte Sitzung, Mittwoch, den 19. September, nachmittags 3½ Uhr.

Vorsitzender Klein.

1. C. Runge-Göttingen: Über graphische Lösungen von Differentialgleichungen.
2. R. Mehmke-Stuttgart: a. Über neue Mechanismen zur Lösung von Aufgaben der Dynamik, mit Anwendung auf die mechanische Inte-

gration von Differentialgleichungen 2. und höherer Ordnung und von Systemen solcher. b. Über neue Anwendungen der Rolle auf das Zeichnen verschiedener Klassen von Kurven und auf die Ausführung von Berührungstransformationen.

3. A. Wagenmann-Stuttgart: Mathematische Theorie des Entwicklungsgedankens.

Hierauf fand eine Debatte über Unterrichtsfragen statt, anknüpfend an den von Gutzmer in der ersten allgemeinen Versammlung erstatteten Bericht der Unterrichtskommission Deutscher Naturforscher und Ärzte. Der württembergische Unterrichtsminister wohnte mit einer größeren Anzahl von Ministerialräten dieser Besprechung bei.

Geschäftssitzung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung am 20. September 1906.

Vorsitzender: Pringsheim.

a. Bericht über den Stand der Deutschen Mathematiker-Vereinigung und die Tätigkeit des Vorstandes im ablaufenden Jahre.

1. Am Schlusse des Jahres 1905 zählte die Deutsche Mathematiker-Vereinigung laut Mitgliederverzeichnis 664 Mitglieder. Davon verstarben im Laufe dieses Jahres 5 (Bauer-München, Boltzmann-Wien, Kneschke-Braunschweig, Stammer-Düsseldorf, Wolfskehl-Darmstadt), 1 Mitglied (Westphal-Potsdam) ist ausgetreten. Zu den verbleibenden 658 Mitgliedern kamen 30 neue hinzu, von denen 17 dem Deutschen Reiche, je 3 Rußland, Ungarn und den Vereinigten Staaten von Amerika, je 1 Dänemark, Österreich, Schweden und der Schweiz angehören. Die Mitgliederanzahl beträgt sohin heute 688.

2. Das Vermögen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung betrug am 1. Dezember 1905 laut Kassenbericht ℳ 16 864.66. Im Laufe dieses Jahres konnten weitere ℳ 1000.— 3% Deutsche Reichs-Anleihe angekauft werden, sodaß der Besitz an Wertpapieren jetzt nom. ℳ 18 000.— mit einem Ankaufswert von ℳ 16 573.55 beträgt; außerdem sind noch ℳ 1020.70 baar in der Kasse.

3. In der Geschäftssitzung zu Breslau vom 21. September 1904 war beschlossen worden, daß die Deutsche Mathematiker-Vereinigung in das Vereinsregister des Amtsgerichtes Leipzig eingetragen werden solle, und daß zu dem Ende vorher die Satzungen so ergänzt werden, wie es die Bestimmungen des B. G.-B. für die Eintragung verlangen. Diese neuen Satzungen wurden dann in der Geschäftssitzung zu Meran

vom 28. September 1905 einstimmig angenommen. Nach der Einreichung machte das Amtsgericht Leipzig nochmals Einwendungen. In § 8 Absatz 4 war verlangt, daß der Schriftführer „über die Geschäftssitzung“ ein Protokoll führe; das Amtsgericht Leipzig verlangte, daß dieses Protokoll sich auf die ganze Mitgliederversammlung und ihre Beschlüsse erstrecke; infolge dessen hat der Vorstand dem genannten Absatze die Fassung gegeben: „Über die Mitgliederversammlung und die von ihr gefaßten Beschlüsse hat der Schriftführer ein Protokoll zu führen, welches spätestens im Dezemberhefte des Jahresberichtes veröffentlicht wird.“ Diese Änderung zog nach sich, daß auch der Schluß des zweiten Absatzes von § 7, wo es hieß: „Im Dezemberhefte das Protokoll der Geschäftssitzung“ in „Im Dezemberhefte das Protokoll dieser“, nämlich der Mitgliederversammlung, abgeändert werde, und endlich konnte jetzt im dritten Absatze des § 7 das Wort „Chronik“ durch das Wort „Protokoll“ ersetzt werden. Am 29. Dezember 1905 wurde sodann die Deutsche Mathematiker-Vereinigung in das Vereinsregister des Amtsgerichtes Leipzig eingetragen. Der Vorstand stellt den Antrag, den genannten Änderungen der Satzungen nachträglich die Genehmigung zu erteilen.

Der Antrag wird einstimmig angenommen.

4. Von dem Vorsitzenden wurden den Mitgliedern Scheibner zum 80. Geburtstage, C. Neumann zum 50-jährigen Doktorjubiläum und Weingarten zum 70. Geburtstage die Glückwünsche der Deutschen Mathematiker-Vereinigung telegraphisch ausgesprochen.

5. Am 15. III. erfolgte in gewohnter Weise die erste Einladung zu der heurigen Jahresversammlung in Gemeinschaft mit der 1. Abteilung der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte. Es wurden Vorträge über Funktionentheorie vom Vorstande als besonders willkommen bezeichnet und einige Mitglieder zu umfassenden Referaten über diesen Gegenstand gewonnen. Der aus der Reihe der Mitglieder angeregte Gedanke, auch die Versicherungsmathematik auf die Tagesordnung zu setzen, mußte wegen eines gleichzeitig mit unserer Versammlung einberufenen internationalen Kongresses für Versicherungswesen wieder fallen gelassen werden. Da sich die Veröffentlichung des Programms der Naturforscherversammlung verzögerte, erfolgte im Juliheft des Jahresberichtes einstweilen eine Mitteilung der bis dahin angemeldeten Vorträge, während die Veröffentlichung der auf Grund dieser Anmeldungen und des allgemeinen Programms der Naturforscherversammlung entworfenen Tagesordnung für unsere Versammlung erst im Augusthefte geschehen konnte.

b. Bericht über die literarischen Unternehmungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

1. Jahresbericht: Bezüglich des Jahresberichtes wird von Seite des Vorsitzenden angeregt, zur besseren Übersicht des fertigen Bandes für die wissenschaftlichen Aufsätze einerseits und für die Mitteilungen und Nachrichten andererseits besondere Paginierungen einzurichten. Es werden Herausgeber und Verleger gebeten, die Durchführbarkeit dieses Gedankens in Erwägung zu ziehen.

2. Referate: Die vorjährige Versammlung hat sich damit einverstanden erklärt, daß das von Schlesinger zu erstattende Referat über die linearen Differenzialgleichungen sich auf die Zeit von 1865 an beschränke. Fejer-Klausenburg hat sich bereit erklärt, das Referat für die frühere Zeit zu übernehmen, und es hat der Vorstand dieses Anerbieten mit Dank angenommen. — Das gleichfalls im vorigen Jahre erwähnte Referat von Simon über die Entwicklung der Elementar-Geometrie im XIX. Jahrhundert ist vor kurzem erschienen. — Das Referat von Burkhardt über die Entwicklungen nach oszillierenden Funktionen ist bis zum 90. Bogen fortgeschritten, und es ist die Ausgabe der 5. Lieferung in kurzem zu erwarten. — Das Referat von Kowalewski über Lie ist im wesentlichen abgeschlossen und dürfte im Laufe dieses Jahres zum Drucke gelangen. —

3. Enzyklopädie: Klein berichtet über den Fortgang der Bände 2—6 der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, von denen seit der letzten Versammlung 6 Hefte erschienen sind, und für deren weitere Fortsetzung auch in diesem Jahre günstige Aussichten bestehen. Klein teilt ferner mit, daß er nun auch die Redaktion des 7. Bandes (Philosophie, Geschichte und Pädagogik) übernommen habe, und daß mit den Vorarbeiten zu diesem ganz besondere Schwierigkeiten in sich tragenden Bande in Bälde begonnen werde. Auch für die französische Ausgabe der Enzyklopädie steht das Erscheinen weiterer Hefte in Aussicht.

c. Berichte der Kommissionen.

1. Statistische Kommission: Schoenflies weist im Namen der statistischen Kommission auf die pag. 221 des Jahresberichtes erfolgte Publikation „Zur Statistik des mathematischen Studiums“ hin und stellt weitere ähnliche Nachrichten auch für dieses Jahr in Aussicht. Es wird angeregt, insbesondere auch über die Zahl der neu errichteten Lehrstellen für Mathematik an den höheren Schulen Mitteilung zu machen.

2. Kommission für den Schröderschen Nachlaß: Eugen Müller teilt mit, daß er nunmehr im Einverständnis mit der vorjährigen Ver-

sammlung den von Schröder seiner Zeit in Aussicht gestellten „Abriß" der algebraischen Logik bearbeitet habe, daß das Manuskript ziemlich vollständig und fertig vorliege, und daß der Druck noch in diesem Winter begonnen werde.

3. Bibliographische Kommission: Felix Müller weist im Namen der bibliographischen Kommission auf die pag. 430 der Jahresberichte erschienene Publikation „Verzeichnis älterer mathematischer Werke aus der im Besitz der Jacobsonschule zu Seesen befindlichen Wertheimschen Bibliothek" hin. Er legt ferner ein mit Rücksicht auf den 4. Band der Cantorschen Geschichte der Mathematik verfaßtes Verzeichnis von 250, für die zweite Hälfte des 18. Jahrhunderts in Betracht kommenden mathematischen Zeitschriften vor.

d. Beschlußfassung über die Verwendung des Aktivrestes des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses.

Die der letzten Versammlung vorgelegte Abrechnung hatte einen Aktivrest von M. 1884.38 ergeben. Nach Auszahlung des damals beschlossenen Beitrages von M. 200. — zum Laibacher Vega-Denkmal und unter Hinzurechnung der inzwischen erwachsenen Zinsen steht heute ein Betrag von ℳ 1733.80 zur Verfügung. Die vorjährige Versammlung hatte beschlossen, daß ein Teil dieses Überschusses für die Grabstätte Riemanns auf dem Friedhofe von Biganzolo verwendet werde, und hat den Vorstand beauftragt Nachforschungen an Ort und Stelle vorzunehmen, um der heurigen Versammlung einen bestimmten Vorschlag in dieser Richtung zu unterbreiten. Diesem Auftrage entsprechend hat der Schriftführer in diesem Frühjahre den Friedhof von Biganzolo aufgesucht und berichtet: „In der westlichen Ecke der Nordwand des kleinen Friedhofes[1]) fand ich die Grabplatte Riemanns in die Mauer eingelassen; das Grab selbst ist nicht erhalten, dieses und, da der Friedhof seit dem Tode Riemanns schon mehrmals wieder belegt wurde, noch mehr die Gebeine Riemanns sind nicht mehr aufzufinden. Die Schrift der eingemauerten Platte ist ziemlich verblaßt, auch die Einmauerung ohne besondere Sorgfalt geschehen. Der Sindaco von Biganzolo hat mir mitgeteilt, daß die Gemeinde beabsichtige, den Friedhof durch Anfügung einer Arkadenreihe an der

1) Man erreicht diesen bei der Kirche von Biganzolo gelegenen Friedhof, wenn man von Intra etwa eine Viertelstunde weit auf der Straße nach Locarno geht und da, wo diese Straße zwischen den Fabrikgebäuden der Gebrüder Züst hindurchgeht, an diesen in südwestlicher Richtung in die Höhe steigt. Weder Kirche noch Friedhof sind von der Straße aus sichtbar. Ganz nahe beim Friedhof liegt die zur Gemeinde Selasca gehörige Villa Pisoni, das Sterbehaus Riemanns, jetzt Wohnhaus der Familie Züst.

Westseite zu vergrößern und so die Schaffung dauernder Gedenkstätten zu ermöglichen. Er ist bereit, eine dieser Kapellen gegen Erstattung der Kosten uns zu überlassen mit der Erlaubnis darin ein Denkmal Riemanns zu errichten. Da die Erweiterung des Friedhofes erst in ein Paar Jahren geschehen soll, so ist hinlänglich Zeit, das Projekt nach allen Seiten zu erwägen."

Die Versammlung beauftragt den Schriftführer, unter dem Ausdrucke des Dankes für seine bisherigen Bemühungen, die Angelegenheit in dem genannten Sinne weiter zu verfolgen und einer der nächsten Versammlungen wieder zu berichten. Der oben erwähnte Überschuß von 1733.80 *M.* soll aber schon jetzt so geteilt werden, daß 800 *M.* dem IV. Internationalen Kongreß überwiesen, der Rest von 933.80 *M.* für das Riemann-Grabmal reserviert werden.

e. Begründung eines Mathematiker-Archivs.

In Erwägung, daß auf der Göttinger Universitätsbibliothek bereits der wissenschaftliche Nachlaß von Riemann, Clebsch und Plücker aufbewahrt wird, werden Klein und Conrad Müller beauftragt, mit dieser Bibliothek in Beziehung zu treten und der nächsten Versammlung darüber zu berichten, ob und unter welchen Bedingungen sie bereit ist, wissenschaftlich interessante Manuskripte und Briefe verstorbener Mathematiker, welche ihr von der Deutschen Mathematiker-Vereinigung übergeben werden, aufzubewahren.

f. Eulerfeier im Jahre 1907.

Nachdem die bisherigen Erkundigungen des Vorstandes ergeben haben, daß das Zusammentreffen mit anderen wissenschaftlichen Versammlungen die Abhaltung einer Eulerfeier im nächsten Jahre zu Basel untunlich erscheinen läßt, und daß ferner auch die Berliner Akademie der Wissenschaften eine besondere Eulerfeier nicht in Aussicht genommen hat, beschließt die Versammlung auf Antrag des Vorstandes, daß auf der nächsten Jahresversammlung in Dresden eine Sitzung dem Andenken Eulers gewidmet werde, in der Weise, daß in derselben Vorträge stattfinden, die auf Euler, seine wissenschaftlichen Arbeiten und seine wissenschaftliche Bedeutung Bezug haben; jedoch soll für den Fall von dieser Feier abgesehen werden, daß der IV. Internationale Kongreß zu Rom eine Ehrung Eulers ins Auge fasse.

g. Herstellung eines ausführlichen Mitgliederverzeichnisses der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

Das an der Spitze eines jeden Bandes der Jahresberichte erscheinende Mitgliederverzeichnis beschränkt sich auf eine bloße Adressen-

angabe. Es ist infolgedessen schon mehrfach aus dem Kreise der Mitglieder der Wunsch geäußert worden, dieses Verzeichnis, so wie es bei anderen gelehrten Gesellschaften geschieht, ausführlicher zu gestalten. Bei der großen Anzahl der Mitglieder dürfte sich aber eine solche Erweiterung des regelmäßigen jährlichen Verzeichnisses nicht empfehlen, dagegen erschien es dem Vorstande wohl durchführbar und auch wünschenswert, daß in größeren Zwischenräumen ein ausführliches Mitgliederverzeichnis herausgegeben werde, welches als besondere Beilage des Jahresberichtes auf Kosten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung hergestellt und allen Mitgliedern zugesandt wird. Der Vorstand hat demgemäß beschlossen, ein solches ausführliches Mitgliederverzeichnis herzustellen, und hat zur Beschaffung des nötigen Materials an alle Mitglieder Fragebogen versendet. Von diesen sind bis jetzt etwas mehr als $^2/_3$ wieder eingelaufen.

Die Versammlung ermächtigt den Schriftführer, zur Bearbeitung des Mitgliederverzeichnisses einen Hilfsarbeiter gegen entsprechende Vergütung heranzuziehen.

h. Neuwahlen in den Vorstand. Wahl der Kasserevisoren.

An Stelle der satzungsgemäß aus dem Vorstande ausscheidenden Mitglieder v. Mangoldt und Stäckel werden:

Krause-Dresden und Schoenflies-Königsberg

für die Zeit vom 1. Oktober 1906 bis zum 30. September 1909 als Vorstandsmitglieder gewählt.

Als Kasserevisoren werden für dieses Jahr Bruns und Hölder wiedergewählt.

Stuttgart, den 20. September 1906.

Pringsheim, Vorsitzender. Krazer, Schriftführer.

Protokoll der Vorstandssitzung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung zu Stuttgart am 20. September 1906.

Anwesend: Pringsheim als Vorsitzender, ferner Ackermann-Teubner, v. Brill, Gutzmer, Krause, Krazer, Schoenflies.

Es wird v. Brill zum Vorsitzenden für die Zeit vom 1. Oktober 1906 bis zum 30. September 1907 gewählt.

Stuttgart, den 20. September 1906.

Pringsheim, Vorsitzender. Krazer, Schriftführer.

Verbesserungen und Bemerkungen zu den Büchertiteln der Wertheimschen Bibliothek (Bd. 15, 431—434).

1508. Streiche „Arithmetica germanica" (steht nur auf dem Rücken des Buches). Lies „Rechenung" statt Rechnungen und „Kauffmannschafft" statt Kauffmannschafften.

1509. Streiche „Arithmeticae disciplinae".

1533 (32). Ohne Jahreszahl. Die 2. Auflage „De triangulis planis et sphaericis" erschien (nach Mitteilung des Herrn G. Eneström) Basel 1561.

1540. Lies Piero Borgi statt Luca del Borgo und „abacho" statt abaco.

1552. Lies Ghaligai Fiorentino. Nouv. riv.

1556. General trattato di numeri e misure. Der letzte Teil v. J. 1560 befindet sich auch in der Bibliothek.

1570. Lies „proportionibus" statt „proportione".

1636. Porto astronomico di Emmanuel Porto. (Benvenuto Petazzo gewidmet).

1640. Breve e facil introduzzione alla geographia e trigonometria d'Emmanuel Porto. (Battista Grimani gewidmet).

Felix Müller.

Mitteilungen und Nachrichten.

Geeignete Mitteilungen wird der Herausgeber stets mit größtem Danke entgegennehmen.

1. Akademien. Gesellschaften. Vereinigungen. Versammlungen.

Veränderungen im Personalbestande der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Juli — September 1906.

Neu aufgenommen als Mitglieder:

U. Broggi, Göttingen, Nikolausbergerweg 48.
E. Bunitzky, Odessa, Universität.
Arthur B. Frizell, Göttingen, Hainholzweg 46.
Dr. K. Goldzieher, Budapest VII, Holló-utcza 4.
M. Grober, Halle a. S., Klosterstraße 1.
Dr. G. Herglotz, Göttingen, Steinsgraben 3.
Dr. phil. Emil Hilb, Augsburg, Fuggerstraße 4.
Dr. phil. C. S. Hilbert, München, Nymphenburgerstraße 57.
Professor Thomas Franklin Holgate, an der Northwestern Universität zu Evanston, Illinois, U. S. A., 617 Library Avenue.
Dozent S. Johannsen, Helsingfors, Villagaten 27.
Mathematisches Seminar der Universität Bonn.
Dozent C. W. Oseen, Lund.
Dr. J. V. Pexider, Dozent an der Universität Bern, Thunstraße 88.
K. A. Ponkka, cand. phil., Helsingfors.
Dr. E. Stübler, Privatdozent an der Technischen Hochschule Stuttgart, Alexanderstraße 73.

Professor H. Taber an der Clark-Universität, Worcester Mass.
Dr. A. Timpe, Langfuhr bei Danzig, Friedenaustraße 31.
Dr. O. Toeplitz, Göttingen, Kirchweg 4.

Gestorben:

Boltzmann, L., Professor an der Universität Wien.
Wolfskehl, P., Privatgelehrter in Darmstadt.

Mathematische Gesellschaft zu Marburg. Im zweiten Quartal des Wintersemesters 1905/06 fanden 3 Sitzungen, im Sommersemester 1906 deren 7 statt. Es wurde über folgende Themata vorgetragen — *23. Januar:* Prof. Neumann sprach über eine einfache Methode, die Bestimmung von Wirbelbewegungen in der Hydrodynamik auf die Ermittelung einer einzigen Funktion zurückzuführen, die dann ähnliche Dienste leistet, wie bei wirbelfreien Bewegungen das Geschwindigkeitspotential. — *6. Februar:* Herr Kolb sprach über die Arbeit von Busche über Kroneckersche Beziehungen zwischen Geometrie und Zahlentheorie und Herr Schmahl begann ein Referat über die Arbeit von Hurwitz über die Bestimmung der Klassenanzahl binärer quadratischer Formen. — *20. Februar:* Prof. Hensel berichtete über eine ältere Arbeit von Hurwitz über quadratische Formen im Zusammenhang mit den „Fareyschen Polygonen", und Herr Schmahl setzte sodann seinen Vortrag von der letzten Sitzung fort. — Im Sommersemester: *8. Mai:* Es sprach Dr. Fueter über die Zermelosche mengentheoretische Arbeit (Math. Annalen, Bd. 59) und über die durch sie veranlaßte Meinungsäußerung, namentlich französischer Mathematiker, über die Grundlagen der Mengenlehre. — *22. Mai:* Dr. Jung sprach über die Bestimmung der Integrale erster Gattung in einem algebraischen Körper von zwei unabhängigen Veränderlichen. — Am *12. und 26. Juni* trug Herr Roth über die Mittag-Lefflersche Sterntheorie vor. — *10. Juli:* Dr. Jung gab ein einfaches Beispiel zu der in dem früheren Vortrage entwickelten Theorie, und Prof. Neumann begann ein größeres Referat über die Grundlagen der Fredholm-Hilbertschen Theorie der linearen Integralgleichungen, das er am *24. und 31. Juli* fortsetzte.

American Mathematical Society. Die 13. Sommer-Versammlung der Gesellschaft fand am 3.—4. September in der Yale Universität zu New Haven, Conn. statt. Die vorgelegten wissenschaftlichen Mitteilungen ergeben sich aus der nachstehenden Liste: Birkhoff, On a certain class of sets of normal orthogonal functions. — Carmichael, Multiply perfect numbers of three different primes. — Carver, Associated configurations of the Cayley-Veronese class. — Dickson, On commutative linear algebras in which division is always uniquely possible. — Uniform definitions of the abstract forms of the various known systems of linear groups. — Criteria for the irreducibility of functions in a finite field. — On the theory of equations in a modular field. — Eisenhart, Applicable surfaces with asymptotic lines of one surface corresponding to a conjugate system of another. — Fite, Irreducible linear homogeneous groups whose orders are powers of a prime. — Hutchinson, On loci the coordinates of whose points are abelian functions of three parameters. — Kasner, The inverse problem of dynamics. — The geometry of dynamical trajectories. —

Kellogg, The behavior of harmonic functions of a region on the boundary. — Leonard, On the factoring of composite hypercomplex number systems — McMahon, The differential geometry of the general vector field (preliminary report). — Manning, A note on transitive groups. — Mason, The expansion of an arbitrary function in terms of normal functions. — The boundary value problems of differential equations of hyperbolic type. — Miller, Generalization of the groups of genus zero. — Morley, Reflexive geometry. — Ranum, The group of classes of congruent matrices and its application to the group of isomorphisms of any abelian group. — Richardson, On the reduction of multiple integrals (second paper). — Schweitzer, Systems of axioms for projective geometry. — Concerning abstract geometrical relations (preliminary report). — Sharpe, The motion of a viscous gas. — Sisam, On systems of conics lying on surfaces of the third, fourth and fifth orders. — Snyder, Plane quintic curves which possess a group of linear transformations. — Stickelberger, Zur Theorie der vollständig reduciblen Gruppen, die zu einer Gruppel inearer homogener Substitutionen gehören. — Wilson, On divergence and curl. — Oblique reflections and unimodular strains. — Double products and strains in n dimensions. — Young, General Theory of approximation by functions with a given number of parameters. — Im Anschluß an diese Versammlung wurde vom 5.—8. September das „New Haven Colloquium" abgehalten, bei welchem folgende Vorlesungen gehalten wurden: Moore-Chicago, On the theory of bilinear functional operations. — Wilczynski, Projective differential geometry. — M. Mason, Selected topics in the theory of boundary value problems of differential equations.

2. Preisaufgaben und gekrönte Preisschriften.

Preisaufgabe der allgemeinen Abteilung der Technischen Hochschule zu Darmstadt. (Für Studierende.) Wenn man die Gaußische Methode zur Berechnung der positiven Wurzeln einer trinomischen Gleichung auf Gleichungen mit vier Gliedern ausdehnt, so sind drei Fälle zu unterscheiden: Gleichungen mit einem, mit zwei und mit drei Zeichenwechseln. Nach dem Theorem des Cartesius besitzen die Gleichungen erster Art eine positive, die Gleichungen der zweiten Art zwei, resp. gar keine positiven Wurzeln, endlich die Gleichungen der dritten Art eine oder drei positive Wurzeln. Wann die Höchstzahl der positiven Wurzeln in den beiden letzten Fällen erreicht wird, läßt sich vermittels einfacher, zugleich als Ausgangspunkt der Berechnung dienender Kriterien entscheiden. Es ist vermittels der letzteren — unter Zugrundelegung der Tafeln von Gundelfinger für trinomische Gleichungen — mindestens ein Beispiel für jede Art der quadrinomischen Gleichungen durchzuführen. — Preis 70 M. Die Lösungen sind bis zum 1. Mai 1907 einzureichen.

3. Hochschulnachrichten.

Verzeichnis der für das Wintersemester 1906/7 angekündigten Vorlesungen über die mathematischen Wissenschaften. (Schluß.)

Aachen. Jürgens, Höhere Mathematik II mit Übungen; Kaufmännisches Rechnen; Versicherungsmathematik; Seminar. Blumenthal, Höhere Mathematik I mit Übungen; Ausgewählte Kapitel der höheren Mathematik. Kötter, Darstellende Geometrie mit Übungen; Graphische Statik mit Übungen; Ausgewählte Kapitel aus der graphischen Statik. Sommerfeld, Mechanik mit Übungen; Ausgewählte Teile der technischen Mechanik. Wüllner, Physik in mathematischer und elementarer Behandlungsweise. N. N., Mechanische Wärmetheorie Polis, Allgemeine Meteorologie; Klimatologie.

Darmstadt. Gundelfinger, Höhere Mathematik mit Übungen; Analytische Übungen. Dingeldey, Höhere Mathematik mit Übungen. Graefe, Höhere Mathematik mit Übungen; Höhere Mathematik II; Geschichte der Mathematik. Scheffers, Differentialrechnung mit Übungen. Wiener, Darstellende Geometrie I mit Übungen; Arbeiten im mathematischen Institut. Fenner, Trigonometrie; Geodäsie; Höhere Geodäsie; Geodädische Übungen. Ohl, Praktische Geometrie. Henneberg, Technische Mechanik mit Übungen; Mechanik II; Ausgewählte Abschnitte der graphischen Statik. Schlink, Repetitorium der Mechanik. Schering, Mechanische Wärmetheorie; Physikalisches Kolloquium. Meisel, Theorie der optischen Instrumente. Fritsch, Spektralanalyse.

Danzig. Lorenz, Dynamik starrer Körper (3); Übungen dazu (2); Festigkeitslehre und Hydraulik (4); Übungen dazu (2) v. Mangoldt, Höhere Mathematik I (6). Schilling, Darstellende Geometrie (3); Übungen dazu (5). Sommer, Höhere Mathematik II (4); Übungen dazu (1); Ausgewählte Kapitel aus der Lehre von den Differentialgleichungen (2); Potentialtheorie (2). N. N., Einleitung in die Theorie des elektromagnetischen Feldes (2).

Dresden. Krause, Höhere Mathematik; Ausgewählte Kapitel aus der Theorie der komplexen Funktionen; Theorie der reellen Funktionen; Seminar, Helm, Höhere Mechanik II mit Übungen; Analytische Mechanik mit Übungen; Elektrodynamik nach ihrer geschichtlichen Entwicklung. Heyer, Kartenentwürfe; Theorie und Anwendung der Determinanten. Naetsch, Elementare Algebra und Analysis. Disteli, Darstellende Geometrie II mit Übungen; Kinematische Geometrie des Raumes. Grübler, Technische Mechanik mit Übungen. Hallwachs, Physikalisches Kolloquium. Toepler, Über den Gaszustand. Ulbricht, Telegraphie und Telephonie. Mollier, Technische Thermodynamik mit Übungen; Kinematik mit Übungen; Maschinenlaboratorium. Görges, Elektrotechnik; Starkstromanlagen; Theorie des Wechselstromes II; Praktika. Pattenhausen, Geodäsie mit Übungen; Höhere Geodäsie mit Übungen.

Karlsruhe. Krazer, Höhere Mathematik I mit Übungen. Schur, Darstellende Geometrie I mit Übungen; Graphische Statik mit Übungen. Ludwig, Elementare und analytische Geometrie der Ebene; Projektive Geometrie. Faber, Ebene und sphärische Trigonometrie; Arithmetik und Algebra. Wedekind, Höhere Mathematik II mit Übungen. Heun, Mechanik I mit Übungen; Elemente der Mechanik; Elementare Mechanik; Seminar. Brauer, Festigkeitslehre. Haid, Praktische Geometrie; Höhere Geodäsie; Methode der kleinsten Quadrate.

Promotionen in den Vereinigten Staaten von Nordamerika. — Während des akademischen Jahres 1905/6 fanden an den angesehensten amerikanischen Universitäten die folgenden neun Promotionen auf dem Gebiete der Mathematik statt, wobei die Universität in Klammern angegeben ist: E. C. Colpitts (Cornell), On the twisted quintic curves; B. F. Finkel

(Pennsylvania), Determination of all groups of order 2 which contain cyclic selfconjugate subgroups of order 2 and whose generating operators correspond to the partitions; C. C. Grove (Johns Hopkins), I. The syzygetic pencil of cubics and a new geometrical development of its Hesse group G_{216}. II. On the complete Pappus hexagon; H. B. Leonard (Colorado), On the factoring of composite algebras; J. F. Messick (Johns Hopkins), Cubic curves in reciprocal triangular situation; R. G. D. Richardson (Yale), Improper multiple integrals; W. H. Roeber (Harvard), Brilliant points; C. H. Sisam (Cornell), Ruled surfaces of order seven having a rectilinear directrix; G. E. Wahlin (Yale), The relation between the binary quadratic forms and the quadratic numerical bodies. — Von 1898 bis 1906 beläuft sich die Zahl der amerikanischen Promotionen auf dem Gebiete der Mathematik während der einzelnen Jahre auf: 11, 13, 11, 18, 8, 7, 14, 21, 9.

4. Personalnachrichten.

Ernennungen, Auszeichnungen usw.:

Professor H. F. Blichfeldt wurde zum ao. Professor der Mathematik an der Stanford Universität ernannt.

Dr. E. Bose, Privatdozent an der Universität und Assistent am Institut für theoretische Physik in Göttingen, wurde zum Professor der physikalischen Chemie an der Technischen Hochschule in Danzig ernannt.

Professor C. Bourlet wurde zum Professor der darstellenden Geometrie an der Ecole des Arts et Métiers in Paris ernannt als Nachfolger von Professor Rouché, der in den Ruhestand übertritt.

Professor Dr. F. Enriques wurde zum korrespondierenden Mitgliede der Accademia dei Leincei in Rom gewählt.

Dr. J. Grünwald, Privatdozent an der Universität Wien, wurde zum ao. Professor der Mathematik an der deutschen Universität Prag ernannt.

Professor Dr. M. W. Haskell an der Universität von Californien wurde zum o. Professor der Mathematik daselbst ernannt.

Dr. Th. E. Mc Kinney wurde zum Professor der Mathematik an der Wesleyan Universität ernannt.

Professor P. A. Lambert an der Lehigh Universität wurde zum o. Professor der Mathematik daselbst ernannt.

Professor Dr. G. Landsberg an der Universität Breslau wurde zum ao. Professor an der Universität Kiel ernannt.

Professor H. P. Manning wurde zum ao. Professor der Mathematik an der Brown Universität ernannt.

Professor A. E. Meake an der Lehigh Universität wurde zum o. Professor der Mathematik daselbst ernannt.

Professsor Dr. G. Mittag-Leffler in Stockholm wurde von der Universität zu Aberdeen zum Ehrendoktor ernannt.

Professor Dr. P. Painlevé in Paris wurde zum auswärtigen Mitgliede der Accademia dei Lincei in Rom gewählt.

Privatdozent Dr. Ing. H. Reißner an der Technischen Hochschule zu Charlottenburg wurde als Nachfolger von Professor Sommerfeld zum etatmäßigen Professor der Technischen Hochschule zu Aachen ernannt.

Dr. G. Rost, ao. Professor der Mathematik an der Universität Würzburg, wurde zum o. Professor daselbst ernannt.

Professor Dr. Rubens an der Technischen Hochschule in Charlottenburg wurde zum o. Professor der Physik und Direktor des Physikalischen Institutes der Universität Berlin als Nachfolger von P. Drude ernannt.

Professor Dr. Scheffers an der Technischen Hochschule zu Darmstadt hat einen Ruf an die Technische Hochschule zu Wien abgelehnt und wird der Berufung an die Technische Hochschule zu Charlottenburg erst zum 1. April 1907 Folge leisten.

Dr. Th. Schmid, ao. Professor für darstellende Geometrie an der Technischen Hochschule zu Wien, wurde zum o. Professor ernannt.

Privatdozent Dr. Seitz in Würzburg wurde zum Professor und Dozenten der Physik an der technischen Hochschule in Aachen ernannt.

Professor Dr J. Stein S. J. in Katwigt wurde zum Observator an der vatikanischen Sternwarte in Rom ernannt.

Professor Dr J. J. Thomson in Cambridge wurde von der Universität zu Aberdeen zum Ehrendoktor ernannt.

Dr. J. M. Thornston wurde zum Professor der Mathematik an der Universität von West-Virginia ernannt.

Professor Dr. G. Veronese in Padua wurde zum Ehrendoktor der Universität Aberdeen ernannt.

Professor Dr. A. Wehnelt an der Universität Erlangen wurde zum o. Professor für theoretische Physik und Abteilungsvorstand an der Universität Berlin ernannt.

Professor Dr. W. Wien an der Universität Würzburg lehnte einen Ruf nach Berlin als Nachfolger von Professor Drude ab.

Professor Dr. E. J. Wilczynsky wurde zum ao. Professor der Mathematik an der Universität von Californien ernannt.

Professor Dr. W. Wirtinger an der Universität Wien wurde zum korrespondierenden Mitgliede der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen gewählt.

Professor Dr. K. Zsigmondy an der Hochschule zu Prag wurde zum o. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule in Wien ernannt.

Habilitation:

Dr. Bohren hat sich an der Universität Bern als Privatdozent der Mathematik, einschließl. Wahrscheinlichkeitsrechnung, habilitiert.

Dr. Franz Köhler habilitierte sich für höhere Geodäsie an der böhmischen technischen Hochschule in Prag.

Dr. A. Prey habilitierte sich für Astronomie und Geodäsie an der technischen Hochschule in Wien.

Gestorben:

Professor Dr. L. Boltzmann an der Universität Wien ist am 6. September d. J. zu Duino bei Görz im Alter von 62 Jahren gestorben

J. F. Bossert, Astronom der Pariser Sternwarte, ist am 21. Juni d. J. im Alter von 54 Jahren gestorben.

Dr. Ernesto Cesàro, Professor der Mathematik an der Universität Neapel, ist am 12. September d. J. gestorben.

Professor G. A. de Longchamps ist am 9. Juli d. J. zu Paris im Alter von 64 Jahren gestorben.

Professor Maillard an der Universität zu Poitiers ist im Alter von 61 Jahren gestorben.

Professor Dr. Reinhertz, Professor der Geodäsie an der Technischen Hochschule zu Hannover, ist am 22. August d. J. im Alter von 47 Jahren einem schweren Nierenleiden erlegen.

Dr. P. Wolfskehl, früher Privatdozent an der Technischen Hochschule zu Darmstadt, ist am 13. September d. J. im Alter von 50 Jahren gestorben.

5. Vermischtes.

(Vacat.)

Literarisches.

1. Notizen und Besprechungen.

Bemerkungen zu Herrn Studys Besprechung des zweiten Bandes meiner Liniengeometrie (S. 464 f.).

An dem allgemein verständlichen Satze „Wir denken uns eine Regelfläche durch Bewegung einer Geraden erzeugt“ findet der Herr Referent gleich dreierlei auszusetzen; zunächst: Ich hätte die Beschränkung auf eigentliche reelle Gerade erwähnen sollen. Gegenüber der eigentlichen reellen Geraden bedeuten die uneigentliche und die imaginäre Gerade künstliche Begriffserweiterungen, die für gewisse Zwecke vorteilhaft sind, sich aber keineswegs mit derselben Nötigung und Eindeutigkeit aufdrängen, wie etwa der Übergang von den rationalen zu den irrationalen Zahlen. Man kann also ebensogut umgekehrt demjenigen, der unter einer „Geraden“ schlechtweg noch etwas anderes versteht, als die eigentliche reelle Gerade, die Verpflichtung auferlegen, dies ausdrücklich zu sagen; denn er ist derjenige, der vom ursprünglichen und sozusagen natürlichen Begriff der Geraden abweicht. Übrigens geht aus dem Zusammenhang die erwähnte Einschränkung deutlich hervor. Ferner hätte ich sagen sollen, was „Bewegung“ und „Regelfläche“ ist; es war doch nicht meine Aufgabe, mich in philosophische Erörterungen über die Natur der Bewegung einzulassen und von den Regelflächen war tatsächlich schon auf der ersten Seite des ersten Bandes die Rede.

Die zweite Stelle, die der Herr Referent beanstandet, betrifft die analytische Darstellung einer Regelfläche, indem die sechs Koordinaten eines Stabes als Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen gegeben sind. Ich gestehe, hier den Fall übersehen zu haben, daß die Verhältnisse der Koordinaten konstant sein können, wodurch sich die Regelfläche auf eine feste Gerade reduziert. Aber der Schaden für den Leser wird nicht groß sein; denn dieser wird in jedem einzelnen Fall leicht beurteilen können, inwieweit ein Begriff oder eine Formel aus der Theorie der Regelflächen hier noch anwendbar bleibt, wofern überhaupt dieser triviale Fall noch Interesse hat. Es ist

doch ein Unterschied, ob man solche besondere Fälle unerwähnt läßt, die auch ein besonderes Studium erfordern, oder bloß solche, die sich von selbst erledigen, sobald man darauf aufmerksam wird.

Die dritte bemängelte Stelle „Sucht man vom Striktionsband einer Regelfläche R wieder das Striktionsband, so kommt man auf R zurück" hat mir der Herr Referent besonders übel genommen, weil ich die Einschränkungen dieses Satzes nicht erwähnt habe. Wenn R nämlich eine Cylinderfläche ist, wird das Striktionsband unbestimmt und wenn R zwar ein Striktionsband hat, wenn es sich aber auf eine Cylinderfläche oder eine Gerade reduziert, so kann man den zweiten Schritt nicht vollziehen. Es wäre zweckmäßig gewesen, den Leser auch auf diese Fälle aufmerksam zu machen, aber trotzdem halte ich obige Formulierung nicht für schlimmer oder ungenauer, als wenn man sagt „Die Krümmungslinien einer Fläche schneiden sich rechtwinklig". Muß man wirklich, auch wenn man sich auf den Standpunkt der strengsten Logik stellt, jedesmal wenn man diesen Satz ausspricht, ausdrücklich die Kugel ausnehmen, weil auf ihr die Krümmungslinien unbestimmt werden? Den Logikern ist es geläufig, daß ein Satz „Jedes A ist B" oder „Jedes A hat die Eigenschaft B" durchaus nichts über die Existenz des A selbst aussagt. Gerade deshalb ist der Zusatz „wenn A existiert" entbehrlich und der Satz bleibt auch ohne diesen Zusatz korrekt, wenn er es mit demselben ist. Denn wenn die Krümmungslinien nicht existieren, so ist es selbstverständlich, daß auch der betreffende Satz aufhört; und ebenso ist es mit dem Striktionsband.

Von diesen Ungenauigkeiten (soweit ich sie überhaupt als solche zugestehe) kann ich wohl behaupten, daß sie jeder gutwillige Leser, sobald sie ihm auffallen, leicht selbst beseitigen kann. Sie haben ausschließlich den Maßstab für die Bewertung meines Buches durch den Herrn Referenten abgegeben, aber ich kann mich damit trösten, daß nach solchem Maßstab sogar mancher berühmte Geometer unter den Nullpunkt der Wertungsskala herabgedrückt würde. In der Tat besteht der Rest des Berichtes in allgemein gehaltenen abfälligen Äußerungen schärfster Tonart, die mich in den Augen eines Lesers, der mein Buch selbst nicht kennt, etwa mit den Dreiteilern des Winkels oder den Erfindern des Perpetuum mobile auf gleiche Stufe stellen. Den nach Inhalt oder Methode neuen Gegenständen, die im zweiten Bande meiner Liniengeometrie vorkommen[1]), ist kein einziges Wort gewidmet. Das Neue in einem mathematischen Buche soll der Referent, selbst wenn er es für unwichtig hält, erwähnen, um dem Leser eine Vorstellung davon zu geben, was er gegenüber anderen Werken ähnlichen Inhalts vom Buche zu erwarten hat. Ich muß diese Art der Berichterstattung, welche die orientierende Hauptaufgabe eines Referates völlig ignoriert und sich darauf beschränkt, einige Stellen herauszugreifen und unter die Lupe zu nehmen, als kleinlich und ungerecht bezeichnen. Auch hätte ich erwartet, daß die Redaktion solche Besprechungen ablehnt, die ihren Zweck nicht erfüllen.[2])

Innsbruck. Konrad Zindler.

---

1) Vgl. hierüber meinen Bericht S. 185—213 dieses Bandes oder das Vorwort des Buches selbst.

2) Zu den letzten Worten bemerke ich Folgendes: 1) Sobald der Rezensent die Besprechung mit seinem vollen Namen zeichnet, übernimmt er allein die Ver-

Erwiderung.

Gegenüber Zindlers persönlichen Bemerkungen weise ich nur darauf hin, daß er (auch nach seiner eigenen jetzigen Darstellung) offenbar keinen Versuch gemacht hat, aus meiner Kritik seines ersten Bändchens Nutzen zu ziehen, wie er es hätte tun müssen, wenn er nicht bloß Verpflichtungen des Rezensenten fordern wollte, sondern auch Autorpflichten praktisch anerkännte.[1])

Allerdings hatte Herr Zindler alle Ursache, auch solche Dinge zu erklären, von denen vorher schon bei ihm „die Rede war", insbesondere auch im Falle der geraden Linie. Die Allgemeinverständlichkeit, von der er spricht, ist eine Illusion.

Seinen wirklich (in mehr als einer Hinsicht) typischen Musterlehrsatz „Die Krümmungslinien einer Fläche schneiden sich rechtwinklig", begründet Herr Zindler, indem er „sich auf den Standpunkt der strengsten Logik stellt". Er läßt nämlich die von ihm eben erst als unbestimmt bezeichneten und also jedenfalls (wie es auch ganz richtig ist) *existierenden* Krümmungslinien auf der Kugel durch eine Art von Taschenspielerstückchen mit einem Male auf Nimmerwiedersehen verschwinden, aufhören zu existieren. Sollte es wirklich so ganz unmöglich sein, mit einem Kunstgriff der Art auch der Trisektion des Winkels zu Leibe zu gehen?

Die von Zindler bekundeten Ansichten stellen geradezu den Charakter der Mathematik als einer exakten Wissenschaft in Frage. Nach ihm wird kein Lehrer es nötig haben, bei der Erklärung der Division der Null besonders zu gedenken, und wenn jemand alle Primzahlen ungerade sein läßt, so „wird der Schade nicht groß sein, da nur ein trivialer Fall unerwähnt (!) bleibt".

Ich begehe ein weiteres Verbrechen, indem ich aus Herrn Zindlers Replik noch ein paar Sätze „herausgreife" und „unter die Lupe nehme".

„Von diesen Ungenauigkeiten", heißt es, „kann ich wohl behaupten, daß sie jeder gutwillige Leser (eines Lehrbuches für Anfänger), *sobald sie ihm auffallen,* leicht selbst beseitigen kann". Namentlich bei Unklarheiten in den Grundbegriffen wird der Leser „in jedem einzelnen Falle leicht beurteilen können, inwieweit ein Begriff oder eine Formel . . . noch anwendbar bleibt. . . ."

Wenn aber der Leser noch gutwilliger ist, so gutwillig, daß er die Sache *nicht* merkt, *und das wird ja glücklicherweise in etwa achtundneunzig*

---

antwortung für Inhalt und Form seiner Kritik. 2) Der Herausgeber hat meines Erachtens nur für die Innehaltung der Grenzen des parlamentarischen Anstandes zu sorgen und jeden Schein der Parteilichkeit zu vermeiden, indem er dem Angegriffenen in üblicher Weise Gelegenheit zur Verteidigung darbietet. 3) Eine Norm für Besprechungen existiert nicht; auch kann dem Herausgeber nicht zugemutet werden, sich in die materielle Prüfung einer Kritik einzulassen, zumal wenn sie von einem Fachmanne unterzeichnet ist. 4) Im vorliegenden Falle war um so weniger Anlaß zur Abweisung vorhanden, als Herr Zindler selbst dem Herausgeber den Wunsch geäußert hatte, daß Herr Study die Besprechung übernehmen möchte.

Halle a. S., den 24. September 1906. A. Gutzmer.

1) Warum zum Beispiel hat Herr Zindler nicht wenigstens, in den Verbesserungen zu seinem ersten Bande, den dortigen Satz Nr. 199 richtig gestellt?

von hundert Fällen eintreten[1]), nun, dann ist natürlich erst recht kein Schaden angerichtet. Und wenn der von Herrn Zindler zu gründlichem Nachdenken und sorgfältiger Stilistik erzogene Leser selbst Autor wird und Referate oder Bücher schreibt *für gutwillige Leser*, so schadet auch das weiter nichts. Denn jeder von diesen Lesern wird Ungenauigkeiten, sobald sie ihm auffallen, leicht selbst beseitigen können. (Und so weiter, *ad infinitum*.)

Wie war es nur möglich, daß Herrn Zindler gerade die Leserklasse nicht in den Sinn gekommen ist, an die er vor allem hätte denken sollen?

E. Study.

Reformvorschläge für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Entworfen von der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte. II. Teil. Vorschläge, überreicht der 78. Naturforscher-Versammlung in Stuttgart 1906. Nebst einem allgemeinen Bericht über die Tätigkeit der Kommission im verflossenen Jahre herausgegeben von A. Gutzmer in Halle a. S. [IV u. 73 S.] gr. 8. Leipzig 1906, B. G. Teubner.

Die Sonderausgabe der „Reformvorschläge für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht" (B. G. Teubner, Leipzig 1905), in denen die der vorjährigen Naturforscher-Versammlung zu Meran unterbreiteten Berichte der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte zusammengefaßt sind, hat erfreulicherweise eine so große Verbreitung gefunden, daß die Auflage schon vergriffen ist. Die Kommission schöpft daraus die Zuversicht, daß das allgemeine Interesse sich auch der vorliegenden Schrift zuwenden werde. Diese enthält zunächst den allgemeinen Bericht über die Tätigkeit der Kommission im zweiten Jahre ihres Bestehens, den der Unterzeichnete in der ersten allgemeinen Sitzung der Naturforscher-Versammlung in Stuttgart erstattet hat; daran schließen sich drei Einzelberichte über den naturwissenschaftlichen und mathematischen Unterricht an den Reformschulen, den sechsklassigen Realschulen und den höheren Mädchenschulen, sowie zwei Berichte über einige allgemeine Fragen der Schulhygiene und über die sexuelle Aufklärung an höheren Unterrichtsanstalten. — Nicht nur an die Fachmänner wenden sich unsere Vorschläge und Anregungen, sondern an alle gebildeten Kreise unseres Volkes. Diese müssen sich der grundlegenden Bedeutung der Naturwissenschaften und der Mathematik für die Kultur der Gegenwart in viel höherem Grade bewußt werden als es zur Zeit der Fall ist; dann wird die angestrebte Reform des naturwissenschaftlichen und mathematischen Unterrichts als eine selbstverständliche Forderung erscheinen.

Halle a. S. A. Gutzmer.

Katalog der Handschriften von Leibniz. Das Manuskript zum 1. Bande des kritischen Katalogs der Handschriften Leibniz' wird in kurzem voraussichtlich fertig vorliegen. Der Katalog will erstens für den Historiker wie für den Philosophen ein zuverlässiger Wegweiser durch

---

1) Es darf vermutet werden, daß von den beiden übrigen Lesern noch einer gutwillig und einer böswillig ist.

Leibniz' Werke sein, genau verzeichnen, welche Werke gedruckt, welche ungedruckt handschriftlich vorhanden sind, wo und in welchem Zustande sich die Handschriften befinden. Dann aber soll er die Grundlage für die bereits 1901 im Prinzip beschlossene Gesamtausgabe der Werke Leibniz' bilden. Eine ganze Anzahl für die späteren Herausgeber wichtiger kritischer Vorfragen waren bereits bei der Herstellung des Katalogs zu beantworten. Für die Anordnung haben die Leibniz-Kommission der Pariser Akademie und die Preußische Akademie der Wissenschaften, die gemeinschaftlich das Werk ausführen, die Zeitfolge der Schriften zugrunde gelegt; eine Fülle von Problemen war bereits hier zu lösen, um undatierte Stücke, von Leibniz nach Unterbrechungen wieder aufgenommene Arbeiten, richtig einzuordnen. Auch die technischen Fragen der Katalogisierung boten manche Schwierigkeit.

G. W. Leibnizens nachgelassene Schriften physikalischen, mechanischen und technischen Inhalts. Herausgegeben von Dr. E. Gerland, Professor an der Kgl. Bergakademie zu Klausthal. (A. u. d. T.: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. XXI. Heft.) [VI u. 256 S.] gr. 8. Leipzig 1906, B. G. Teubner.

Das Buch bringt die nachgelassenen Schriften Leibnizens physikalischen, mechanischen und technischen Inhaltes, welche hier zum ersten Male veröffentlicht werden. Es sind teils Notizen, die Leibniz zur Unterstützung seines Gedächtnisses auf einzelne Blättchen machte, teils mehr oder weniger ausgeführte Abhandlungen, die wohl für eine spätere Veröffentlichung bestimmt waren. Auf die Aufnahme von Briefen des nämlichen Inhaltes, die in reicher Zahl noch vorhanden sind, mußte verzichtet werden. Die Mitteilungen sind in dreifacher Hinsicht von Interesse, einmal um ihres Inhaltes selbst willen, sodann wegen der Würdigung von Leibnizens wissenschaftlicher Tätigkeit und endlich in Hinsicht auf die Bedeutung, welche sie für die Geschichte der Physik und Technik haben. Als besonders wichtig sind hervorzuheben die akustischen Arbeiten, die Arbeiten über die Uhren, unter welchen der Vollständigkeit wegen zwei von Leibniz selbst bereits veröffentlichte Abhandlungen wieder abgedruckt sind, und die Arbeiten, welche die Wasserhebung zum Gegenstande haben. Vom Herausgeber zugefügte Anmerkungen suchen, soweit sie von Leibniz nicht angegeben worden ist, die Zeit der Abfassung zu bestimmen oder beabsichtigen die zum Verständnis nötigen Erklärungen beizubringen oder bezwecken endlich auf die Bedeutung für die Geschichte der Wissenschaft aufmerksam zu machen.

Klausthal. E. Gerland.

Projective Differential Geometry of Curves and ruled Surfaces. By **E. J. Wilczynski,** A. M., Ph. D., Research Associate of the Carnegie Institution of Washington, Assistant Professor of Mathematics at the University of California. (A. u. d. T.: B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Band XVIII.) [VIII u. 298 S.] gr. 8. Leipzig 1906, B. G. Teubner.

An der Hand von Monge, Gauß und deren Nachfolgern beschäftigte die Differentialgeometrie sich fast ausschließlich mit metrischen Eigenschaften.

Den wichtigsten Beitrag zu einer systemischen projektiven Differentialgeometrie bilden die Arbeiten Halphens über die Differentialinvarianten von ebenen und Raumkurven, sowie diejenigen des Verfassers über geradlinige Flächen. In dem vorliegenden Lehrbuch sind diese Untersuchungen in systematischer Weise gesammelt worden und werden dem Publikum nach einer neuen, einheitlichen Methode behandelt in ihrem gesamten Umfange dargeboten, so daß die projektive Differentialgeometrie hiermit zum ersten Male als selbständiges, in sich abgeschlossenes Wissensgebiet erscheint. Analytisch bildet die Invariantentheorie linearer Differentialgleichungen die Grundlage der projektiven Kurventheorie; daher folgt einer kurzen Skizze der Lieschen Theorie kontinuierlicher Gruppen eine eingehende Behandlung der Invarianten und Kovarianten linearer Differentialgleichungen. Die Verallgemeinerung dieser Invariantentheorie auf ein System von Differentialgleichungen führt zu der Theorie geradliniger Flächen. Die Haupteinteilung des Buches ergibt sich als natürliche Folge dieser Behandlungsweise.

Berkeley. E. J. Wilczynski.

Vorlesungen über Geometrie, unter besonderer Benutzung der Vorträge von Alfred Clebsch bearbeitet und herausgegeben von Dr. Ferdinand Lindemann, Professor an der Universität München. In 2 Bänden. I. Band: Geometrie der Ebene. I. Teil: Kegelschnitte und algebraische Formen. 2., vermehrte Auflage. 1. Lieferung. [480 S.] gr. 8. Leipzig 1906, B. G. Teubner.

Seit dem Erscheinen der ersten Auflage (1876) ist der Stoff so außerordentlich gewachsen, daß es geboten war, den ersten Band in drei Teile zu trennen. Diejenigen Abschnitte, welche unmittelbar nach den Vorlesungen von Clebsch ausgearbeitet waren, sind an einzelnen Stellen ergänzt, im wesentlichen aber unverändert geblieben. Die Theorie der Kegelschnitte, welche in großen Zügen die allgemeinen Gesichtspunkte, insbesondere für die algebraische Behandlung, festlegte, ist durch Ausführung einzelner besonderer Probleme erweitert. So sind die metrischen Eigenschaften der Kreise mehr berücksichtigt, die allgemeine Theorie projektivischer Beziehungen (auch in bezug auf Realitätsfragen) eingehender behandelt, die merkwürdigen Kegelschnitte am Viereck und Dreieck berücksichtigt; am Dreieck sind die zahlreichen Sätze über Kreise und merkwürdige Punkte zusammenfassend dargestellt, um einerseits den Zusammenhang mit gewissen Disziplinen der Elementargeometrie hervortreten zu lassen, andererseits die Anwendbarkeit der allgemeinen analytischen Methoden für besondere Aufgaben zu erläutern. — Am meisten bedurfte die Theorie der algebraischen Formen einer neuen Bearbeitung. Die von Clebsch bevorzugte symbolische Darstellung wurde beibehalten, und dementsprechend konnten die Abschnitte über binäre quadratische, kubische und biquadratische Formen, abgesehen von einzelnen Ergänzungen, unverändert bleiben. Darüber hinaus wurde eine Übersicht über die neueren Untersuchungen gegeben, wobei es darauf ankam, die hierbei vielfach angewandten nichtsymbolischen und nichthomogenen Methoden mit dem sonstigen Inhalte des Werkes in Übereinstimmung zu bringen, wofür sich in den Reihenentwicklungen von Clebsch und Gordan ein Mittel fand. Daneben ist die auch von Clebsch in seinem Werke über binäre Formen ausführlich behandelte typische Darstellung in den Mittelpunkt der Betrachtung gestellt;

aus ihr ergibt sich eine Methode zur Besprechung der partiellen Differentialgleichungen der Invarianten, zum Beweise der Endlichkeit des Formensystems und zur Bildung desselben unter Benutzung der erzeugenden Funktion von Cayley, zur Auflösung numerischer Gleichungen, endlich zur Behandlung einer Reihe von besonderen Formen höherer Ordnung. Die allgemeinen Formen fünfter und sechster Ordnung sind kurz besprochen; und auf Grund der Abhandlung von Clebsch über das ebene Fünfeck ist die Theorie der Polygone entwickelt, wodurch ein Zusammenhang mit den ternären Formen hergestellt wird, während einen solchen andererseits die Darstellung binärer Formen auf einem Kegelschnitte und die Transformationen eines Kegelschnittes in sich an die Hand geben. Hieran schließt sich eine Behandlung der endlichen Gruppen von solchen Transformationen; das zehnfach Brianchonsche Sechseck von Clebsch gibt dabei Veranlassung, auf die Theorie der Gleichungen fünften Grades einzugehen, wobei sich ergibt, daß die zu benutzende Modular- und die Multiplikator-Gleichung beide als besondere Fälle einer allgemeinen Gleichung sechsten Grades aufzufassen sind, was bei der bisherigen Behandlung durch ein unrichtig bestimmtes Vorzeichen in der betreffenden Gleichung verdeckt war. Aus der Theorie höherer Formen ist besonders die Herstellung kanonischer Formen und die Potenzdarstellung behandelt. — Die Theorie der ternären Formen beschränkt sich, wie bisher, auf eine Betrachtung der Kollineationen, der allgemeinen symbolischen Methoden und der Formen zweiter Ordnung, letztere jetzt vielfach erweitert. Endlich wird am Schlusse nochmals auf die Geometrie des Dreiecks eingegangen, um an ihm die Theorie der merkwürdigen Punkte durch Vermittelung der komplexen Ebene und der kubischen Formen zu studieren, nachdem schon früher ein Abschnitt über die von Staudtsche Imaginärtheorie eingeschaltet war. Eine eingehendere Behandlung der allgemeinen Theorie ternärer Formen bleibt für den zweiten Teil des ersten Bandes vorbehalten; es kam jetzt vor allem darauf an, diejenigen Probleme, welche in der ebenen Geometrie in den Vordergrund treten, im einfachen Falle der binären Formen durch ihre Analoga vorzubereiten und so spätere Aufgaben zu erleichtern, andererseits die Theorie der Kegelschnitte auch in algebraischem Sinne zu gewissem Abschlusse zu bringen.

München. F. Lindemann.

Serret-Scheffers. Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung von J. A. Serret. Nach Axel Harnacks Übersetzung. In 3 Bänden. 3. Auflage, neu bearbeitet von Dr. Georg Scheffers, Professor an der Technischen Hochschule zu Darmstadt. I. Band. Differentialrechnung. Mit 70 Figuren im Text. [XVI u. 624 S.] gr. 8. Leipzig 1906, B. G. Teubner.

Diese neue Auflage ist durchaus neu bearbeitet. Vor allem war es nötig, die an manchen Stellen bisher wenig scharfen Beweisführungen exakter zu gestalten. Deshalb wurde auch am Anfange eine knappe Darstellung der Entwicklung des Zahlbegriffes gegeben. Von den sonstigen inneren Änderungen im Gefüge des Werkes seien hier nur folgende erwähnt: Die Betrachtungen, die sich auf implizite gegebene Funktionen beziehen, wurden für sich in einem gesonderten Kapitel zusammengefaßt, da sie ja auf viel weitergehenden Voraussetzungen beruhen als die über entwickelte Funktionen.

Der Begriff der Unabhängigkeit von Funktionen und Gleichungen und die Funktionaldeterminante wurden dabei ausführlich erörtert. Die Theorie der Maxima und Minima erfuhr eine schärfere Beleuchtung. Bei den Anwendungen der Differentialrechnung auf Kurven und Flächen ließ die bisherige Bearbeitung fast durchaus die unumgänglich nötige exakte Bestimmung der Vorzeichen der auftretenden Quadratwurzeln vermissen. Hierin wurde gründlich Wandel geschafft. — Kaum etwas bezeugt die hohen Vorzüge des Serretschen Werkes so deutlich wie der Umstand, daß man bisher anstandlos die vielen sprachlichen Unbeholfenheiten des Buches hingenommen hat; das ganze Buch mußte in stilistischer Beziehung gründlich durchkorrigiert werden. Ferner wurden die Lehrsätze besonders formuliert. Das Figurenmaterial war bisher so minderwertig, daß es selbstverständlich vollständig neu hergestellt werden mußte. — Es gelang, den alten Umfang des Buches einzuhalten, auch weicht die Numerierung der einzelnen Artikel im großen Ganzen nur wenig von der bisherigen ab.

Darmstadt. G. Scheffers

Durège-Maurer. Elemente der Theorie der Funktionen einer komplexen veränderlichen Größe. Von Dr. H. Durège, weil. Professor an der Universität Prag. 5. Auflage, neubearbeitet von Dr. L. Maurer, Professor an der Universität Tübingen. Mit 41 Figuren im Text. [X u. 397 S.] gr. 8. Leipzig 1906, B. G. Teubner.

Durèges Buch ist unter dem mächtigen Eindruck von Riemanns grundlegenden Publikationen entstanden. Sein ausschließlicher Zweck war, die neuen Ideen weiteren Kreisen zugänglich zu machen. Daß es einem Bedürfnis entgegengekommen ist, dafür spricht die weite Verbreitung, die es gefunden hat. Bei der Neubearbeitung des Stoffes ist an der Tendenz des Durègeschen Werkes festgehalten worden, es verfolgt den Zweck, den Leser in die Riemannsche Anschauung einzuführen, und es setzt an Vorkenntnissen nicht mehr voraus, als in den üblichen Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung gegeben zu werden pflegt. — In diesen Vorlesungen werden in der Regel die auf reelle Variable und ihre Funktionen bezüglichen Begriffsbestimmungen aus pädagogischen Gründen nicht in ihrer ganzen Schärfe vorgetragen, und wenn dies geschieht, so finden sie auf dieser Stufe des Unterrichts noch kein volles Verständnis. Deswegen sind diese Begriffsbestimmungen, soweit sie für die Begründung der Funktionentheorie erforderlich schienen, in einem einleitenden Kapitel zusammengestellt. — Durège hat in seinem Werk die Integrale algebraischer Funktionen ausführlich behandelt, ohne doch bis zur Riemannschen Thetafunktion vorzudringen. Es schien nicht zweckmäßig, ihm auf diesen Weg zu folgen. Zwar sind die wesentlichsten Sätze aus der Theorie der algebraischen Funktionen entwickelt und die Konstruktion der Riemannschen Flächen eingehend besprochen, aber auf die Theorie der Integrale algebraischer Funktionen ist nicht eingegangen. Der Verfasser hat sich darauf beschränkt, durch ein ausführlich behandeltes Beispiel einen Einblick in dies weite Gebiet zu eröffnen. Dagegen ist der Theorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung ein umfangreicher Abschnitt gewidmet. Dafür sprachen mehrere Gründe: abgesehen davon, daß diese Theorie an und für sich ein großes Interesse bietet, ist sie besonders geeignet, die allgemeinen funktionentheoretischen

Prinzipien zu erläutern; dazu kommt, daß sie den naturgemäßen Zugang zu der Theorie der automorphen Funktionen eröffnet, die zurzeit im Vordergrund des Interesses steht. L. M.

Emanuel Czuber, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. In 2 Bänden. II. Band. 2., sorgfältig durchgesehene Auflage. Mit 87 Figuren im Text. [VIII u. 528 S.] gr. 8. Leipzig 1906, B. G. Teubner.

Um den mannigfachen Anforderungen der angewandten Gebiete gerecht zu werden, sind an dem zweiten Bande mehrfache Erweiterungen des Inhalts vorgenommen worden. Als Abschluß der Theorie der bestimmten Integrale haben die Eulerschen Integrale und die Fourierschen Reihen Aufnahme gefunden. An geometrisch-mechanischen Anwendungen sind Massen-, Moment- und Schwerpunktsbestimmungen und aus Rücksicht auf die Elektrotechnik die Sätze von Green neu hinzugefügt. Der Paragraph über das Potential ist umgearbeitet und dabei allgemeiner gestaltet worden. Die Theorie der partiellen Differentialgleichungen ist weitergeführt, indem nun auch die Theorie der Gleichungen von Ampère und Monge einbezogen erscheint. — Außer diesen tiefer greifenden Änderungen des Inhalts hat der Band ebenso sorgfältige Revision erfahren wie der erste; durch die Einschaltung historisch-literarischer Daten und die Aufnahme zahlreicher, der Selbstbearbeitung vorbehaltener Aufgaben dürfte er an Verwendbarkeit gewonnen haben.

Wien. E. Czuber.

Die philosophischen Grundlagen der Wissenschaften. Vorlesungen gehalten an der Universität Berlin von Professor Dr. B. Weinstein. [XIV u. 544 S.] 8. Leipzig 1906, B. G. Teubner.

Das Buch enthält eine Auseinandersetzung über die Grundlagen der Wissenschaften. Vornehmlich sind die Naturwissenschaften berücksichtigt, es kommen jedoch auch andere Wissenschaften zur Sprache, und auch die Kunst ist nicht ausgeschlossen. Es wird zunächst der Inhalt der Grundlagen untersucht und aus ihm ein System der Grundlagen abgeleitet. Darauf folgt eine Darlegung der psychischen Tätigkeiten, welche für die Ermittelung der Grundlagen maßgebend sind. Nach Beschreibung der Art, wie bei Gewinnung von Grundlagen vorgegangen wird, folgt eine Auseinandersetzung der Beziehungen unserer Wahrnehmungen zur Außen- und Innenwelt, wobei insbesondere physiologische und psychologische Verhältnisse zur Sprache kommen. Hierauf werden die Hauptgrundlagen vom Standpunkte der Erfahrung und der Metaphysik einer genaueren Zergliederung und Untersuchung unterzogen. Insbesondere werden die Begriffe der Zeitlichkeit, Räumlichkeit, Substanzialität und Ursächlichkeit behandelt, und im Anschluß an diese wird das Wesen von Zeit, Raum, Substanz und Ursache dargelegt. Den Schluß bildet die Behandlung derjenigen Grundlagen, die der Welterhaltung und Weltentwicklung dienen, sowie der Grundlagen, aus denen Erklärungen der Natur- und Lebenserscheinungen fließen. Trotz strenger Wissenschaftlichkeit ist das Buch gemeinverständlich geschrieben, alle philosophischen Auseinandersetzungen sind durch Beispiele erläutert, und überall, wo eingehenderes Wissen erforderlich war, ist dieses zur Mitteilung gelangt. Großer Wert ist auf beste Sprache gelegt, der Stil lehnt sich an den eines lebhaften Vortrages an. In der Tat hat der Verfasser über den Gegenstand mehrere

Jahre hindurch an der Berliner Universität Vorlesungen gehalten. Das Buch ist für die weitesten Kreise bestimmt, wenngleich es sehr vieles Eigengegebene enthält. Es soll dem Gebildeten eine tiefere Einsicht in das Wesen der Wissenschaften und in den Wert der Wissenschaften verschaffen.

Berlin. B. Weinstein.

A. E. H. Love, Professor an der Universität Oxford, **Lehrbuch der Elastizität.** Deutsche autorisierte Ausgabe unter Mitwirkung des Verfassers besorgt von Dr. A. Timpe in Danzig-Langfuhr. Mit zahlreichen Textfiguren. [XVI u. 665 S.] gr. 8. Leipzig 1906, B. G. Teubner.

Der Lovesche „Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity" hat sich der präzisen und klaren Darstellungsweise und des erschöpfenden Inhalts wegen auch in deutschen Mathematiker-, Physiker- und Ingenieurkreisen wohl eingebürgert. Eine deutsche Übersetzung der eben jetzt erschienenen zweiten Auflage des englischen Werks dürfte daher von vornherein auf die Sympathien vieler rechnen, um so mehr als wir, von den inzwischen veralteten klassischen Darstellungen der Elastizitätstheorie abgesehen, bisher kein umfassendes Lehrbuch der Elastizität in Deutschland besitzen. Der *Charakter* des Buches ist derselbe geblieben, wie ihn der Verfasser in dem Vorwort zur 1. Auflage gekennzeichnet hat: ein vollständiger Abriß des gegenwärtigen Standes der Elastizitätstheorie, der in gleicher Weise auf die Behandlung der auftretenden mathematischen Probleme wie auf die unmittelbar für die praktischen Anwendungen fruchtbaren Untersuchungen eingeht. Dabei sind weitschweifige analytische Entwicklungen und Ausführungen von ausschließlich abstrakt-mathematischem Interesse, in denen sich die Elastiker der italienischen Schule zuweilen verlieren, ebensosehr vermieden wie technische Einzelheiten. Was die *Anlage* des Buches anbetrifft, so sind durch den im letzten Dezennium gewaltig angeschwollenen Stoff einschneidende Änderungen gegenüber der ersten Auflage nötig gewesen. Überall sind, soweit irgend möglich, noch die neuesten einschlägigen Arbeiten mit berücksichtigt, wie auch aus der Fülle von Literaturnachweisen hervorgeht. — Die deutsche Ausgabe erstrebt in der Ausdrucksweise und speziell in der Terminologie eine möglichst getreue Wiedergabe der Eigenart des Originals.

Danzig-Langfuhr. A. Timpe.

Fr. Reidt, Anleitung zum mathematischen Unterricht an höheren Schulen. Zweite Auflage. Revidiert und mit Anmerkungen versehen von Heinrich Schotten. G. Grote'sche Verlagsbuchhandlung. Berlin 1906.

Die neue Auflage erscheint in einem glücklicheren Zeitpunkte als die vor 20 Jahren veröffentlichte erste Auflage; denn die Gegenwart ist mit ihren Reformbestrebungen auf dem Gebiete des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts Werken von der Richtung des vorliegenden zweifellos sehr günstig. So darf man wohl mit Bestimmtheit hoffen, daß die von Herrn Schotten revidierte und mit teils ergänzenden, teils den heutigen Auffassungen Rechnung tragenden Anmerkungen versehene zweite Auflage in einem viel kürzeren Zeitraume einen Neudruck oder eine Neubearbeitung erforderlich machen wird.

---

2. Bücherschau.

Ahrens, R., Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate und ihre spezielle Anwendung auf die Geodäsie, nebst einem Anhang von Beispielen. IV, 102 S. mit 13 Figuren. Leipzig 1906. ℳ 2.—.

Brügmann, W., Über eine reell irreduzible Gruppe von Bewegungstransformationen. 35 S. Greifswald 1906.

Cordier, J., Über eine Gruppe von 96 Kollineationen und Korrelationen. 39 S. m. 2 Taf. Straßburg 1906.

Ebner, F., Leitfaden der technisch wichtigen Kurven. VIII, 197 S. mit 93 Figuren. Leipzig 1906. ℳ 4.—.

Enriques, F., Problemi della scienza. 593 p. Bologna. L. 10.—.

Hess, A., Stetige Abbildung einer Linie auf ein Quadrat. Dissert. 45 S. mit 5 Tafeln. Zürich 1906.

Jouffret, E., Mélanges de géométrie à quatre dimensions. Paris 1906. Frs. 7.50.

Kiefer, C. L., Über Strahlenkongruenzen zweiter Klasse, fünfter und niedriger Ordnung. 40 S. Straßburg 1905.

Koerber, F., Transformator für sphärische Koordinaten. Berlin 1906. ℳ 1.50.

Lebesgue, H., Leçons sur les séries trigonométriques. Paris 1906. Frs. 3.50.

Lorentz, H. A., Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern. Unveränderter Abdruck der 1895 erschienenen 1. Auflage. III, 139 S. Leipzig 1906. ℳ 3.20.

Meyer, P., Beweis eines von Euler entdeckten Satzes betreffend die Bestimmung von Primzahlen. 29 S. Straßburg 1905. ℳ 1.50.

Pesloüan, L. de, N.-H. Abel. Sa vie et son œuvre. Paris 1906. Frs. 5.—.

Petrovitsch, M., La mécanique des phénomènes fouillie sur les analogies. Collection Scientia. Paris 1906. Frs. 2.—.

Piel, C., Über die Kegelschnitte, welche durch 3 Punkte und 2 Tangenten oder durch 2 Punkte und 3 Tangenten bestimmt sind, und die Kegelschnittsysteme. 73 S. Straßburg 1905. ℳ 2.—.

Pincherle, S., Lezioni di algebra complementare dettate nella R. Università di Bologna. Analisi algebrica. 366 S. Bologna 1906.

Rose, E., Die Axiome der projektiven Geometrie linearer Mannigfaltigkeiten. 58 S. Straßburg 1906.

Sachse, J. J., Zur mechanischen Drittelung eines Winkels und die planimetrische Bestimmung eines Grades der Kreislinie. 39 S. mit 2 Tafeln. Heiligenstadt 1906. ℳ 2.—.

Schwarzlose, R., Über eine geometrische Beziehung der Fresnelschen Wellenfläche zum dreiachsigen Ellipsoid. Dissert. 56 S. Rostock 1906.

Senftner, G., Ein mechanisches Problem aus der Variationsrechnung. Dissert. 32 S. Rostock 1906.

Servais, C., Cours de géométrie analytique de la Faculté des sciences. 2 vol. 4°. Autographie. Gand 1906. Frs. 13.—.

Steingräber, W., Über partielle Differentialgleichungen erster Ordnung im R_4. Dissert. 46 S. Greifswald 1906.

Vivanti, G., Elementi della teoria delle funzioni poliedriche e modulari. VIII, 438 S. Milano 1906.

Wend, O., Cayleysche Lösung mathematischer Elementaraufgaben. 42 S. Chemnitz 1906. ℳ 1.80.

Zehme, Eigenschaften des Krümmungsschwerpunktes ebener Kurven. 18 S. Arnstadt 1906. ℳ 1.20.

3. Zeitschriftenschau.

(Von dem Inhalt der Zeitschriften werden nur die Aufsätze erwähnt, welche dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften angehören.)

Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 131. Heft IV.

Knoblauch, Die Biegungs-Invarianten und Kovarianten von gegebener Ordnung. Bauer, Über die arithmetische Reihe. Bohl, Über die Differentialgleichung der Störungstheorie.

Zeitschrift für Mathematik und Physik. 53. Band. 4. Heft.

Riebesell, Über die Kommutation des Stromes in Gleichstromgeneratoren. Horn, Weitere Beiträge zur Theorie der kleinen Schwingungen. Delaunay, Graphische Berechnung der elliptischen Funktionen, mit einigen Anwendungen. Biske, Réflexion de la lumière sur l'eau ébranlée. Biermann, Über die dichteste Lagerung gleicher Kreise in einem Kreise. Gans, Das Potential einer leitenden Kreisscheibe. Kleinere Mitteilungen. Bücherschau.

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. 37. Jahrgang. 5. Heft.

Pfaff, Geometrische Örter als Übungsstoff für die Prima. Tafelmacher, Über einen geometrischen Ort und eine neue Art von Dreieckskoordinaten. Schreiner, Über die Schwingungen eines Stabes mit bifilarer Aufhängung. Rogel, Direkte Bestimmung der gemeinsamen Tangenten zweier Kegelschnitte mit einem gemeinsamen Brennpunkt. Aufgabenrepertorium. Literarische Berichte. Pädagogische Zeitung.

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. 37. Jahrgang. 6. Heft.

Reformvorschläge für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Entworfen von der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte. Zweiter Teil. Vorschläge überreicht der 78. Naturforscher-Versammlung in Stuttgart 1906.

Bibliotheca Mathematica. 3. Folge. 7. Band. 1. Heft.

Eneström, Die Geschichte der Mathematik als Bestandteil der Geschichte der Wissenschaften. Vogt, Haben die alten Inder den Pythagoräischen Lehrsatz und das Irrationale gekannt? Eneström, Hat Tartaglia seine Lösung der kubischen Gleichung von Del Ferro entlehnt? Bosmans, Le „De arte magna“ de Guillaume Gosselin. Loria, Per la preistoria della teoria delle trasformazioni di contatto. Landau, Euler und die Funktionalgleichung der Riemannschen Zetafunktion. Eneström, Bosmans, Kleine Bemerkungen zur zweiten Auflage von Cantors Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Anfragen.

Nouvelles Annales de Mathématiques. 4. Série. Tome VI. Avril 1906.

Fontené, Sur une surface du troisième ordre qui est l'analogie du cercle des neuf points. Bricard, Sur la géométrie de direction. Chapelon, Sur la surface lieu des centres de courbure des courbes d'une surface passant par un point de cette surface. Bibliographie. Questions.

Nouvelles Annales de Mathématiques. 4e Série. Tome VI. Mai 1906.

Dunoyer, Sur les courbes de poursuite d'un cercle. Gérardin, Contribution à l'étude de l'équation $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots z + 1 = y^2$. Mannheim, Démonstration de la construction trouvée par Hamilton pour déterminer le point où le cercle des neuf points d'un triangle touche le cercle inscrit. Mannheim, Note à propos de la question 1960. Laurent, Sur les substitutions linéaires qui laissent une forme quadratique invariante. Guitton, Démonstration de la formule $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$. Solutions de questions proposées.

Nouvelles Annales de Mathématiques. 4^me^ Série. Tome VI. Juin 1906.

Pernot et Moisson, Etude des points à l'infini d'une courbe algébrique. Laurent, Sur un théorème de Chasles et d'Abel. du Plessis, Concours d'admission à l'Ecole Polytechnique en 1906. Bibliographie. Correspondance.

Nouvelles Annales de Mathématiques. 4^me^ Série. Tome VI. Juillet 1906.

Méray, Construction de la surface du second ordre déterminée par neuf points ou neuf plans tangents. Padé, Sur la propriété de concavité de l'herpolhodie de Poinsot. Lattès, Sur les courbes invariantes par polaires réciproques. Concours d'admission à l'Ecole Polytechnique en 1906.

L'Enseignement Mathématique. VIII. Année. No. 4.

Andrade, Les fonctions angulaires dans la géométrie de l'ajustage. Stuyvaert, Conséquences diverses d'une formule d'algèbre; leurs interprétations géométriques. Bertrand, Démonstration de la formule de Coriolis. Enquête sur la méthode de travail des mathématiciens; les résultats. Mélanges et correspondance. Chronique. Notes et documents.

L'Enseignement Mathématique. VIII^e^ Année. Nr. 5.

Appell, L'enseignement scientifique à l'Université de Paris. Aubry, Etude élémentaire des fonctions hyperboliques. Cahen, Exemple simple d'une fontion continue n'ayant pas de dérivée. Alliaume, Démonstration synthétique de deux théorèmes de Carnoy. Godeaux, Sur la géométrographie des courbes planes. Richard, Exposition de la méthode de Laplace pour déterminer les orbites des planètes et des comètes. Fehr, Gabriel Oltramare, 1816—1906. Loria, Enquête sur la méthode de travail des mathématiciens; à propos des questions 6 à 9. Mélanges.

Annals of Mathematics. Second Series. Vol. 7. Nr. 4.

Curtiss, A proof of the theorem concerning artificial singularities. Bôcher, Another proof of the theorem concerning artificial singularities. Mason, Curves of minimum moment of inertia with respect to a point. White, Triangles and quadrilaterals inscribed to a cubic and circumscribed to a conic. Hedrick, On a function which occurs in the law of the mean.

Proceedings of the London Mathematical Society. Series 2. Vol. 4. Part. 2.

Rogers, On the representation of certain asymptotic series as convergent continuons fractions. — Bateman, The theory of integral equations. — Baker, On the monogeneity of a function defined by an algebraic equation. — Brill, On the expression of the so-called biquaternions and triquaternions with the aid of quaternary matrices. — Baker, Remark of the Eisenstein-Sylvester extension of Fermat's theorem. — Hobson, On absolutely convergent improper double integrals. — Dixon and Stuart, On the reduction of the ternary quintic and septimic to their canonical forms.

Proceedings of the London Mathematical Society. Series 2. Vol. 4. Part 3.

Dixon and Stuart, On the reduction of the ternary quintic and septimic to their canonical forms. Rogers, On function sum theorems connected with the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$. Lamb, On Sommerfeld's diffraction problem; and on reflection by a parabolic mirror. Bromwich, Investigations on series of zonal harmonics. Dixon, The canonical forms of the ternary sextic and quaternary quartic. Elliott, On perpetuants and contra-perpetuants.

Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Vol. XXVI. No. III.

Peddie, On vibrating systems which are not subject to the Boltzmann-Maxwell law. White and Watson, Some experimental results in connection with the hydrodynamical theory of seiches. Oliver, The relation between normal take-up or contraction and degree of twist in twisted threads.

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. XII. Nr. 10.

Johnson, Note on the transcendents S_n and $s_n = S_n - 1$. Curtiss, On certain properties of Wronskians and related matrices. Shaw, Significance of the term hypercomplex number. White, How should the College teach analytic geometry? Slaught, Four books on the calculus. Notes.

Transactions of the American Mathematical Society. Vol. 7. Nr. 3.

Mason, On the boundary value problems of linear ordinary differentail equations of second order. Haskell, The resolution of any collineation into perspective reflections. Dickson, Linear algebras in which division is always uniquely possible. Wright, Correspondences and the theory of groups. Kasner, The trajectories of dynamics. Morris, On the automorphic functions of the group $(0, 3; l_1, l_2, l_3)$. Richardson, Improper multiple integrals.

Annali di Matematica pura ed applicata. Serie III. Tomo XIII. Fascicolo 1—2.

Lattès, Sur les équations fonctionnelles qui définissent une courbe ou une surface invariante par une transformation. Tognoli, Sulle forme differenziali a variabili alcune dipendenti altra indipendenti.

Atti della Accademia Gioenia de Scienze Naturali in Catania. Anno LXXXII. 1905. Serie Quarta. Volume XVIII.

Fubini: Su alcune nuove applicazioni dei metodi di Picard e di Riemann alla teoria delle equazioni alle derivate parziali. — Pennacchietti: Intorno a problemi di meccanica riducibili a quadrature. — D'Amico: Sulla varietà quartica con tre piani semplici dello spazio a quattro dimensioni.

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Tomo XXI. Fasc. III. 1906.

Boggio, Risoluzione del problema dei valori al contorno per alcune classe di equazioni alle derivate parziali. Aguglia, Sulla superficie luogo dei contatti stazionari delle superficie di un fascio con quelle di un sistema lineare ∞^3. Appell, Remarque relative à un mémoire de M. Lucio Silla "Sopra alcune quistioni di statica". Orlando, Sull' integrazione della Δ_4 in un parallelepipedo rettangolo. Orlando, Un' applicazione analitica di un teorema di Fourier. Ciani, Sopra la configurazione del pentaedro. Orlando, Sull' integrazione della Δ_2 in un campo chiuso e convesso. Study, Sugli enti analitici. Peano, Super teorema di Cantor-Bernstein. Rados, Rapport sur le prix Bolyai, présenté à l'Académie Hongroise des sciences. Guccia, Sopra una nuova espressione dell' ordine e della classe di una curva gobba algebrica.

4. Kataloge.

(Vacat.)

5. Bei der Redaktion eingegangene Schriften.

[Titel, Preis usw. der eingesandten Schriften werden hier regelmäßig veröffentlicht. Besprechungen geeigneter Bücher bleiben vorbehalten. Eine Rücksendung der eingegangenen Schriften kann nicht erfolgen.]

A. Adler, Theorie der geometrischen Konstruktionen. Mit 177 Figuren. Göschensche Verlagshandlung, Leipzig 1906.

E. Blaschke, Vorlesungen über mathematische Statistik. (Die Lehre von den statistischen Maßzahlen.) Mit 17 Textfiguren und 5 Tafeln. B. G. Teubner, Leipzig 1906.

T. J. I'A. Bromwich, Quadratic forms and their classification by means of invariant factors. VIII, 100 S. Cambridge University Press. 1906.

E. Czuber, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. In 2 Bänden. 2. Auflage. II. Band. Mit 87 Figuren im Text. B. G. Teubner, Leipzig 1906. geb. ℳ 12.—.

P. Drude, Lehrbuch der Optik. Mit 110 Abbildungen. Zweite erweiterte Auflage. XVI, 538 S. S. Hirzel, Leipzig 1906.

H. Durège, Elemente der Theorie der Funktionen einer komplexen veränderlichen Größe. In 5. Auflage neu bearbeitet von L. Maurer. Mit 41 Figuren im Text. B. G. Teubner, Leipzig 1906. geh. ℳ 9.—, geb. ℳ 10.—.

Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Band III 2. Heft 3. [Inhalt: H. G. Zeuthen, Abzählende Methoden. L. Berzolari, Allgemeine Theorie der höheren ebenen algebraischen Kurven.] B. G. Teubner, Leipzig 1906. ℳ 5.60.

E. Geyger, Lehrbuch der darstellenden Geometrie für den Gebrauch an technischen Hochschulen, mittleren gewerblichen und technischen Lehranstalten, Kunstgewerbeschulen, Fortbildungsschulen usw. und für das Selbststudium. I. Teil. Mit zahlreichen angewandten Beispielen und 290 Figuren. Göschensche Verlagshandlung, Leipzig 1906.

A. Gleichen, Leitfaden der praktischen Optik. Mit 158 Abbildungen. S. Hirzel, Leipzig 1906.

E. Horn, Verzeichnis der an den höheren Lehranstalten Preußens eingeführten Schulbücher. 2. Ausgabe. B. G. Teubner, Leipzig 1906. geh. ℳ 2.—, geb. ℳ 2.60.

F. Junker, Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung. 2. verbesserte Auflage. Mit 50 Figuren im Text. Sammlung Göschen Nr. 147. G. J. Göschen, Leipzig 1906.

A. Kienast, Über die Darstellung der analytischen Funktionen durch Reihen, die nach Potenzen eines Polynoms fortschweifen und Polynome eines niederen Grades zu Koeffizienten haben. Dissertation. Zürich 1906.

H. Kistler, Über Funktionen von mehreren komplexen Veränderlichen. Dissertation. Göttingen 1906.

W. Lehnen, Teilung eines jeden gegebenen Winkels in den Primzahlen 3, 5, 7, 11, 13, usw. entsprechende gleiche Teile. 2 S. B. G. Teubner, Leipzig 1906.

H. A. Lorentz, Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern. B. G. Teubner, Leipzig 1906.

F. Mathé, Karl Friedrich Gauß. 32 S. Wilhelm Weicher, Leipzig 1906.

F. J. Müller, Abbildung eines Sphäroidstreifens auf die Ebene. 27 S. Würzburg 1906.

S. Oppenheim, Das astronomische Weltbild im Wandel der Zeit. Mit 24 Abbildungen im Text. B. G. Teubner, Leipzig 1906.

G. Petit Bois, Tafeln unbestimmter Integrale. B. G. Teubner, Leipzig 1906.

F. Pietzker, Lehrgang der Elementar-Mathematik in zwei Stufen. I. Teil. Lehrgang der Unterstufe. Mit 207 Textfiguren. B. G. Teubner, Leipzig 1906. geb. ℳ 3.20.

K. Remus, Der dynamologische Lehrgang. Versuch einer geschlossenen Naturkunde. Mit 36 Textabbildungen. X, 132 S. B. G. Teubner, Leipzig 1906. ℳ 2.60.

H. Schubert, Auslese aus meiner Unterrichts- und Vorlesungspraxis. Dritter Band. Mit 18 Figuren. Göschensche Verlagshandlung, Leipzig 1906.

Serret-Scheffers, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. In 3 Bänden. I. Band: Differentialrechnung. 3. Auflage, neubearbeitet von G. Scheffers. Mit 70 Figuren im Text. B. G. Teubner, Leipzig 1906. geh. ℳ 12.—, geb. ℳ 13.—.

H. Thieme, Leitfaden der Mathematik für Realanstalten. Erster Teil: Die Unterstufe. Mit 122 Figuren. Dritte Auflage. 128 S. G. Freytag, Leipzig 1907.

G. Vivanti, Elementi della teoria delle funzioni poliedriche e modulari. VIII, 417 S. U. Hoepli, Milano 1906.

W. H. Young and Grace Chisholm Young, The theory of sets of points. XII, 316 S. Cambridge University Press, London 1906.

Nielsen, Dr. **Niels,** Dozent der reinen Mathematik an der Universität Kopenhag Inspektor des mathematischen Unterrichts an den Gymnasien Dänem Handbuch der Theorie der Gammafunktion. [X u. 326 S.] gr. 8. 190 In Leinw. geb. n. *M.* 12.—

Osgood, Dr. **W. F.,** Professor an der Harvard-Universität, Cambridge, Mass., V. St. A., Lehrbuch der Funktionentheorie. In 2 Bänden. I. Band. 1. Hälfte Mit zahlreichen Figuren im Text. [306 S.] gr. 8. 1906. geh. n. *M.* 7.—

[Die 2. Hälfte des I. Bandes wird im Herbst 1906 erscheinen.]

Serret-Scheffers, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung 3 Bände. gr. 8. [Von der 3. Auflage an hat Professor Dr. G. Scheffers in Darmstadt die Neubearbeitung übernommen.]

I. Band: Differentialrechnung. 3. Auflage, neu bearbeitet von Dr. G. Scheffers, Professor an der Technischen Hochschule zu Darmstadt Mit 70 Figuren im Text. [XVI u. 624 S.] 1906. geh. n. *M.* 12.—, in Leinw. geb. n. *M.* 13.—

II. Band: Integralrechnung. 2., durchgesehene Auflage, mit Unterstützung von H. Liebmann und E. Zermelo, herausgegeben von Dr. G. Bohlmann, Professor in Berlin. [XII u. 428 S.] 1899. geh. n. *M.* 8.—, in Leinw. geb. n. *M.* 9.—

III. Band: Differentialgleichungen und Variationsrechnung. 2., durchgesehene Auflage von Dr. G. Bohlmann, Professor in Berlin, und E. Zermelo, Professor an der Universität Göttingen. Mit 33 Fig. im Text. [XII u. 480 S.] 1904. geh. n. *M.* 9.—, in Leinw. geb. n. *M.* 10.—

Simon, Dr. **Max,** Professor an der Universität Straßburg i. E., über die Entwicklung der Elementar-Geometrie im XIX. Jahrhundert. Bericht erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. (A. u. d. T.: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Ergänzungsband I.) Mit 28 Figuren im Text [VIII u. 278 S.] gr. 8. 1906. geh. n. *M.* 8.—, in Leinwand geb. n. *M.* 9.—

——— Methodik der elementaren Arithmetik in Verbindung mit algebraischer Analysis. Mit 9 Textfiguren. [VI u. 108 S.] gr. 8. 1906 geb. n. *M.* 3.20.

Stolz, Dr. **Otto,** weil. Professor an der Universität Innsbruck, und Dr. **J. Anton Gmeiner** Professor an der deutschen Universität Prag, Einleitung in die Funktionentheorie. Zweite, umgearbeitete und vermehrte Auflage der von den Verfassern in der „Theoretischen Arithmetik" nicht berücksichtigten Abschnitte der „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik" von O. Stolz. Mit 21 Figuren im Text [X u. 598 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. *M.* 15.—

Thomae, Dr. **J.,** Professor an der Universität Jena, Sammlung von Formeln und Sätzen aus dem Gebiete der elliptischen Funktionen nebst Anwendungen. [IV u. 44 S.] 4. 1905. kart. n. *M.* 2.80.

——— Grundriß einer analytischen Geometrie der Ebene. Mit 8 Figuren im Text. [X u. 183 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. *M.* 3.60.

Thomson, J. J., D. Sc. Lld. Ph. D. Er. S. Fellow etc., Elektrizitäts-Durchgang in Gasen. Deutsche autor. Ausgabe unter Mitwirkung des Autors besorgt und ergänzt von Dr. E. Marx, Privatdozent an der Universität Leipzig. Mit 187 Figuren im Text. [VII u. 587 S.] gr. 8. 1906. geh. n. *M.* 18.—, in Leinw. geb. n. *M.* 19.—

Vivanti, G., Professor an der Universität Messina, Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen. Umarbeitung unter Mitwirkung des Verfassers deutsch hrsg. von Dr. A. Gutzmer, Professor an der Universität Halle a. S. [VI u. 512 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. *M.* 12.—

Weber, Dr. **H.,** und Dr. **J. Wellstein,** Professoren in Straßburg, Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer u. Studierende. In 3 Bänden gr. 8. I. Band. Elementare Algebra und Analysis. Bearbeitet von H. Weber. 2. Auflage. Mit 38 Textfiguren. [XVIII u. 539 S.] 1906. In Leinw. geb. n. *M.* 9.— II. Band. Elemente der Geometrie. Bearbeitet von H. Weber, J. Wellstein und W. Jacobsthal. Mit 280 Textfiguren. [XII u. 604 S.] 1905. In Leinw. geb. n. *M.* 12.— (Bd. III.. Anwendungen der Elementar-Mathematik. U. d. Pr.)

Wilczynski, E. J., A. M., Ph. D., Research Associate of the Carnegie Institution of Washington, Assistant Professor of Mathematics at the University of California, projektive differential geometry of curves and ruled surfaces. [VIII u. 298 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. *M.* 10.—

JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN
MATHEMATIKER-VEREINIGUNG

IN MONATSHEFTEN HERAUSGEGEBEN VON

A. GUTZMER
IN HALLE A. S.

15. BAND. 12. HEFT. DEZEMBER.

MIT 4 FIGUREN IM TEXT

AUSGEGEBEN AM 20. DEZEMBER 1906.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1906.

☛ Das nächste Heft wird im Januar 1907 ausgegeben werden.

JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG.

IN MONATSHEFTEN HERAUSGEGEBEN VON A. GUTZMER IN HALLE A. S.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Bücher usw.) sind an

Prof. Dr. A. Gutzmer in Halle a. S., Martinsberg 8,

zu richten.

Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich: von größeren Aufsätzen 25 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen und Mitteilungen 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

Jeder Band des Jahresberichts in Monatsheften umfaßt vom 12. Bande ab 38 Bogen (= 608 Druckseiten) und kostet für Mitglieder der Vereinigung, Porto inbegriffen, Mark 14.70, für Nichtmitglieder Mark 18.—. Mitglieder haben ihr Abonnement bei der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig, Poststraße 3, aufzugeben, Nichtmitglieder dagegen bei einer Sortimentsbuchhandlung.

Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung zählt z. Zt. über 660 Mitglieder. Der jährliche Mitgliedsbeitrag beträgt 2 Mark, kann aber auch durch einmalige Zahlung von 30 Mark abgelöst werden. Beitrittserklärungen nimmt der Schriftführer der Vereinigung, Prof. Dr. A. Krazer, Karlsruhe in Baden, Westendstraße 57, oder die oben genannte Verlagsbuchhandlung entgegen. Die Ablösungssumme bezw. der Jahresbeitrag ist an die Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig einzusenden.

INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.

soweit
Lieferun

Die Beziehungen der Mengenlehre zur Geometrie und Funktionentheorie.[1])

Von A. SCHOENFLIES in Königsberg i. Pr.

Das geometrische Äquivalent zweier in einem endlichen Intervall eindeutiger und stetiger Funktionen $x = f(t)$ und $y = \varphi(t)$ pflegt man allgemein als *stetige Kurve* zu bezeichnen. Freilich hat dieser Kurvenbegriff seinen naiven geometrischen Inhalt längst eingebüßt; wissen wir doch, daß eine solche Kurve die sämtlichen Punkte eines Flächenstücks stetig durchlaufen kann. Auch die Beschränkung auf das abteilungsweise Monotone, mit der man sonst Unannehmlichkeiten auszuschließen pflegt, versagt, wenn man den elementaren Kurvenbegriff treffen will. Wer abteilungsweise stetige monotone Funktionen $f(t)$ und $\varphi(t)$ als Vertreter dieses Kurvenbegriffs ansieht, muß auch jegliche Zahl sich beliebig kreuzender Strecken als einfachen Weg zulassen. Niemand wird den Nutzen der Arithmetisierung für die Geometrie verkennen. Aber geometrische und analytische Betrachtungsweise sind gleichberechtigte Richtungen des mathematischen Erkennens, und es bedeutet einen Verzicht auf die vollinhaltliche Erfassung mathematischer Wahrheiten, wenn man sich mit einseitig arithmetischer Sprechweise begnügt. Ist doch auch die Strenge der Methode für die Geometrie ebensogut erreichbar wie für die Analysis und hat doch auch die arithmetische Sprechweise nicht immer davor geschützt, daß sich mit ihr eine ungeklärte geometrische Denkweise verband.

Die geometrischen Eigenschaften des Kurvenbegriffs, von denen hier die Rede sein soll, sind *gestaltlicher* Art. Es sind diejenigen, die für die Begriffe der *Analysis situs* grundlegend sind. Dabei stelle ich mich auf den Boden desjenigen Programms, dem Hurwitz in seinem

1) Die ausführliche Darlegung dieser Beziehungen soll alsbald als zweiter Teil meines Berichtes über Mengenlehre in diesem Jahresbericht erscheinen. Außer der im Folgenden genannten Literatur vgl. man auch meine Beiträge zur Theorie der Punktmengen, Math. Ann. Bd. 58, S. 195, Bd. 59, S. 129 u. Bd. 62, S. 286.

Züricher Vortrag Ausdruck gegeben hat.[2]) Danach soll die Analysis Situs die Punktmengen so in Klassen teilen, daß diese Klassen und die sie definierenden Begriffe den umkehrbar eindeutigen und stetigen Transformationen gegenüber *invariant* sind.

Die umkehrbar eindeutigen und stetigen Transformationen der Ebene bilden eine Gruppe 𝔊, die im Gegensatz zur Gruppe der Bewegungen nicht abgeschlossen ist. Von den Begriffen, die ihr gegenüber invariant sind, sind drei als grundlegend zu betrachten. Erstens der *Grenzpunkt* und mit ihm die Begriffe *abgeschlossen* und *perfekt;* zweitens der *Zusammenhang*, und drittens die *Dimension*. Mit ihnen erweisen sich dann auch die die ganze Theorie der Punktmengen beherrschenden Unterscheidungen *nirgends dicht* und *überall dicht* als invariant.

Der Nachweis ihrer Invarianz bietet im allgemeinen keinerlei besondere Schwierigkeit. Nur für den Dimensionsbegriff hat sich erst allmählich eine einfache Beweismethode auffinden lassen.[3]) Sie beruht auf dem grundlegenden Gegensatz zwischen abzählbar und nicht abzählbar. Falls nämlich ein Quadrat auf ein Stück einer Geraden umkehrbar eindeutig und stetig abbildbar wäre, müßte jeder dem Quadrat angehörigen Strecke ein Intervall der Geraden entsprechen; zwei einander parallelen Strecken des Quadrats also Intervalle ohne gemeinsame Punkte. Solcher Intervalle gibt es aber auf der Geraden nur eine abzählbare Menge, während die bezüglichen Strecken des Quadrats die Mächtigkeit des Kontinuums besitzen.[4])

Liege nun eine abgeschlossene Menge 𝔗 vor, die in der Ebene zwei Gebiete 𝔍 und 𝔄 bestimmt, deren jedes zusammenhängend ist. Wird die Menge 𝔗 als beliebig gegeben vorausgesetzt, so hat man zu *beweisen*, daß es eine wohldefinierte Teilmenge 𝔗′ von 𝔗 gibt, die übrigens auch mit 𝔗 identisch sein kann, die abgeschlossen, zusammenhängend und nirgends dicht ist, so daß überdies jeder ihrer Punkte gemeinsamer Grenzpunkt zweier ebenfalls zusammenhängender Gebiete 𝔍′ und 𝔄′ ist. Diese Gebiete brauchen mit 𝔍 und 𝔄 nicht identisch zu sein. Die so definierte Menge bezeichne ich als *geschlossene* Kurve.

2) Verhandlungen des ersten internationalen Mathematikerkongresses (1898), S. 102.

3) Vgl. J. Lüroth, Erlanger Berichte, Bd. 10 (1878) S. 190, E. Netto, Journ. f. Math. Bd. 86 (1878), S. 263, J. Thomae, Nachr. d. Gött. Ges. d. Wiss. 1878, S. 466, G. Cantor, ebenda 1879, S. 127, E. Jürgens, Allgemeine Sätze über Systeme von zwei eindeutigen und stetigen reellen Funktionen von zwei reellen Veränderlichen, Leipzig, 1879.

4) Dieser Gedanke findet sich zuerst bei L. Milesi, Riv. di mat. Bd. 2 (1892), p. 103.

Auch dieser Begriff ist der Gruppe 𝔊 gegenüber invariant. Das Gleiche gilt dann auch von jeglicher durch eine abgeschlossene Menge bewirkten *Gebietsteilung*. Die Zahl der Gebiete kann übrigens unendlich groß werden und die Riemannsche Zusammenhangszahl jedes einzelnen Gebietes, die ebenfalls invariant ist, kann bis zu transfiniter Ordnung anwachsen. Alle diese Möglichkeiten finden sich bekanntlich bei denjenigen Gebietsteilungen, die in der Theorie der automorphen Funktionen auftreten, auf das natürlichste realisiert.

Die geschlossene Kurve braucht im analytischen Sinne keineswegs stetig zu sein. Verbindet man einen Punkt $x_0 y_0$ der Funktion $y = \sin\frac{1}{x}$ (Fig. 1)*) mit dem Punkt $y = +1$ der y-Achse durch einen Streckenzug I, so wird diejenige abgeschlossene Menge 𝔗, die aus diesem Streckenzug, der y-Achse zwischen -1 und $+1$ und den Punkten der Funktion $\sin\frac{1}{x}$ für $0 < x \leqq x_0$ besteht, die Ebene ebenfalls in ein Äußeres und ein Inneres zerlegen.

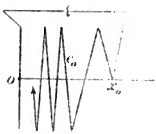


Fig. 1.

Es fragt sich nun, in welchen geometrischen Eigenschaften die analytische Stetigkeit der geschlossenen Kurve ihren Ausdruck findet. Da wir nach solchen Merkmalen zu suchen haben, die der Gruppe 𝔊 gegenüber invariant sind, so muß die Kurve umkehrbar eindeutiges und stetiges Abbild des Kreises oder des Quadrates sein. Dessen Stetigkeitseigenschaft drückt sich aber in der bekannten Tatsache aus, die zuerst von Pasch zum Range eines Axioms erhoben wurde[5]), und die besagt, daß ein äußerer und ein innerer Punkt des Quadrats durch eine Strecke verbindbar sind, die einen und genau einen Punkt des Umfangs enthält. Beachten Sie ferner, daß jeder Punkt des Quadrats die Rolle des Schnittpunktes spielen darf. Wir postulieren daher für unser eineindeutiges und stetiges Abbild die Bedingung, daß man jeden Punkt von 𝔍 und 𝔄 durch einen Streckenzug verbinden kann, der nur einen seiner Punkte enthält, und daß auch jeder seiner Punkte dieser Schnittpunkt sein darf. Die Beschränkung auf Streckenzüge entspricht einer methodischen Forderung. Übrigens kann der Streckenzug aus unendlich vielen Strecken bestehen, doch dürfen sie alle nur einen Grenzpunkt besitzen, nämlich den Kurvenpunkt. Es ist sogar erlaubt, daß der Streckenzug den Grenzpunkt, den er erreichen soll, nach dem Vorbild einer Spirale unendlich oft umzieht. Man kann

*) Die Figur ist nur schematisch gezeichnet.

5) Neuere Geometrie, Leipzig 1882, S. 21.

ein schmales Dreieck sich so dehnen und winden lassen, daß es in ein Polygon übergeht, dessen Spitze einen gegebenen Punkt unendlich oft umkreist. Seine Mittellinie geht dann in den bezüglichen spiraligen Weg über. Sie erkennen die Ähnlichkeit mit derjenigen Figur, die man als Fundamentalbereich einer loxodromischen Substitution wählen kann.

Die so gekennzeichneten Kurvenpunkte bezeichne ich als *erreichbar*. Wie nötig, erweist sich die Erreichbarkeit der Gruppe $\mathfrak{G}$ gegenüber als *invariant*.

Welche Punkte der Grenze eines Gebietes erreichbar sind, dürfte übrigens nicht ohne weiteres evident sein. Errichtet man auf den Seiten eines Quadrats von der Länge 1 in jedem rationalen Punkt $\frac{p}{q}$ nach innen und außen Lote der Länge $\frac{1}{2q}$, so sind immer noch alle Punkte des Quadrats und der bezüglichen Lote von innen resp. außen erreichbar (Fig. 2)*). Obwohl Sie also das Quadrat überall dicht mit Stacheln besetzen, werden Sie den Übergang aus dem Innern in das Äußere im Sinne von Pasch nicht verhindern. Der Weg, der zu einem Quadratpunkt führt, wird allerdings unendlich oft nach links und rechts hin- und herzüngeln, ehe er den Quadratpunkt erreicht. Er kann dies sogar auch dann noch, wenn Sie von jedem Punkt $\frac{p}{q}$ in geeigneter Weise je zwei einen Winkel einschließende Stacheln und damit sogar auch beliebig viele ausgehen lassen.

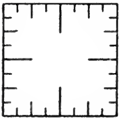


Fig. 2.

Die Erreichbarkeit kommt in einer wichtigen Eigenschaft derjenigen Polygone zum Ausdruck, die eine Gebietsgrenze approximieren. Wie nämlich die Gebietsgrenze $\mathfrak{T}$ eines Gebietes $\mathfrak{J}$ auch beschaffen sei, so kann man stets ein Polygon $\mathfrak{P}$ finden, das sie im mittleren Abstand ε approximiert. Damit ist gemeint, daß der Abstand eines jeden Punktes p des Polygons von der Menge $\mathfrak{T}$ zwischen $\frac{1}{2}\varepsilon$ und $\frac{3}{2}\varepsilon$ liegt. Mit abnehmendem ε konvergieren diese Polygone gegen die Menge $\mathfrak{T}$. Im allgemeinen wird dies nicht gleichmäßig geschehen. *Gleichmäßig* heißt die Konvergenz, wenn erstens zu jedem ε ein Polygon $\mathfrak{P}$ existiert, so daß auch jeder Punkt t der Menge $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{P}$ höchstens um ε entfernt ist, und wenn dies zweitens auch für jedes Teilgebiet $\mathfrak{J}'$ von $\mathfrak{J}$, zu dessen Grenze t gehört, und den es durchziehenden Teil von $\mathfrak{P}$ erfüllt ist. Ist eine derartige approximierende Polygonfolge vorhanden, dann und nur dann sind alle Punkte der

*) In der Figur sind die Lote nur in den Punkten $\frac{\lambda}{2^\nu}$ errichtet.

Menge $\mathfrak{T}$ für das Gebiet $\mathfrak{J}$ sowie auch für jedes Teilgebiet von $\mathfrak{J}$, zu dessen Grenze sie gehören erreichbar.[6]) Hier ist die Brücke, die von dem geometrischen Begriff der Erreichbarkeit zu dem der analytischen Stetigkeit hinüberführt.

Ich kehre zu unserer Kurve zurück, die eineindeutiges und stetiges Abbild des Kreises ist. Die Erreichbarkeit wurde oben für jeden ihrer Punkte sowohl für das Gebiet $\mathfrak{J}$ wie für $\mathfrak{A}$ gefordert. Dies ist notwendig, weil das eine keineswegs eine Folge des andern ist. So ist in dem Beispiel, das sich an die Funktion $\sin \frac{1}{x}$ knüpft, *jeder* Punkt der geschlossenen Kurve $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{A}$ aus erreichbar, von $\mathfrak{J}$ aus sind jedoch die Punkte der y-Achse zwischen -1 und $+1$ nicht erreichbar. Wir können daher die dem Kreisabbild auferlegten Bedingungen nicht weiter einschränken, wenn wir die für die Abbildung charakteristischen Eigenschaften erhalten wollen. In der Tat sind sie aber auch ausreichend. Eine Punktmenge $\mathfrak{T}$ ist dann und nur dann umkehrbar eindeutiges und stetiges Abbild des Kreises, wenn sie erstens eine Teilung der Ebene in zwei Gebiete $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$ bewirkt, und wenn zweitens jeder ihrer Punkte sowohl für $\mathfrak{A}$ wie für $\mathfrak{J}$ erreichbar ist. Daß jeder ihrer Punkte gemeinsamer Grenzpunkt von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ ist, folgt dann von selbst. Hierin ist der Jordansche Kurvensatz und seine Umkehrung enthalten. Überdies erfährt der Jordansche Satz durch die Erreichbarkeitseigenschaft eine notwendige Erweiterung.[7])

Die so definierte Kurve bezeichne ich mit Hurwitz als *einfache* geschlossene Kurve. Wie mannigfach und beinahe paradox ihre gestaltlichen Verhältnisse sein können, zeigt ein Beispiel, das in der Theorie der automorphen Funktionen auftritt. Geht man von n sich zyklisch berührenden Kreisen aus, und wählt die Spiegelungen an ihnen als erzeugende Substitutionen, so bilden die sämtlichen Kreisbogen-n-ecke, die sich aus ihnen durch fortgesetzte Spiegelung ergeben, zwei durch eine *geschlossene Kurve* geschiedene Netze. Diese Kurve, auf deren allgemeines Auftreten Klein[8]) zuerst hinwies, ist in dem vorliegenden Fall eine *einfache* Kurve. Jeder ihrer Punkte ist also für beide Netze erreichbar. Einen zu ihm führenden Weg erhält man insbesondere immer so, daß man irgend welche, z. B. homo-

6) Einen Beweis dieses Satzes werde ich an anderer Stelle veröffentlichen.

7) Einen Beweis der Umkehrung des Jordanschen Kurvensatzes gab für einen speziellen Fall auch D. Hilbert, Math. Ann. Bd 56, S. 393, für den allgemeinen Fall auch P. Rieß, Math. Ann. Bd. 59, S. 409, und F. Osgood, Bull. of the Americ. math. Soc. (2) Bd. 9 (1903), p. 233.

8) Vgl. eine Mitteilung von Poincaré in den Compt. rend. de l'Ac. des sc. Paris. Bd. 93 (1881) p. 1484.

loge Punkte derjenigen Kreisbogen-n-Ecke durch Strecken oder Streckenzüge verbindet, die sich gegen ihn als Grenzpunkt verdichten, also der unendlichen Folge von Substitutionen entsprechen, die den Grenzpunkt definieren. Diese Kurve ist von Poincaré und besonders von Fricke näher untersucht worden.[9]) Hier interessieren besonders ihre gestaltlichen Verhältnisse. Diese schienen zuerst so paradox, daß Poincaré, als er die Kurve behandelte, den Zusatz machte, „falls man überhaupt von einer Kurve sprechen kann". Andererseits aber bilden sie ein ausgezeichnetes Beispiel für die oben erwähnten Typen erreichbarer Punkte. Die Kurve besitzt nämlich eine abzählbare überall dichte Menge solcher Punkte, die Fixpunkte loxodromischer Substitutionen sind. Ihr geometrischer Charakter besteht deshalb darin, daß sich die Kurve wie eine Spirale unendlich oft um sie herumwindet, und zu jedem dieser Punkte führt ein ganzes Büschel spiraliger Wege. Denkt man sich diese Kurve als Abbild eines Quadrats und beachtet, daß wir dieses Quadrat überall dicht mit Stachelpaaren besetzen können, die je einen endlichen Winkel einschließen, so werden Sie unschwer die Vorstellung ausbilden, daß jede Gerade, die zwischen den Schenkeln dieser Winkel in einen Quadratpunkt einmündet, in einen spiraligen Weg übergeht. Daß dabei die spiraligen Endstücke unserer Wege immer enger werden, je mehr sie sich häufen, liegt auf der Hand. Die molekulare Methode der Mengenlehre hat also auch hier den Erfolg, das anschauungsmäßige Erfassen zu verfeinern; und wenn die vielgeschmähte Anschauung auch keine Quelle mathematischer Beweise ist, so kann ich mich doch auf Poincaré berufen, wenn ich sie als unentbehrliche Führerin auf dem Gebiet der geometrischen Erfindung bezeichne.[10])

Ich gehe zu dem einseitig eindeutigen und stetigen Abbild des Kreises oder der Strecke über, also zu derjenigen Punktmenge, die durch *irgend zwei* im Intervall $t_0 \ldots t_1$ eindeutige und stetige Funktionen $f(t)$ und $\varphi(t)$ dargestellt wird. Welches sind die im Sinn der Analysis situs invarianten Eigenschaften, die diesem allgemeinsten stetigen Kurvenbegriff zukommen, die sich also auch gegenüber einseitig stetiger Transformation unverändert erhalten? Auch diese Frage glaube ich Ihnen heute beantworten zu können. Von den oben genannten Eigenschaften, *Grenzpunkt*, *Zusammenhang* und *Dimension* bleiben nur die ersten beiden; muß doch auch jedes derartige Gebilde in einem stetigen Zuge durchlaufen werden können. Eine weitere ist die

9) Vgl. Acta math. Bd. 3, S. 78, sowie besonders Math. Ann. 44, S. 582.

10) H. Poincaré, der Wert der Wissenschaft, deutsch von E. und H. Weber, Leipzig 1906, p. 21.

Erreichbarkeit, die allerdings nicht mehr alle Punkte betrifft. Jeder Punkt, der Grenzpunkt eines Gebietes ist, muß für dieses Gebiet *allseitig*, d. h. auch für jeden Teil, zu dessen Grenze er gehört, erreichbar sein, überdies muß diese Erreichbarkeit auch für jede zusammenhängende Teilmenge erfüllt sein, die sich als Grenze unendlich vieler Gebiete einstellen kann. In der Tat erweist sich die Erreichbarkeit oder genauer die für jedes Teilgebiet und jede Teilmenge geforderte Erreichbarkeit als das wesentliche geometrische Äquivalent der Stetigkeit. Andere invariante Eigenschaften kommen dieser Punktmenge nicht zu. Umgekehrt läßt sich auch jede in einem endlichen Gebiet enthaltene Punktmenge durch ein Paar stetiger Funktionen darstellen, falls sie perfekt und zusammenhängend ist, und falls sie, sowie jede ihrer zusammenhängenden Teilmengen die Erreichbarkeitseigenschaft im obigen Sinn besitzt. Damit dürften die notwendigen und hinreichenden Eigenschaften der Punktmengen, die eindeutige und stetige Bilder der Strecke sein können, genannt sein und die Kleinsche Frage, was man unter einer willkürlichen stetigen Kurve zu verstehen hat[11]), wäre damit im Sinn der Präzisionsmathematik und in dem von der Gruppe der umkehrbar eindeutigen und stetigen Transformationen gebildeten Rahmen beantwortet.[12])

Die unbegrenzte Fülle und Mannigfaltigkeit geometrischer Gestalten, die von diesem Kurvenbegriff umfaßt werden, läßt sich auch andeutungsweise kaum kennzeichnen. Unendlich viele sich im selben Punkt berührende Kreise, deren Radien gegen Null konvergieren, fallen ebensowohl unter ihn, wie unser einseitig oder beiderseitig mit Stacheln besetztes Quadrat. Da eine solche Kurve auch eine Fläche erfüllen kann, so genügt ihm auch jede Kombination unendlich vieler Flächenstücke und Kurven oder Kurvenbögen, gleichgültig, welche Gebietsteilung durch sie bewirkt wird, und welchen Zusammenhang auch jedes einzelne Flächenstück haben mag, vorausgesetzt nur, daß für alle Punkte, die Grenzpunkte eines dieser Gebiete sind, die Erreichbarkeitsbedingung im obigen Sinn erfüllt ist.

Die analytische Erklärung dieses Tatbestandes ruht auf den bekannten Sätzen über die Konvergenz stetiger Funktionen. Sie hängt mit der Frage zusammen, ob und inwieweit auf diesem Gebiet die *transfinite Induktion* gestattet ist, inwieweit also eine Eigenschaft, die für jedes ν gilt, auch für ω besteht. Wenn eine Folge von Funktionen $f_\nu(t)$, die im Intervall $t_0 \,..\, t_1$ stetig sind, *gleichmäßig* gegen eine Grenzfunktion $f_\omega(t)$ konvergiert, so ist auch $f_\omega(t)$ eine stetige Funktion. Die

11) Gutachten zur ersten Verteilung des Lobatschewsky-Preises, Kasan, 1897, S. 5.

12) Den Nachweis werde ich an anderer Stelle demnächst geben.

Stetigkeit, oder vielmehr die gleichmäßige Stetigkeit überträgt sich also von ν auf ω. Mengen von Funktionen, die in einem Intervall $t_0 \ldots t_1$ gleichmäßig stetig sind, verlieren daher diesen Gesamtcharakter nicht, wenn man ihre Grenzfunktionen zu ihnen hinzufügt und sie damit zu abgeschlossenen Mengen umgestaltet. Sie erkennen daraus die Möglichkeit, auf die durch gleichmäßig stetige Funktionen dargestellten allgemeinsten Kurvenmengen die ganze Cantorsche Theorie der Punktmengen analytisch zu übertragen. Ascoli[13]) und Arzelà[14]) haben dies fast in unmittelbarem Anschluß an Cantor für die einfachen Kurven der Form $y = f(x)$ getan. Kürzlich ist es in einer Pariser These von Fréchet für den R_n und sogar den R_x geschehen.[15]) Da jedoch hier von den gestaltlichen Verhältnissen ausdrücklich abgesehen wird, so haben diese Untersuchungen, genau genommen, nur einen analytischen Inhalt.

Wie aber steht es mit der Ubertragung der *gestaltlichen* Verhältnisse von ν auf ω? Liege eine stetige Kurve vor, die wir der Einfachheit halber als Grenze eines und desselben Gebietes wählen, wie z. B. das innen mit Stacheln besetzte Quadrat (Fig. 2). Da alle seine Punkte von innen erreichbar sind, so können wir sie von innen gleichmäßig durch Polygone P_ν approximieren. Jedes dieser Polygone ist durch zwei umkehrbar eindeutige stetige Funktionen $f_\nu(t)$ und $\varphi_\nu(t)$ darstellbar. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz konvergieren $f_\nu(t)$ und $\varphi_\nu(t)$ gegen zwei ebenfalls stetige Funktionen $f_\omega(t)$ und $\varphi_\omega(t)$, nämlich gegen diejenigen, die unsere Kurve darstellen. Während aber jedes Polygon P_ν resp. jedes Funktionenpaar $f_\nu(t)$ und $\varphi_\nu(t)$ *umkehrbar* eindeutiges Bild des Kreises ist, gibt es keinen Satz, der diese Eigenschaft auf $f_\omega(t)$ und $\varphi_\omega(t)$ zu übertragen gestattet. Die transfinite Induktion versagt hier.

Vielleicht erwarten Sie, die große Allgemeinheit unsers Kurvenbegriffs könne uns durch Art und Verteilung der vielfachen Punkte näher gebracht werden. Doch wäre diese Hoffnung trügerisch. Alle Stacheln unsers Quadrates bestehen offenbar aus Doppelpunkten. Um aber sofort den Gipfel der Möglichkeiten zu kennzeichnen, führe ich Ihnen eine Kurve vor, bei der *jeder ihrer Punkte vielfacher Punkt von der Mächtigkeit des Kontinuums ist.* Man kann nämlich alle Punkte eines Würfels eindeutig und stetig auf die Strecke abbilden,

13) Vgl. Memorie della R. Acc. dei Lincei, (3) Bd. 18 (1884) S. 521, sowie Rendiconti, dell. Ist. Lombardo, (2) Bd. 21 (1888), S. 226, 257, 294, 365.

14) Rend. dell. R. Acc. dei Lincei (4) Bd. 51, (1889) S. 342.

15) Vgl. besonders Rend. del. Circ. mat. di Palermo Bd. 22 (1906).

und wie die Peanosche Kurve in einem Zuge durchlaufen.[16]) Betrachten Sie jetzt die Projektion des Kurvenpunktes in der xy-Ebene; sie bildet das Abbild zweier stetiger Funktionen $x = f(t)$ und $y = \varphi(t)$, so daß sich in jeden ihrer Punkte alle Punkte der zugehörigen z-Koordinate projizieren. Wir müssen also jeden Punkt als vielfachen Punkt der eben genannten Art betrachten.

Es hat keinerlei besondere Schwierigkeit, die vorstehenden Betrachtungen sinngemäß auf den Raum von drei oder mehr Dimensionen und deren Gebilde auszudehnen. Beruhen sie doch nur auf solchen Sätzen und Methoden, die über die Ebene hinaus Geltung behalten, nämlich auf der Analysis situs der Polygone, auf den allgemeinen Sätzen über Punktmengen, auf der Approximation einer gegebenen Punktmenge durch eine Polygonfolge, endlich auf dem Begriff der Erreichbarkeit aller Punkte einer Gebietsgrenze und seiner Gleichwertigkeit mit der gleichmäßigen Konvergenz dieser Polygonfolgen und mit der analytischen Stetigkeit. Alle diese Dinge lassen sich insbesondere auf den Raum und auf Polyeder beliebigen Zusammenhangs unschwer übertragen.[17])

Weder Tangente, noch Bogenlänge, noch Flächenzahl sind invariante Werte. Eine einfache Kurve kann eine unendliche Bogenlänge haben; es gibt sogar einfache Kurven, bei denen die Bogenlänge in jedem noch so kleinen Intervall unendlich ist. Was die Flächenzahl betrifft, so interessiert hier eine Frage, die allgemeiner für den Inhalt einer jeden Punktmenge gestellt werden kann. Ist die Eigenschaft einer Punktmenge, daß ihr Inhalt Null oder nicht Null ist, unserer Gruppe gegenüber invariant? Diese Frage, die kürzlich von anderer Seite bejaht wurde[18]), ist zu verneinen.

Um dies in Evidenz zu setzen, gehe ich von einer linearen nirgends dichten perfekten Menge aus, die den Inhalt Null hat. Wir konstruieren sie auf der Einheitsstrecke der x-Achse in bekannter Weise, indem wir (Fig. 3) um deren Mitte ein Intervall der Länge δ_1 legen, um die Mitte eines jeden der beiden übrigen Stücke je ein Intervall der Länge δ_2

16) Dies bemerkt bereits Peano, Math. Ann. Bd. 36 (1890), S. 159. Vgl. auch meinen Bericht in Bd. 8 dieses Jahresberichts, S. 125.

17) Da die Stetigkeit einer Funktion im Punkte x, y äquivalent mit der Stetigkeit für jede Menge $\{x_\nu, y_\nu\}$ ist, die in xy ihren einzigen Grenzpunkt besitzt, so reicht man auch im Raum mit der Betrachtung einfacher Folgen und einfacher Streckenzüge aus. Das Nähere enthält der demnächst erscheinende Bericht.

18) Vgl. E. Bortoletti, Rend. dell Acc. R. dei Lincei, (5) Bd. 2 (1904), S. 52.

usw. Der Summe aller dieser Intervalle δ_ν, mit denen sich die Einheitsstrecke überall dicht bedeckt, geben wir die Länge 1; der Inhalt der zugehörigen perfekten Menge ist also gleich Null. Jetzt machen wir das gleiche auf der y-Achse, und zwar auf einer Strecke der Länge 2, doch so, daß wir den Intervallen, die wir überall dicht auf ihr anordnen, ebenfalls die Längen δ_ν geben. Weisen wir nun die Intervalle auf der y-Achse den entsprechenden Intervallen auf der x-Achse so zu, daß ihre identischen Punkte einander entsprechen, so ist damit eine umkehrbar eindeutige und stetige Abbildung der Einheitsstrecke der x-Achse auf eine Strecke doppelter Länge auf der y-Achse begründet. Während aber die auf der x-Achse enthaltene perfekte Menge den Inhalt Null hat, ist der Inhalt der Bildmenge auf der y-Achse gleich 1.

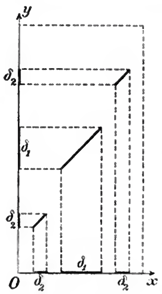


Fig. 3.

Die so erwiesene Nichtinvarianz gibt eine einfache und unmittelbare Erklärung für das Auftreten solcher einfachen Kurven, die wir durch Osgood kennen gelernt haben, und denen eine von Null verschiedene Flächenzahl zukommt.[19]) Wir gehen dazu von einer nirgends dichten und nirgends zusammenhängenden perfekten ebenen Menge $\mathfrak{T}$ aus, und zeigen zunächst, daß man eine einfache geschlossene Kurve konstruieren kann, die sie enthält.[20]) Dazu legen wir um die Menge $\mathfrak{T}$ die sie im mittleren Abstand ε approximierende polygonale Figur II. Sie zerfällt in eine endliche Zahl von Polygonen II_ν. Diese können wir zyklisch anordnen und können dann je zwei benachbarte durch einen Streckenzug oder besser durch einen polygonalen Streifen der Breite ε so verbinden, daß keine zwei dieser Streifen einander kreuzen. Dadurch entsteht ein Ringgebiet $\mathfrak{R}$, das von zwei einfachen Polygonen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ begrenzt ist, und die gegebene Punktmenge einschließt. Konvergiert nun ε gegen Null, so konvergieren die Polygone $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ gegen eine und dieselbe einfache Kurve. Da nämlich die Menge $\mathfrak{T}$ nirgends zusammenhängend ist, so konvergiert die größte Breite der Polygone

19) Transact. of. th. Americ. Math. Society, Bd. 4 (1903), S. 107. Der Hinweis auf die Möglichkeit solcher Kurven findet sich zuvor schon bei E. Lebesgue, in seiner Pariser These, Intégrale, Longueur, Aire, Paris (1902) S. 17, Anm.; abgedruckt in Ann. di mat. (3) Bd. 7, S. 231.

20) Vgl. L. Zoretti, Journ. de math. (6) Bd. 1 (1905) S. 12 sowie P. Riesz, C. R. de l'Ac. de Paris, Bd. 141 (1905) p. 650. Für eine spezielle Menge zeigt dies auch Grace Chisholm-Young, Quart. Journ. of math. Bd. 37 (1906) S. 87.

Π_ν mit ε notwendig gegen Null. Damit folgt es auch für das Ringgebiet; seine Grenze ist daher eine einfache Kurve.

Falls nun der Inhalt der Menge $\mathfrak{T}$ nicht Null ist, so gilt dies umsomehr von unserer Kurve, denn das Ringgebiet $\mathfrak{R}$ enthält die Polygone Π_ν als Bestandteil. Wir können uns daher einfache Kurven dieser Art in Fülle schaffen; jede nirgends zusammenhängende perfekte Menge, deren Inhalt nicht Null ist, liefert beliebig viele. In der Tat ist auch für die von Osgood angegebene Kurve die Punktmenge, mit der sie aufgebaut ist, leicht nachweisbar. Die Osgoodsche Erzeugungsweise schließt sich bekanntlich enge an das Verfahren an, das die Peanosche Kurve liefert. Sie geht (Fig. 4.) ebenfalls von einer Dreimaldreiteilung des Quadrates aus, ersetzt aber die Teilungslinien durch schmale Streifen und baut den ersten approximierenden Polygonzug aus den 9 Diagonalen und den die Streifen durchziehenden Verbindungsstrecken auf. Dies hat den Erfolg, daß die bei der Peanoschen Kurve auftretenden Doppelpunkte verschwinden. Jede Diagonale wird nun in analoger Weise durch einen ebensogestalteten Linienzug ersetzt usw. Während aber beim Peanoschen Verfahren die Linienzüge allmählich das ganze Quadrat erfüllen, konvergieren sie hier gegen einen einfachen Kurvenbogen. Sie sehen zugleich, wie dieses Verfahren sachlich mit dem obigen übereinstimmt. Die 9 Quadrate der ersten Teilung spielen die Rolle der Polygone Π_ν, die Strecken, die die Querstreifen durchsetzen, entsprechen den Streckenzügen, die je zwei benachbarte Polygone Π_ν verbinden, und die einander bei fortgesetzter Teilung einschließenden Quadrate konvergieren gegen eine nirgends zusammenhängende Menge $\mathfrak{T}$. Bei geeigneter Wahl der Streifenbreite erhält sie einen von Null verschiedenen Inhalt.

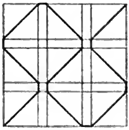


Fig. 4.

Auch das hier geschilderte Verfahren ist unmittelbar auf den Raum übertragbar. Man kann auf diese Weise einfache Raumkurven, wie auch einfache Flächen beliebigen Zusammenhangs konstruieren, denen eine von Null verschiedene Volumenzahl zukommt. Für Raumkurven läßt sich übrigens außer der Längenzahl und der Volumenzahl noch eine Flächenzahl in Betracht ziehen. Die polyedralen Figuren, die die Raumkurve approximieren, haben eine Oberfläche, mittels deren sich bei abnehmendem ε ein gewisser Grenzwert bilden läßt, der diese Flächenzahl liefert. Sie kann nicht allein endlich, sondern sogar auch unendlich groß ausfallen; die einfache Kurve, die den Würfel in der gleichen Weise durchläuft, wie die Osgoodsche Kurve das Quadrat, hat eine unendliche Oberflächenzahl.

Auf die Existenz und Bedeutung dieser Zahl hat zuerst Lebesgue hingewiesen.[21]) Kurven, für die sie Null ist, und zu denen die rektifizierbaren immer gehören, nennt er quadrierbar. Mit ihrer Hilfe hat er die von der Differenzierbarkeit unabhängige Definition der Bogenlänge sinngemäß auf den Oberflächeninhalt übertragen. Er teilt die Oberfläche durch rektifizierbare Kurven in beliebig viele Teilgebiete, denkt sich für jedes eine approximierende polyedrale Fläche und hat in dem Grenzwert der Summe ihrer Oberflächen die Flächenzahl, die, falls sie endlich ist, die Fläche zu einer quadrierbaren macht.

Wir verdanken Lebesgue auch eine neue und naturgemäße Definition des *Inhaltsbegriffs* einer beliebigen Punktmenge. Sein Erfolg beruht auf dem Übergang vom Endlichen zum Abzählbaren, seine Einführung ist axiomatischer Natur.[22]) Eine grundlegende Eigenschaft des elementaren Inhaltsbegriffs ist die, daß der Inhalt der Summe zweier Gebiete ohne gemeinsame Punkte gleich dem Inhalt ihrer Summe ist. Hieran knüpft Lebesgue folgendermaßen an. Sei $\mathfrak{E}$ der Inhalt eines Rechtecks, $\mathfrak{T}$ irgend eine in ihm enthaltene abgeschlossene oder nichtabgeschlossene Menge und $\mathfrak{M}$ deren Komplementärmenge, so daß also

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{T} + \mathfrak{M}$$

ist, alsdann nennt Lebesgue die Mengen $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{M}$ *meßbar*, wenn die zugrunde gelegte Inhaltsdefinition, die zunächst offen bleibt, die Gleichung

$$\mathfrak{J}(\mathfrak{E}) = \mathfrak{J}(\mathfrak{T}) + \mathfrak{J}(\mathfrak{M})$$

ergibt. Die Forderung, daß die Summe der Inhalte von $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{M}$ gleich dem Inhalt der aus ihnen gebildeten Summe ist, ist damit unmittelbar realisiert, und die Meßbarkeit wird eine Eigenschaft, die für Menge und Komplementärmenge immer zugleich erfüllt oder nicht erfüllt ist. Die Anwendung des Inhaltsbegriffes auf unendliche Mengen läßt aber Lebesgue die weitere Forderung hinzufügen, daß die Eigenschaft, Inhalt der Summe gleich Summe der Inhalte, nicht bloß für eine endliche, sondern auch für abzählbar unendlich viele Mengen ohne gemeinsame Punkte erfüllt sein soll. Dies bewirkt, daß der Grenzwert des Inhalts einer Folge von Punktmengen, die gegen eine Grenzmenge entweder wachsen oder abnehmen, immer gleich dem Inhalt der Grenzmenge ist. Da die ganze Theorie der Konvergenz mit Folgen von abzählbar unendlich vielen Gliedern operiert, und man es dabei immer

21) Vgl. die Anm. 18 genannte These Ann. di mat., S. 298.

22) Vgl. das Citat in Anm. 18, p. 236.

mit Mengen der genannten Art zu tun hat, so ist damit die große Tragweite dieses Inhaltsbegriffs unmittelbar gekennzeichnet.

Einen Inhaltsbegriff, der dieser Forderung entspricht, hatte übrigens bereits Borel[23]) eingeführt. Er beruht darauf, daß man die gegebene Punktmenge von vornherein nicht in eine endliche, sondern in eine abzählbar unendliche Menge von Bereichen einschließt und den Grenzwert der Summe dieser Bereiche ins Auge faßt, falls die Bereiche sich soweit als möglich verkleinern. Auf Grund dieser Definition ist zunächst jede abzählbare Menge meßbar und vom Inhalt Null, mag sie nirgends dicht oder überall dicht liegen. Ferner erweist sich auch jede abgeschlossene, insbesondere jede abgeschlossene nirgends dichte Menge als meßbar, und zwar stimmt ihr Inhalt mit dem überein, was Peano unnd Jordan als ihren äußeren Inhalt bezeichneten. Die Meßbarkeitsfrage bleibt daher an sich nur für solche nicht abgeschlossene Mengen offen, bei denen sie selbst, sowie ihre Komplementärmenge von höherer als der ersten Mächtigkeit ist.[24])

Die Meßbarkeit wird damit höchst wahrscheinlich eine Eigenschaft, die unserer Transformationsgruppe gegenüber invariant ist. Jedenfalls trifft dies für die abzählbaren und die sämtlichen abgeschlossenen Mengen zu.

Mit diesem Inhaltsbegriff hat Lebesgue den *Integralbegriff* in ebenso einfacher wie fruchtbarer Weise erweitert. Er definiert nämlich das Integral einer Funktion $f(x)$ im Intervall $a \,..\, b$ unmittelbar als den Inhalt der von ihren Ordinaten gebildeten Punktmenge, vorausgesetzt daß diese meßbar ist.[25]) Es gelingt ihm, alle bekannten Integralsätze auf diesen verallgemeinerten Begriff zu übertragen. Der Erfolg seiner Idee geht aber noch weiter. Um nur ein Beispiel anzuführen, so besteht für diesen Integralbegriff der sogenannte Fundamentalsatz der Integralrechnung ausnahmslos. Wird nämlich aus der differenzierbaren Funktion $f(x)$ durch Ableitung $f'(x)$ erhalten und ist $f(x)$ eine Funktion beschränkter Schwankung, so ist $f'(x)$ im Lebesgueschen Sinn stets integrierbar und ihre Integralfunktion ist wieder $f(x)$; ein Satz, der für den gewöhnlichen Integralbegriff bekanntlich nicht zutrifft.[26])

23) Vgl. Leçons sur la théorie des fonctions, Paris 1898 S. 46 ff.

24) Bei einer punktweise unstetigen Funktion, deren Unstetigkeitspunkte die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ besitzen, bilden diese, sowie die Stetigkeitspunkte zwei solche Mengen. Übrigens sind auch diese, sowie alle Punktmengen meßbar, die bei den sogenannten Funktionen erster und zweiter Klasse im Sinne von R. Baire auftreten. Sie gehen sämtlich aus meßbaren Mengen durch transfinite Induktion hervor.

25) a. a. O. S. 250.

26) a. a. O. S. 265. Vgl. auch E. Hahn, Monatsh. f. Math. Bd. 16, S. 161.

Es wäre lockend, den Einzelanwendungen des Kurvenbegriffs näher nachzugehen und den Spielraum zu ermitteln, der ihm in jedem besonderen Falle bleibt. Allerdings könnte ich fertige Resultate kaum mitteilen. Ich beschränke mich auf den Hinweis, daß die analytische Kurve, die früher — meist aus Vorsicht — das Feld beherrschte, im allgemeinen der einfachen rektifizierbaren Kurve gewichen ist. Diese ist uns durch notwendige und hinreichende Bedingungen definiert; $f(t)$ und $\varphi(t)$ müssen bekanntlich Funktionen beschränkter Schwankung sein. Eine geschlossene rektifizierbare Kurve bestimmt auch stets eine meßbare Fläche und nach einem Satz von Lebesgue entsprechen sogar die Stellen, an denen eine Tangente fehlt, immer einer Menge vom Inhalt Null.[27]) Insbesondere operieren die Integralsätze, die zum Aufbau der Cauchy-Riemannschen Funktionentheorie dienen, mit der rektifizierbaren Kurve, und zwar mit derjenigen, die durch *irgend* zwei stetige Funktionen definiert ist.[28]) Sicherlich haben diese Sätze für die allgemeinste rektifizierbare stetige Kurve als Integrationsweg Geltung, also beispielsweise auch für das überall dicht mit inneren Stacheln besetzte Quadrat; man hat nur die Länge dieser Stacheln entsprechend einzurichten. Da aber alle Stacheln bei der Integration zweimal durchlaufen werden, so wird hierdurch kein allgemeineres Resultat erzielt, als wenn man den Integrationsweg über das Quadrat selbst erstreckt. Man sollte sich deshalb besser von vorn herein auf den elementaren Begriff der einfachen rektifizierbaren Kurve beschränken. Ist doch auch die Möglichkeit nicht ganz abzuweisen, daß durch die einseitig stetigen, insbesondere durch die abteilungsweise monotonen Funktionen ein anderer Kurvenbegriff nicht getroffen werden soll.

Soll ich noch die wichtigsten Einwirkungen der Mengentheorie auf die Funktionentheorie schildern, so darf ich zunächst an dem Namen Mittag Leffler nicht vorbeigehen. Sie wissen, wie er in genauem Anschluß an Cantors Analyse der Punktmengen Funktionen mit beliebig vorgeschriebenen singulären Stellen und vorgeschriebenen Entwickelungsgliedern bilden lehrte und damit die neuere funktionentheoretische Entwickelung begründen half. Auch der formale Gedanke, der die Herstellung dieser Funktionen ermöglicht, und der heute bereits elementar erscheint, entstammt dem Boden der Mengenlehre. Er besagt bekanntlich, daß man auch auf Punktmengen, die auf einer Kurve oder einem Flächenstück überall dicht liegen, das Prinzip der Verdichtung der Singularitäten anwenden kann.

27) Leçon sur l'intégration, Paris 1904, S. 127.

28) Vgl. z. B. die neueren Arbeiten von Heffter, Nachr. d. Gött. Ges. d. Wiss. 1902, S. 115, und Pringsheim, Ber. d. Münch. Ak. d. Wiss. Bd. 25 (1895). S. 39.

Wir schulden es Weierstraß, daß wir gelernt haben, zwischen dem *Existenzbereich* einer *analytischen Funktion* und dem *Konvergenzbereich* eines *analytischen Ausdrucks* zu unterscheiden. An den Geometer tritt zunächst die Frage heran, wie Existenzbereich und Konvergenzbereich im allgemeinsten Fall aussehen können. Da es zu jedem beliebig begrenzten Gebiet analytische Funktionen gibt, die dies Gebiet als Existenzbereich besitzen, so ist die Frage nach dem Existenzbereich identisch mit derjenigen nach der allgemeinsten Form einer Gebietsgrenze; übrigens hängt nach neueren Untersuchungen das Verhalten der Funktion an den singulären Stellen von deren Verteilungsart wesentlich ab.[29]) Eine erste Antwort hierauf wird bereits durch das Cantor-Bendixsonsche Theorem erteilt, das jede abgeschlossene Punktmenge in die Form $R + S$ setzt, wo R eine abzählbare Menge isolierbarer Punkte und S eine perfekte Menge bedeutet; es ist dasjenige Theörem, an dessen Hand Mittag Leffler zur Konstruktion immer höherer Funktionsklassen aufzusteigen vermochte. Die Menge S kann aus lauter Punkten gebildet sein, wie es z. B. für diejenige automorphe Funktion der Fall ist, deren Fundamentalbereich von einer endlichen Anzahl sich nicht schneidender Kreise begrenzt ist.[30]) Die perfekte Menge S kann aber auch Kurventeile in abzählbarer oder nicht abzählbarer Menge enthalten. Sie zerfällt dann selbst wieder in zwei Teile $R_1 + S_1$, sodaß R_1 eine abzählbare Menge von Kurvenbögen ist, und die Menge S_1, falls sie existiert, Abspaltungen einzelner Kurvenbögen nicht mehr zuläßt.[31]) Ein Beispiel einer solchen Menge S_1 erhalten Sie, wenn Sie in den Punkten einer linearen nirgends dichten perfekten Menge Lote beliebiger Länge errichten. Auch diese Menge kann Grenze des Existenzbereichs einer analytischen Funktion sein. Vervollständigt man sie zu einem geschlossenen Rand eines Gebietes, so kann man, wie Osgood kürzlich zeigte, auch für sie die Randwertaufgabe lösen[32]); man kann auf die sie approximierenden Polygone die Harnackschen Sätze übertragen, die zugehörige Greensche Funktion bestimmen, und daher auch das Innere dieser Fläche konform auf das Innere des Kreises abbilden.

Die Frage nach den gestaltlichen Eigenschaften des Konvergenzbereichs eines analytischen Ausdrucks läßt eine so einfache Antwort nicht zu. Im Gegensatz zu den singulären Stellen einer analytischen

29) Vgl. D. Pompéju, Compt. Rend. de Paris, Bd. 139 (1904) S. 914 und L. Zoretti, a. a. O. (Anm. 20.) S. 13 ff.

30) Vgl. R. Fricke, Math. Ann. 44, S. 576.

31) Vgl. meinen Beitrag II, Math. Ann. 59, S. 141.

32) Trans. of the Am. Math. Soc. Bd. 1 (1900) p. 310.

Funktion brauchen nämlich diejenigen Stellen, an denen ein analytischer Ausdruck aufhört zu konvergieren, *keine* abgeschlossene Menge zu bilden. Dieser Gegensatz kann bewirken, daß der Konvergenzbereich eines analytischen Ausdrucks aus bloßen Kurvenmengen bestehen kann und daß ihm eigentliche Gebietsteile überhaupt nicht anzugehören brauchen.

Liege zunächst ein eigentliches Gebiet als Konvergenzbereich vor und eine unendliche Reihe analytischer Funktionen, die in ihm *überall* konvergiert, so bilden die Stellen ungleichmäßiger Konvergenz eine abgeschlossene Menge. Die Frage nach ihrer allgemeinsten Verteilung ist kürzlich von Osgood beantwortet worden.[33]) Ihm zufolge zerfällt das Gebiet $\mathfrak{J}$ in eine endliche oder abzählbare Menge von Teilgebieten, in deren jedem die Reihe gleichmäßig konvergiert, also eine analytische Funktion darstellt, während die Punkte ungleichmäßiger Konvergenz von den Grenzpunkten dieser Gebiete gebildet werden. Ein von Runge gegebenes Beispiel beweist bekanntlich, daß die den einzelnen Gebieten entsprechenden Funktionen identisch sein können.[34]) Allgemeinere Bedingungen, unter denen diese Identität statt hat, hat kürzlich Vitali angegeben.[35]) Die Identität kann auch dann noch vorhanden sein, wenn die Trennungslinien der Gebiete eine perfekte Menge vom Inhalt Null bilden.

Hiermit ist aber die Frage nach der allgemeinsten Form und Beschaffenheit des Konvergenzbereichs einer unendlichen Reihe analytischer Funktionen nicht erschöpft. Abschließende Resultate liegen freilich noch nicht vor; nur einzelne einfache Beispiele sind näher behandelt worden. Wir danken die Kenntnis der mannigfachen Möglichkeiten, die hier auftreten hönnen, einem ebenso einfachen, wie weittragenden Gedanken Borels.[36]) Er knüpft an die Ausdrücke der Form $\sum \frac{A_\nu}{z-\alpha_\nu}$ an, die auch sonst ein außerordentlich gefügiges Werkzeug für die Erledigung subtilerer analytischer Probleme bilden. Bekanntlich wurden diese Summen zuerst methodisch von Poincaré[37]) und Goursat[38]) in der Weise benutzt, daß sie die Stellen α_ν auf einer

33) Annals of Math. (2) Bd. 3 (1901) S. 25.

34) C. Runge zeigte zuerst, daß ein analytischer Ausdruck, der in einem Gebiet eine analytische Funktion darstellt, nicht gleichmäßig zu konvergieren brauche; Acta math. Bd 6, S. 245.

35) Atti di Torino, Bd. 39 (1904) S. 22.

36) Vgl. besonders Leçons sur la théorie des fonctions, Paris 1898, S. 93 und Leçons sur les fonctions méromorphes, Paris 1903, S. 84.

37) Acta Soc. sc. Fenn. Helsingfors, Bd. 12 (1883) S. 341.

38) Compt. rend. de Paris, Bd. 94 (1882) p. 713, sowie Bull. des scienc. math. (2) Bd. 11 (1887) S. 109.

konvexen geschlossenen Kurve, wie z. B. einem Polygon überall dicht verteilten, und damit Funktionen mit beschränktem Existenzbereich in expliziter Form zuerst herstellen lehrten.

Nehmen wir jetzt die Stellen α_ν in einem Gebiet $\mathfrak{J}$ überall dicht an. Da sie abzählbar sind, so ist ihr Inhalt gleich Null; d. h. wir können um jeden Punkt α_ν einen Kreis mit dem Radius ϱ_ν so legen, daß auch die Summe aller dieser Kreisflächen einen beliebig kleinen Wert σ besitzt. Diese Kreisflächen zerlegen das Gebiet $\mathfrak{J}$ in eine im allgemeinen abzählbar unendliche Menge von Teilgebieten, deren Gesamtfläche stets kleiner als die Summe aller Kreisflächen sein muß. Borel zeigt nun, daß man die Koeffizienten A_ν auf die mannigfachste Weise so wählen kann, daß $\sum \frac{A_\nu}{z - \alpha_\nu}$ jedenfalls immer dann konvergiert, wenn z nicht im Innern eines unserer Kreise liegt.[39]) Es wird daher in jedem Teilgebiet, dessen Flächenzahl den Wert σ übersteigt, notwendig Konvergenzpunkte geben. Die Frage nach den im Gebiet $\mathfrak{J}$ enthaltenen Konvergenzstellen hängt daher augenscheinlich mit der Frage nach der Struktur der durch die Kreise k_ν bewirkten Gebietsteilung zusammen, doch ist sie mit ihr keineswegs identisch. Jeder Grenzpunkt eines oder mehrerer dieser Gebiete ist sicher ein Konvergenzpunkt. Das Merkwürdige aber ist, daß sich diese Konvergenzpunkte auf das mannigfachste zu Kurvenmengen von der Mächtigkeit des Kontinuums verbinden lassen. Unter ihnen gibt es sogar auch immer Gradenscharen jeglicher Richtung von der gleichen Mächtigkeit. Für sie alle konvergiert unser analytischer Ausdruck sogar gleichmäßig. Falls nun die Radien ϱ_ν und die Größe σ gegen Null abnehmen, so wird der Konvergenzbereich sich immer mehr erweitern, immer neue Kurvenmengen in sich aufnehmen, und sich den Stellen, in denen die Konvergenz aufhört, immer mehr annähern. Die Punkte α_ν bilden übrigens nur einen Teil von ihnen.

Die vorstehenden Schlüsse bleiben naturgemäß in Kraft, wenn wir die Stellen α_ν in irgend einer andern Weise verteilen, z. B. so, daß sie nur auf gewissen Kurven überall dicht liegen, die eine Gebietsteilung bestimmen. Dann stellt unser Summenausdruck in jedem Teilgebiet je eine besondere analytische Funktion dar. Wir gelangen damit zu Beispielen eindeutiger analytischer Funktionen, deren Existenzbereiche keinen Punkt gemein haben, bei denen aber doch von der einen zur

39) Die Konvergenz geht übrigens noch weiter; denn sie findet auch dann statt, wenn der Punkt z innerhalb einer endlichen Zahl von Kreisen liegt, ohne mit einer Stelle α_ν zusammenzufallen.

andern längs einfacher Kurven gleichmäßiger Konvergenz ein stetiger Wertübergang möglich ist.

Unsere Summenausdrücke haben übrigens selbst in den Fällen, daß sie nirgends eine analytische Funktion darstellen, noch andere für die analytischen Funktionen wesentliche Eigenschaften mit diesen gemein. Sie sind gliedweise differenzierbar, wo natürlich für die Bildung des Differentialquotienten nur solche Punktmengen in Betracht kommen, für die sie konvergieren.[40]) Unter den Kurven gleichmäßiger Konvergenz gibt es ferner immer solche, die rektifizierbar sind, sodaß sie längs dieser auch gliedweise integrierbar sind. Hieraus hat Borel weiter gefolgert, daß sie nicht auf allen Kurven gleichmäßiger Konvergenz Null sein können, ohne daß die sämtlichen Köeffizienten A_ν Null sind; eine Eigenschaft, die sie mit der Taylorschen Reihe teilen, die aber keineswegs allen unendlichen Reihen zukommt, die eine eindeutige analytische Funktion darstellen.

Die Taylorsche Reihe steht seit einiger Zeit wiederum im Vordergrund des mathematischen Interesses, und wenn es sich darum handelt, ihre feineren Eigenschaften in elementarer Weise in Evidenz zu setzen, so kann nichts mit unseren Summenausdrücken konkurrieren. Wählt man die α_ν so, daß sie sich auf der imaginären Achse spiegelbildlich gegen den Nullpunkt häufen, so ergeben sich bei geeigneter Wahl der A_ν reelle Funktionen, die mit sämtlichen Ableitungen im Nullpunkt endlich und stetig sind, für die die zugehörigen Maclaurinschen Reihen sogar beständig konvergieren, und die doch die Funktion nicht darstellen können; denn für die durch unsere Summen dargestellte analytische Funktion ist der Nullpunkt ein singulärer Punkt.[41])

Wählt man die α_ν auf dem Einheitskreis, so ergeben sich Taylorsche Reihen, die über ihn nicht fortsetzbar sind. Durch geeignete Wahl der α_ν und A_ν hat Pringsheim insbesondere auch solche nicht fortsetzbare Reihen gebildet[41]), deren Möglichkeit unmittelbar aus einer Arbeit von Lerch[42]) folgt, und auf die zuerst Fredholm an der Hand des von ihm konstruierten Beispiels hinwies.[43]) Diese Reihen sind mit ihren sämtlichen Ableitungen in allen Punkten der Peripherie des Konvergenzkreises endlich und stetig. Um dies zu erreichen, hat

40) Die Definition der Stetigkeit und also auch des Differentialquotienten hat das Kontinuum nicht zur notwendigen Voraussetzung; vgl. Cam. Jordan, Cours d'analyse, Bd. 1, S. 46 ff, sowie meinen Bericht, a. a. O. S. 115 ff.

41) Vgl. A. Pringsheim, Math. Ann. Bd. 42 S. 153.

42) Die von Lerch angegebenen Beispiele nirgends differenzierbarer Funktionen ziehen dies nach sich; vgl. Journ. f. Math. Bd. 103 (1888) S. 380.

43) Vgl. G. Mittag Leffler im Acta math. 15 (1891), S. 279.

man zunächst die Stellen α_ν sämtlich außerhalb des Kreises zu wählen, sodaß ihre Grenzpunkte die Peripherie überall dicht erfüllen. Werden dann die Koeffizienten A_ν der Bedingung unterworfen, daß $\left|\frac{A_\nu}{z-\alpha_\nu}\right| < |c_\nu|$ ist, wo $\sum c_\nu$ eine absolut konvergente Reihe darstellt, so wird $\sum \frac{A_\nu}{z-\alpha_\nu}$ nicht allein für das Innere, sondern auch noch für alle Punkte der Kreisperipherie konvergieren. Ähnlich kann man auch die Konvergenz aller abgeleiteten Reihen erreichen.

Die Kunst, nicht fortsetzbare Taylorsche Reihen herzustellen, hat freilich etwas von ihrem Wert verloren, seit wir wissen, daß es, wie man sich gewöhnlich ausdrückt, nicht die fortsetzbaren Reihen sind, die die Regel bilden, sondern die nicht fortsetzbaren.[44]) Doch bedarf diese Ausdrucksweise der Präzision. Beide Reihenmengen besitzen nämlich die *gleiche* Mächtigkeit, und zwar die des Kontinuums. Zwischen fortsetzbaren und nicht fortsetzbaren Reihen und den aus irgend zweien von ihnen gebildeten Summen besteht nämlich eine ähnliche Beziehung, wie zwischen rational und irrational, oder zwischen stetiger und unstetiger Funktion und deren Summen. Kurz gesprochen gibt nämlich fortsetzbar plus fortsetzbar wieder fortsetzbar; fortsetzbar plus nicht fortsetzbar gibt nicht fortsetzbar, während die Summe zweier nicht fortsetzbarer Reihen sowohl eine fortsetzbare wie eine nicht fortsetzbare Reihe sein kann. Man schließt daraus zunächst, daß die nicht fortsetzbaren Reihen gleiche oder größere Mächtigkeit besitzen, wie die fortsetzbaren. Während aber die irrationalen Zahlen wirklich größere Mächtigkeit haben, als die rationalen, und die unstetigen Funktionen größere als die stetigen, ist hier ein analoger Schluß nicht möglich. Eine *jede* Taylorsche Reihe entsteht nämlich durch Belegung ihrer Koeffizienten α_ν mit irgend welchen Zahlenwerten, d. h. durch Belegung einer abzählbaren Menge mit dem Kontinuum. Ihre Mächtigkeit ist daher $\mathfrak{c}^{\mathfrak{a}}$ oder $\mathfrak{c}$. Andererseits kann man sich eine Menge fortsetzbarer Reihen der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ schon dadurch verschaffen, daß man bei *einer* solchen Reihe *einem* Koeffizienten Zahlenwerte der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ gibt. Daraus geht die Äquivalenz beider Mengen unmittelbar hervor.

Es ist ein Hauptverdienst der Mengenlehre, daß sie den Übergang vom Endlichen zum Unendlichen zu einer elementaren Denkweise umgewandelt hat. Sie hat uns gelehrt, mit der transfiniten Induktion wie mit einem selbstverständlichen Verfahren zu operieren. Die konstruk-

44) So sprach sich zuerst A. Pringsheim aus, Math. Ann. Bd. 44 (1894) S. 50.

tive Erzeugung des Transfiniten hat ein Neuland geschaffen, in dessen einzelnen Bereichen wir uns so sicher bewegen können, wie im Endlichen. Wir schrecken nicht davor zurück, vom Kontinuum zum Ultrakontinuum[45]) überzugehen und auch an solche Mengen die ordnende Hand zu legen, bei denen Zahlfolgen der zweiten Mächtigkeit die Elemente bilden. Die eingehenden Untersuchungen, die Hausdorff[46]) kürzlich den geordneten Mengen dieser Art gewidmet hat, werden uns hoffentlich in den Stand setzen, auch den Begriff von Du Bois' infinitärer Pantachie in strenge Formen zu kleiden und zu entscheiden, ob und warum etwa die sogenannte Grenze von Konvergenz und Divergenz einer Lücke dieser Pantachie entspricht oder nicht.[47]) Und wenn wir jetzt sogar den Raum von unendlich vielen Dimensionen betreten und in ihm Formen unendlich vieler Variabeln betrachten[48]), und der kühne Flug des mathematischen Intellekts bereits jegliche Phantasie hinter sich läßt, so danken wir auch dies derjenigen Vervollkommnung unserer Denkweise, die sich auf Grund Cantorscher Ideen vollzogen hat.

Über Potenzreihen von mehreren Veränderlichen.

Von Paul Stäckel in Hannover.

1. Bei Untersuchungen, in denen Potenzreihen von einer oder von mehreren Veränderlichen auftreten, benutzt man oft die folgenden Ungleichheiten. Wenn die Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum c_{h_1 h_2 \ldots h_n} x_1^{h_1} x_2^{h_2} \ldots x_n^{h_n}$$
$$(h_1, h_2, \ldots, h_n = 0, 1, 2, \ldots \infty)$$

für alle Wertsysteme $x_1, x_2, \ldots, x_n$, bei denen

(A) $$|x_1| \leqq r_1, \quad |x_2| \leqq r_2, \ldots, |x_n| \leqq r_n$$

ist, unbedingt konvergiert und M das Maximum des absoluten Betrages der Potenzreihe für diejenigen Wertsysteme $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bezeichnet, bei denen

(B) $$|x_1| = r_1, |x_2| = r_2, \ldots |x_n| = r_n$$

45) Es mag genügen, hier auf Veroneses Konstruktion des Linearkontinuums, und auf die Göttinger Dissertation (1901) von E. Bernstein hinzuweisen; abgedruckt in Math. Ann. Bd. 61, S. 117. Vgl. auch die folgende Anm.

46) Leipz. Ber. Bd. 58 (1906), S. 106.

47) Vgl. hierzu auch meine Arbeit aus diesem Jahresber. Bd. 15, (1906) S. 26.

48) Vgl. besonders D. Hilberts vierte Mitteilung über Integralgleichungen, Nachr. d. Göttinger Ges. d. Wiss. 1906.

ist, so hat man für alle Werte der Indices $h_1, h_2, \ldots, h_n$:

$$\text{(M)} \qquad |c_{h_1 h_2 \ldots h_n}| \leqq M \cdot r_1^{-h_1} r_2^{-h_2} \ldots r_n^{-h_n}.$$

Der Beweis ist von Cauchy mittels des nach ihm benannten Integralsatzes, von Weierstraß durch die Betrachtung von Mittelwerten geführt worden, die sich auf die Mannigfaltigkeit (B) beziehen.

Ich möchte die Aufmerksamkeit auf die Tatsache lenken, daß sich diese Cauchy-Weierstraßschen Ungleichheiten nicht selten durch gewisse andere Ungleichheiten ersetzen lassen, die einen prinzipiell einfacheren Charakter tragen, da sie unmittelbar aus der unbedingten Konvergenz der Potenzreihe für die Wertsysteme (B) *folgen.* Ist nämlich δ eine beliebig kleine positive Größe, die auch kleiner ist als der absolute Betrag eines irgendwie aus der Reihe herausgegriffenen, nicht verschwindenden Gliedes, so gibt es stets eine ganze Zahl H von der Beschaffenheit, daß für alle Systeme von Indices $h_1, h_2, \ldots, h_n$, deren Summe größer als H ist, der absolute Betrag der Reihenglieder kleiner als δ wird, und wenn daher G den *größten* Wert unter den absoluten Beträgen derjenigen Reihenglieder bezeichnet, bei denen die Summe der Indices kleiner als H oder gleich H ausfällt, so bestehen die für alle Indicessysteme $h_1, h_2, \ldots, h_n$ gültigen Ungleichheiten:

$$\text{(G)} \qquad |c_{h_1 h_2 \ldots h_n}| \leqq G \cdot r_1^{-h_1} r_2^{-h_2} \ldots r_n^{-h_n}.$$

Da in mindestens einer dieser Ungleichheiten das Gleichheitszeichen zu nehmen ist, so läßt sich die Größe G auch als die *kleinste* unter allen Größen K erklären, für die stets die Ungleichheiten

$$\text{(K)} \qquad |c_{h_1 h_2 \ldots h_n}| \leqq K \cdot r_1^{-h_1} r_2^{-h_2} \ldots r_n^{-h_n}$$

gelten.

Hieraus folgt, daß das Maximum der absoluten Werte M nicht kleiner als G sein kann. Für beständig konvergente Potenzreihen von einer Veränderlichen x ergibt sich auf diese Weise sofort der bekannte Satz, daß das Maximum des absoluten Betrages M mit dem absoluten Betrage r von x wächst, und zwar rascher als jede endliche Potenz von r.

2. Es sollen zunächst Fälle angeführt werden, in denen man mit Vorteil von den Ungleichheiten (G) Gebrauch macht.

Cauchy hat 1831 in dem *Calcul des limites* gezeigt, daß man der Differentialgleichung:

$$\text{(1)} \qquad \frac{dy}{dx} = \sum_{(h,\, k = 0,\, 1,\, 2, \ldots \infty)} c_{hk} x^h y^k,$$

deren rechte Seite eine für $|x| \leqq r$, $|y| \leqq s$ unbedingt konvergente Potenzreihe ist, bei der Anfangsbedingung $x = 0$, $y = 0$ stets durch eine

konvergente Potenzreihe $\sum_{m=1}^{\infty} a_m x^m$ genügen kann. Sein Beweis, der in der Gestalt, auf die ihn Briot und Bouquet (J. éc. polyt. cah. 36 (1856), S. 136) gebracht haben, in die Lehrbücher übergegangen ist, beruht bekanntlich darauf, daß der vorgelegten Differentialgleichung (1) eine Hilfsgleichung an die Seite gestellt wird, auf deren rechter Seite eine Majorante der gegebenen Potenzreihe steht, d. h. eine Potenzreihe mit lauter positiven Koeffizienten, die nicht kleiner, vielmehr im allgemeinen größer sind als die entsprechenden Koeffizienten in der gegebenen Potenzreihe. Als Majorante nimmt Cauchy die Funktion

$$\mathfrak{M}(x, y) = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{r}\right)\left(1 - \frac{y}{s}\right)},$$

wo M wieder das Maximum des absoluten Betrages der Potenzreihe für $|x| = r$, $|y| = s$ bezeichnet. Der Hilfsgleichung:

$$(2) \qquad \frac{dY}{dx} = \sum_{(h,\, k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots\, \infty)} M r^{-h} s^{-k} x^h Y^k$$

genügt man bei der Anfangsbedingung $x = 0$, $Y = 0$ durch das Integral:

$$Y = s - s\sqrt{1 + \frac{2Mr}{s} \log\left(1 - \frac{x}{r}\right)},$$

das sich in eine Potenzreihe $\sum_{m=1}^{\infty} A_m x^m$ mit lauter positiven Koeffizienten entwickeln läßt, die für

$$(3) \qquad |x| < r\left(1 - e^{-\frac{s}{2Mr}}\right)$$

konvergiert. Wird andererseits das gesuchte Integral y vermöge der Differentialgleichung (1) formal nach dem Taylorschen Satze entwickelt, so ergibt sich eine Potenzreihe $\sum_{m=1}^{\infty} a_m x^m$, deren Konvergenz mindestens für den Bereich (3) sich aus den Ungleichheiten

$$|a_m| \leq A_m$$

erschließen läßt.

Man überzeugt sich sofort davon, daß das Beweisverfahren Wort für Wort gültig bleibt, wenn man die Größe M überall durch die Größe G, also durch den größten Wert unter den absoluten Beträgen der Reihenglieder $c_{hk} x^h y^k$ für $|x| = r$, $|y| = s$, ersetzt, denn wegen der Ungleichheiten (G) ist auch die Funktion

$$\mathfrak{M}_1(x, y) = \frac{G}{\left(1 - \frac{x}{r}\right)\left(1 - \frac{y}{s}\right)}$$

eine Majorante. Ihre Benutzung hat zwei Vorteile. Erstens ergibt sich für das gesuchte Integral als Konvergenzbereich mindestens der Bereich:

(4) $$|x| < r\left(1 - e^{-\frac{s}{2Gr}}\right),$$

der im allgemeinen *größer* ist, als der Bereich (3); hieraus erhält man eine Aufklärung über ein von É. Picard gefundenes Paradoxon (Traité d'analyse, T. II, Paris 1893, S. 313, vergl. meine Note Paris C. R. 126 (1898), S. 203). Zweitens wird es so möglich, den Existenzbeweis auch in elementaren Vorlesungen zu bringen, *bei denen man die Theorie der Funktionen komplexer Veränderlicher nicht heranziehen darf.* Versucht man aber, den Existenzbeweis mit der Maßgabe durchzuführen, daß die Koeffizienten der Potenzreihe c_{hk} *reell* sind und daß man auch bei den Veränderlichen ganz im *reellen* Gebiete bleibt, so macht es erhebliche Schwierigkeiten zu zeigen, daß die Potenzreihe für das Hilfsintegral Y in dem Gebiete (4) konvergiert. Aus diesem Grunde habe ich noch eine weitere Abänderung des Beweises vorgenommen, ich verwende nämlich als Majorante den Ausdruck:

$$\mathfrak{M}^*(x, y) = \frac{G}{\left(1 - \frac{x}{r}\right)^2\left(1 - \frac{y}{s}\right)},$$

denn die zugehörige Hilfsgleichung

$$\frac{dY^*}{dx} = \sum_{(h,\, k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots\, \infty)} G(h+1) r^{-h} s^{-k} x^h Y^{*k}$$

besitzt bei der Anfangsbedingung $x = 0$, $Y^* = 0$ das Integral:

$$Y^* = s - s\left(1 - \frac{x}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{r} + \frac{2G}{s}\right)x\right]^{\frac{1}{2}},$$

das sich mittels des binomischen Satzes für die Exponenten $\pm \frac{1}{2}$ in eine für

(5) $$|x| < r \cdot \frac{s}{s + 2G}$$

konvergente Potenzreihe entwickeln läßt; daß der Bereich (5) kleiner ist, als der Bereich (4) schadet nichts, solange es nur darauf ankommt zu zeigen, daß die Reihe für y überhaupt konvergent ist. Der so vereinfachte Beweis wird in die nächste Auflage der Integralrechnung von Kiepert aufgenommen werden.

Entsprechende Betrachtungen gelten auch für andere Existenzbeweise.

3. *Daß es nicht immer möglich ist, die Ungleichheiten (M) durch die Ungleichheiten (G) zu ersetzen, zeigt das Beispiel des Weierstraßschen Doppelreihensatzes*, der sich so aussprechen läßt. Gegeben seien die Potenzreihen

$$\mathfrak{P}_n(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h^{(n)} x^h \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots \infty),$$

die sämtlich für $|x| \leqq R$ konvergieren mögen. Wenn die Summe

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{P}_n(x)$$

für einen bestimmten Bereich

$$|x| = r < R$$

gleichmäßig konvergiert, so konvergieren die Summen

$$A_h = \sum_{n=0}^{\infty} a_h^{(n)} \qquad (h = 0, 1, 2, \ldots \infty),$$

und die Potenzreihe

$$\sum_{h=0}^{\infty} A_h x^h$$

ist für $|x| < r$ konvergent und hat zur Summe $F(x)$.[1])

Aus der Voraussetzung der gleichmäßigen Konvergenz folgt nämlich, daß, nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Größe δ, eine ganze Zahl N so bestimmt werden kann, daß für jede Zahl N_1, die größer ist als N, in dem Bereiche $|x| = r$ die Ungleichheit gilt:

$$\left| \sum_{h=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=N}^{N_1} a_h^{(n)} \right\} x^h \right| < \delta,$$

und hieraus erschließt man vermöge der Cauchy-Weierstraßschen Ungleichheiten, daß für jeden Wert von h:

$$\left| \sum_{n=N}^{N_1} a_h^{(n)} \right| < \delta r^{-h}$$

ist. *Das ist der Kern des Beweises*, denn jetzt ergibt sich sofort, daß die Summen A_h konvergieren und ebenso, daß für $|x| < r$ die Potenzreihe $\sum_{h=0}^{\infty} A_h x^h$ konvergent ist und den angegebenen Wert zur Summe hat.

1) Vielfach, so z. B. bei Vivanti-Gutzmer, *Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen*, Leipzig 1906, S. 83, wird verlangt, daß die Summe $F(x)$ für jeden Bereich $|x| = \varrho$ gleichmäßig konvergiere, bei dem ϱ zwischen Null und einer positiven Größe $r_1 < R$ aber $> r$ liegt, und daraus der Doppelreihensatz für den Bereich $|x| \leqq r$ bewiesen. Zum Beweise der Konvergenz für $|x| < r$ genügt aber schon die im Texte angegebene geringere Voraussetzung.

Schon dieses Beispiel läßt die wahre Bedeutung der Cauchy-Weierstraß*schen Ungleichheiten erkennen. Sie sind unentbehrlich, wenn es sich darum handelt, Ungleichheiten der Form*

(K) $$|c_h| < Kr^{-h} \qquad (h = 0, 1, 2, \ldots \infty)$$

herzustellen, wobei die Koeffizienten c_h *der betrachteten Potenzreihe zwar genau definiert sind, sich aber der Untersuchung in bezug auf die Größe der absoluten Beträge entziehen.*[1]) Wenn man nämlich weiß, daß der absolute Betrag der Funktion, zu deren Darstellung die Potenzreihe dient, für $|x| = r$ kleiner ist als eine Größe K, so darf man diese Größe K in (K) benutzen. Die Ungleichheiten (M) oder (K) spielen daher eine ähnliche Rolle wie die singulären Stellen, denn der wahre Konvergenzradius einer Potenzreihe läßt sich zwar nach dem bekannten Verfahren von Cauchy, das Hadamard wieder in Erinnerung gebracht hat, bestimmen, wenn man nur die absoluten Beträge der Koeffizienten c_h kennt, allein in der Praxis der Funktionentheorie verwendet man meistens den Satz, daß die Potenzreihe bis zum nächsten singulären Punkte konvergiert und darüber hinaus divergiert. In beiden Fällen, bei Ungleichheiten der Form (K) und dem wahren Konvergenzradius, ist es an sich möglich, mit reellen Größen auszukommen, aber erst die Einführung der komplexen Größen hat die Hilfsmittel an die Hand gegeben, die zur Ausbildung der Funktionentheorie geführt haben.[2])

4. Bei der Herleitung der Ungleichheiten (G) wurde vorausgesetzt, daß die Potenzreihe $\mathfrak{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ für den Bereich:

(B) $$|x_1| = r_1, \; |x_2| = r_2, \; \ldots, \; |x_n| = r_n$$

unbedingt konvergiere. Bei Potenzreihen mit *einer* Veränderlichen genügt es jedoch, vorauszusetzen, daß überhaupt nur Konvergenz für einen Wert x mit dem absoluten Betrage r stattfindet, denn daraus erschließt man, daß die absoluten Beträge der Reihenglieder eine endliche obere Schranke G haben, und aus den Ungleichheiten

$$|c_h| \leqq Gr^{-h}$$

1) Es ist gewiß kein Zufall, daß Weierstraß gerade bei dem Beweise seines Doppelreihensatzes die Ungleichheiten (M) herleitet (Werke, Bd. II, S. 224).

2) In der Einleitung zu seinem Artikel *Allgemeine Theorie der analytischen Funktionen einer und mehrerer komplexer Größen,* Encykl. d. math. Wissensch. II 2, S. 7—8, zeigt F. W. Osgood, wie die beiden Aufgaben der Bestimmung des Restes einer Potenzreihe und ihres wahren Konvergenzradius zur Einführung der komplexen Größen geführt haben. Ich vermisse jedoch dabei die ausdrückliche Angabe, daß diese Aufgaben, wenn die Veränderlichen und die Koeffizienten dem reellen Gebiete angehören, an sich auch im reellen Gebiete gelöst werden können, sodaß die Einführung der komplexen Größen nicht notwendig, wohl aber zweckmäßig ist.

folgt alsdann, daß die Potenzreihe $\sum_{h=0}^{\infty} c_h x^h$ für $|x| < r$ unbedingt und gleichmäßig konvergiert. *Anders steht es bei Potenzreihen mit zwei und mehr Veränderlichen, denn aus der bloßen Konvergenz einer Doppelreihe folgt bekanntlich noch nicht, daß die absoluten Beträge der Reihenglieder eine endliche obere Schranke haben, zu diesem Schluß berechtigt vielmehr erst die unbedingte Konvergenz.*[1] *Es geht aber sehr weit, wenn man bei Potenzreihen mit mehreren Veränderlichen Konvergenz bei jeder beliebigen Umordnung der Terme verlangt, und es entsteht die Frage, ob man nicht mit geringeren Voraussetzungen ausreicht.* Mit diesem Gegenstande habe ich mich schon im Jahre 1899 beschäftigt, wovon eine Besprechung der Funktionentheorie von L. Bianchi in dem Jahrbuche über die Fortschritte der Mathematik, Band 29, S. 330 Zeugnis gibt, ohne damals befriedigende Ergebnisse zu erlangen. Meine Bemerkung in dem Jahrbuche ist jedoch die Veranlassung gewesen, daß neuerdings Fritz Hartogs in zwei bemerkenswerten Arbeiten[2]) darauf eingegangen ist. Angeregt durch seine Untersuchungen und durch einen Briefwechsel mit ihm bin ich erneut auf die Frage zurückgekommen. Bei dem Bericht über meine Untersuchungen beschränke ich mich der Einfachheit halber auf den Fall von zwei Veränderlichen.

Wenn man auf die Weierstraßsche Art die Ungleichheiten (M) für eine Potenzreihe:

$$\mathfrak{P}(x,\ y) = \sum_{(h,\,k=0,\,1,\,2,\,\ldots\,\infty)} c_{hk} x^h y^k$$

herleitet, braucht man nur zu wissen, daß die Reihe für das Gebiet

$$\text{(B)} \qquad |x| = r, \quad |y| = s$$

gleichmäßig konvergiert, d. h., daß der Rest der Reihe, nämlich die Differenz:

$$\mathfrak{P}(x, y) - \sum_{h=0}^{L_1} \sum_{k=0}^{L_2} c_{hk} x^h y^k$$

in (B) für alle Zahlen L_1, L_2, die über einer gewissen Zahl L liegen,

1) Vergl. A. Pringsheim, *Elementare Theorie der unendlichen Doppelreihen*, Berichte München 1897, § 2.

2) Beiträge zur elementaren Theorie der Potenzreihen und der eindeutigen analytischen Funktionen zweier Veränderlichen, Dissertation, München 1903. Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen, insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen, welche nach Potenzen einer Veränderlichen fortschreiten, Habilitationsschrift, München 1905, abgedruckt Math. Ann. 62 (1906), S. 1—88.

absolut kleiner als eine gegebene, beliebig kleine positive Zahl δ ausfällt. Gelten aber die Ungleichheiten

$$|c_{hk}| \leqq M \cdot r^{-h} s^{-k},$$

so folgt, daß *die Reihe im Innern des Gebietes* (B) *also für*

(C) $$|x| < r, \quad |y| < s$$

unbedingt und gleichmäßig konvergiert. Mit diesem Satze wird man freilich nicht viel ausrichten können, denn um zu beweisen, daß die Potenzreihe für das Gebiet (B) *gleichmäßig* konvergiert, wird man im allgemeinen zuerst zeigen müssen, daß sie dafür *unbedingt* konvergiert.

Nach dieser Vorbereitung seien gegeben die Potenzreihen:

$$\mathfrak{P}_n(x, y) = \sum_{(h, k = 0, 1, 2, \ldots \infty)} a_{hk}^{(n)} x^h y^k,$$

die sämtlich für das Gebiet:

(B) $$|x| = r, \quad |y| = s$$

gleichmäßig konvergieren mögen. Die Summe:

$$F(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{P}_n(x, y)$$

sei in diesem Bereiche ebenfalls gleichmäßig konvergent, d. h. nach Annahme einer beliebig kleinen, positiven Zahl δ lasse sich eine solche ganze Zahl N bestimmen, daß für jede Zahl N_1, die größer als N ist, in dem Gebiete (B) die Ungleichheit gilt:

$$\left| \sum_{h, k} \left\{ \sum_{n=N}^{N_1} a_{hk}^{(n)} \right\} x^h y^k \right| < \delta.$$

Da die Summe auf der linken Seite ebenfalls gleichmäßig konvergiert, so folgen hieraus die Ungleichheiten:

$$\left| \sum_{n=N}^{N_1} a_{hk}^{(n)} \right| < \delta r^{-h} s^{-k},$$

aus denen man wiederum die Konvergenz der Summen

$$A_{hk} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{hk}^{(n)}$$

und die *unbedingte* Konvergenz der Potenzreihe

$$\sum_{(h, k = 0, 1, 2, \ldots \infty)} A_{hk} x^h y^k$$

für $|x| < r\,|y| < s$ erschließt, d. h. *eine in* (B) *gleichmäßig konvergente Summe von Potenzreihen, die auf* (B) *ebenfalls gleichmäßig konvergieren, darf man zu einer einzigen Potenzreihe vereinigen, und diese Potenzreihe konvergiert unbedingt im Innern von* (B).

Aus diesem Doppelreihensatze für Potenzreihen von zwei Veränderlichen läßt sich sofort eine wichtige Folgerung ziehen. *Man möge die Doppelreihe $\mathfrak{P}(x, y)$ irgendwie in eine einfache Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y)$$

umordnen, deren Glieder $u_n(x, y)$ aus Termen $c_{hk}x^h y^k$ der ursprünglichen Reihe in endlicher oder auch unendlicher Anzahl bestehen. Wenn die so erhaltenen Potenzreihen $u_n(x, y)$ in einem Bereiche (B) *sämtlich gleichmäßig konvergieren und für ihre Summe dasselbe gilt, so darf man diese Summe in die Reihe $\mathfrak{P}(x, y)$ zurückverwandeln, aber man weiß jetzt, daß diese Reihe für jeden Bereich im Innern von* (B) *unbedingt konvergiert.*[1]) Die Bedingung der gleichmäßigen Konvergenz für die Potenzreihen $u_n(x, y)$ wird im besonderen sicher erfüllt sein, wenn die $u_n(x, y)$ *ganze rationale Funktionen* von x und y sind.

In diesem Theoreme sind verschiedene Sätze von Hartogs enthalten, jedoch, was ich ausdrücklich hervorheben möchte, keineswegs alle. Diesem ist es nämlich gelungen, sich in zwei Fällen von der Voraussetzung der gleichmäßigen Konvergenz zu befreien und die bloße Konvergenz als Voraussetzung zu nehmen. Diese Fälle sind die folgenden:

1. *Konvergiert die Potenzreihe $\mathfrak{P}(x, y)$ als Doppelreihe in dem Sinne von Pringsheim in dem Bereiche*

(A) $$|x| \leqq r, \quad |y| \leqq s,$$

so konvergiert sie unbedingt innerhalb dieses Bereiches.

2. *Konvergiert die „Diagonalenreihe“:*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \sum_{h=0}^{j} c_{h,\, j-h} x^h y^{j-h} \right\}$$

für $y = b$ und $|x| \leqq r$, so konvergiert die Potenzreihe unbedingt innerhalb des Gebietes $|x| \leqq r$, $|y| \leqq |b|$.

1) Einen Beweis für diesen besonderen Fall des Satzes hatten zuerst Fritz Hartogs und ich in gemeinsamer Arbeit gefunden. Er beruhte im wesentlichen auf denselben Überlegungen, die bei dem allgemeinen Satz zum Ziele führen; nur war uns der Zusammenhang mit der Ausdehnung des Weierstraßschen Doppelreihensatzes auf Potenzreihen von mehreren Veränderlichen nicht zum Bewußtsein gekommen, auf den uns erst nachträglich eine Bemerkung von G. Faber aufmerksam gemacht hat.

Ich möchte diesen Sätzen noch einen dritten hinzufügen. Nach Hartogs (Habilitationsschrift S. 13, Anmerkung) gilt der Satz:

Konvergiert die „Zeilenreihe“:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\sum_{h=0}^{\infty} c_{hk} x^h\right\} y^k$$

für $y = b$ gleichmäßig in bezug auf die Kreislinie $|x| = r$, so konvergiert die Potenzreihe unbedingt in dem Gebiete $|x| < r$, $|y| < |b|$.

Hierin läßt sich die Bedingung der gleichmäßigen Konvergenz durch die geringere ersetzen, daß *die Zeilenreihe in dem angegebenen Gebiete konvergiert und ihre Summe eine endliche obere Schranke M hat.* Bezeichnet man nämlich den absoluten Betrag von b mit s, so folgt aus dieser Voraussetzung, daß für alle Werte von k die Ungleichheit

$$\left|\sum_{h=0}^{\infty} c_{hk} x^h\right| \leqq M \cdot s^{-k} \qquad (|x| = r)$$

gilt, und mithin ist

$$|c_{hk}| \leqq M r^{-h} s^{-k},$$

woraus die Behauptung sofort folgt.

Die weiteren Anstrengungen würde man daher auf das Problem zu richten haben, *ob sich die Voraussetzung der gleichmäßigen Konvergenz einer aus der Doppelreihe entstandenen einfachen Reihe für das Gebiet* (B) *durch geringere Voraussetzungen ersetzen läßt, etwa durch die Voraussetzung der Konvergenz zusammen mit der Existenz einer endlichen oberen Schranke für die absoluten Werte der Summe in diesem Bereiche.*

Daß die Voraussetzung der Konvergenz für sich allein nicht immer ausreicht, und sogar auch dann, wenn jedes der Glieder $u_n(x, y)$ aus einer *endlichen* Anzahl von Termen $c_{hk} x^h y^k$ besteht, ergibt sich unmittelbar aus einem Beispiel, auf das mich Hartogs aufmerksam gemacht hat. Dieser konstruiert nämlich in seiner Dissertation S. 70—71 eine Doppelreihe, die, außer für $x = 0$ und $y = 0$, nirgend unbedingt konvergiert, deren Zeilenreihe aber für jedes endliche Wertsystem x, y konvergent ist und bei der überdies jede Zeile nur eine endliche Anzahl nicht verschwindender Terme enthält.

On Mr. Mikami's Essay and Prof. Harzer's Remark.

In order to compose his very interesting paper "Die exakten Wissenschaften im alten Japan" (Jahresbericht, Bd. XIV, p. 312—339), Prof. P. Harzer kindly used my work „A brief history of the Japanese mathematics" (Nieuw Archief voor Wiskunde, tweede reeks, deel VII). So, according to my work, Prof. Harzer took Matsumura for one of the famous forty-seven Akō ronins (Jahresbericht, Bd. XIV, p. 316 and Bd. XV, p. 330). I will here correct the error in my work and I will say that Matsumura is the father of the two of the forty-seven vassals, but is himself not one of the ronins, though he and his two sons, one adopted and the other true (as Mr. Mikami says in the Jahresbericht, Bd. XV, p. 258), served the same lord of Akō.

Next, the name Matsumura is not correct; it must be Muramatsu (Jahresbericht, Bd. XV, p. 255). This error came from my careless adoption of Mr. Endō's view in his "Dai-Nihon Sūgakushi" or history of mathematics in great Japan. The same must be said about the names Ōta and Ōtaka (Jahresbericht, Bd. XV, p. 255).

Lastly, the name Isomura is also wrong (Jahresbericht, Bd. XV, p. 258), though the two great authorities Mr. Endō (in his history) and Mr. Kawakita (in the Tokyo Sūgaku-Butsurigakkwai Kiji, Vol. III, p. 173) changed the Chinese ideograms representing the name Iwamura into those designating as Isomura. The Kwatsuyō-sampō compiled by Ōtaka and the Sampo-ketsugishō by Iwamura are contained in my library. According to these books and other writings, I publish the above corrections.

September 7, 1906. T. Hayashi.

Antwort auf die Ferienplauderei des Herrn Thomae.

Von G. Frege in Jena.

Ich habe im zweiten Bande meiner Grundgesetze der Arithmetik[1]) auf den Seiten 80 bis 153 die bekanntesten Theorien der Irrationalzahlen kritisch besprochen. Das war eine wenig erquickliche Arbeit. Das Zerstören befriedigt ja immer weniger als das Aufbauen und findet auch weniger Anerkennung; denn zunächst wenigstens erweckt man sich dadurch fast nur Gegner. Ich habe mich allen Ernstes bemüht, mich in fremde Ausdrucksweisen und Gedankengänge zu finden, einsehend, daß nur bei

1) Jena, Pohle, 1903.

großer Gründlichkeit und dem Bestreben, auch den fremdesten Theorien Gerechtigkeit widerfahren zu lassen, eine solche Arbeit wertvoll sein kann. Es verlangte große Entsagung von mir, Wegen nachzugehen, die ich von vornherein als Irrwege erkannte, nur um im einzelnen nachzuweisen, daß sie Irrwege wären, ohne hoffen zu können, aus dieser Beschäftigung mit fremden Gedanken irgend etwas Wertvolles zu erlernen. Dennoch habe ich mich dieser Arbeit unterzogen der Wissenschaft wegen, weil nur, nachdem die Wertlosigkeit aller Surrogate erkannt worden ist, das Verlangen nach dem Echten aufkommen kann. Ich möchte nicht nur mir, sondern auch der Wissenschaft wünschen, daß recht viele mit ebensolcher Gründlichkeit sich in meine Schriften, in meine Gedankengänge einzuleben versuchen möchten, mit ebensolchem Bestreben, ihnen gerecht zu werden.

Ich bin überzeugt, mit meiner Kritik der Thomaeschen formalen Arithmetik diese für immer vernichtet zu haben, und in dieser Überzeugung kann mich die Ferienplauderei des Herrn Thomae (diese Jahresber. XV S. 434) nur bestärken. Selbst wenn Herr Thomae darin überall recht hätte, bliebe von meiner Kritik genug übrig, um seine formale Theorie zu Fall zu bringen. Und wie verfährt er in dieser Plauderei? Er wiederholt seine Behauptungen, ohne meine Gegengründe auch nur anzuführen. Meine Unterscheidungen — z. B. von Figuren und Zeichen, von Spiel und Theorie des Spiels — unterschlägt er und verdunkelt dadurch das wieder, was ich aufgehellt hatte. Meine Sätze führt er so an, daß der Leser nicht merken kann, wie ich sie gemeint oder welche Gründe ich für sie gehabt habe.[1]) Sehr einfach! Die Leser, die sich die Mühe geben, die Thomaesche Ferienplauderei mit meinen Ausführungen auf den Seiten 96 bis 139 des zweiten Bandes meiner Grundgesetze zu vergleichen, werden, glaube ich, finden, daß alles von Herrn Thomae gegen mich Vorgebrachte dort schon von mir widerlegt ist, mit Ausnahme vielleicht eines Punktes, auf den ich noch genauer eingehen werde. Da es in Kürze geschehen kann, will ich nur aus meinem Inhaltsverzeichnisse etwas anführen. Dort ist zu lesen S. IX:

„§ 93. Im Rechenspiele gibt es weder Lehrsätze noch Beweise, noch Definitionen, wohl aber in der Theorie dieses Spieles."

Damit ist ein Teil der Thomaeschen Ausführungen als Lufthieb gekennzeichnet. Man sollte manchmal fast denken, Herr Thomae habe das von ihm Bekämpfte gar nicht gelesen.

Ich weiß nicht, welchen Nutzen man sich von solcher Polemik versprechen kann. Ob wohl außer Herrn Thomae selbst und Herrn Korselt[2]) überhaupt jemand an das Thomaesche Rechenspiel glaubt? Ich würde es weniger bedauern, dieser Sache so viel Zeit und Kraft geopfert zu haben, wenn Herr Thomae sich darüber geäußert hätte, ob z. B. meine Vermutung über Addition und Subtraktion im Rechenspiele richtig sei. Ich habe noch manche solche Fragen angeregt. Ihre Beantwortung würde wenigstens die

1) Wie es scheint, hat Herr Thomae meine Sätze nicht verstanden.

2) Man vergl. seinen Aufsatz Über die Grundlagen der Mathematik (Jahresbericht XIV). Man sieht daraus, daß er an das Thomaesche Rechenspiel nur bedingungsweise glaubt. Er meint (S. 382), die Thomaeschen Spielregeln können nur als Anregung für den Entwurf einer wirklich formalen Theorie angesehen werden. Nun ich warte ab, bis Herr Korselt eine solche zu stande gebracht haben wird. Dann wird weiter darüber zu sprechen sein.

Entwicklung etwas vorwärts bringen, und es könnte immerhin ein kleiner Nutzen für die Wissenschaft herausspringen. Aber Herr Thomae wird wohl wissen, warum er darüber schweigt. Sein Hauptfehler besteht ja darin, daß er immer aus seiner Rolle als Formalarithmetiker fällt und vieles aus der inhaltlichen in die formale Arithmetik herübernimmt, was dort hinpaßt wie die Faust aufs Auge, ohne zu merken, daß die formale Arithmetik überflüssig ist, wenn sie die inhaltliche voraussetzen muß. In der Tat bleibt von der formalen Arithmetik, wenn man alles wegnimmt, was aus der inhaltlichen stammt, fast nichts übrig als einige unglaubhafte Behauptungen. Herr Thomae nennt die Zahlen Zeichen und meint damit offenbar räumliche, stoffliche Dinge; aber er macht nie Ernst damit, und wenn von andrer Seite Ernst damit gemacht wird, nimmt er es übel. Man vergleiche dazu das, was er in seiner Ferienplauderei über das Wachsen der Drei sagt. Dieses Übel scheint bei ihm unheilbar zu sein.

Was Herr Thomae auf S. 436 über das Wort „identisch" sagt, ist für einen Verteidiger in einem Mordprozesse gut zu verwenden, der den Identitätsbeweis des Staatsanwalts zu entkräften hat. Ich habe eine für diesen Fall passende Rede ausgearbeitet, verzichte aber auf deren Mitteilung in der Annahme, daß die Leser imstande sein werden, sich weit schönere Reden dieser Art selbst zu machen. Doch nicht nur juristisch, sogar poetisch bin ich durch Herrn Thomae angeregt worden. Als ich gelesen hatte, was er über das Abstrahieren sagt, machte ich meinen Gefühlen Luft in dem Verse:

„Wohl tut des Abstrahierens Macht,
Wenn es der Mensch bezähmt, bewacht;
Doch furchtbar wird die Himmelskraft,
Wenn sie der Fessel sich entrafft."

Ja, gefährlich ist das Thomaesche Abstrahieren doch wohl. Man nehme z. B. den Fall, der menschliche Verstand in seiner souveränen Schöpferkraft, der Natur ihre Gesetze vorschreibend, bilde einen Begriff *Weißpulver* und richte diesen Begriff so ein, daß das kohlensaure Natron dasselbe Weißpulver ist wie der Arsenik. Man wird gut tun, mit dem Abstrahieren recht vorsichtig umzugehen. Vergessen wir darüber aber die wohltätigen Wirkungen nicht!

Man abstrahiert von der Verschiedenheit von Figur und Zeichen, und sofort sind Figuren Zeichen und Zeichen Figuren. Man abstrahiert von dem, wodurch sich die Beziehung einer Figur zu ihrer Rolle im Spiele unterscheidet von der Beziehung eines Zeichens zu seiner Bedeutung, und flugs fällt beides zusammen. Man abstrahiert von der Verschiedenheit von Zeichen und Bezeichnetem, und alsbald fließen sie in eins zusammen. Man abstrahiert von der Verschiedenheit von Regel und Lehrsatz, und siehe da: sie sind identisch. Man abstrahiert von der Verschiedenheit von formaler und inhaltlicher Arithmetik, von Spiel und Wissenschaft, und kein Mensch kann sie mehr auseinander halten. Alles sehr wichtig und besonders für die formale Arithmetik des Herrn Thomae. Verrichtete das Abstrahieren nicht jene Wunder, könnte diese nicht eine Sekunde mehr leben.

Doch nun nach dem Scherze auch ein wenig Ernst! Wir sind wohl darüber einig, daß die Zeitbestimmung zum Prädikate gehört, daß ein

Gegenstand zu einer Zeit eine Eigenschaft haben kann, die er zu einer andern nicht hat. Ein Mensch kann zu einer Zeit keine Kenntnis des Einmaleins haben, zu einer andern Zeit kann er es kennen. Doch ist er derselbe, und dazu bedarf es keiner Abstraktion.

Nun schreibt Herr Thomae weiter: „Ähnlich abstrahiert der, der zählen lernt, von der Verschiedenheit der Rechensteine, an denen er es lernt, setzt sie einander gleich. In dieser Möglichkeit oder Fähigkeit des menschlichen Verstandes, von der Verschiedenheit gewisser Dinge zu abstrahieren, sie einander gleich zu setzen, glaubte ich die Fruchtbarkeit des Gleichheitszeichens zu erkennen" . . .

Also wirklich! Immer wieder dieselbe Halbheit und Schwächlichkeit des Denkens, die nicht weiß, ob sie mit dem Worte „gleich" Identität bezeichnen will oder was sonst. Nach dem, was er vorher gesagt, scheint Herr Thomae durch das Abstrahieren Identität erzielen zu wollen. Nun gut! Werden die Rechensteine dadurch identisch, so haben wir nunmehr nur noch einen Rechenstein; das Zählen kommt nicht über „eins" hinaus. Wer Dinge, die er zählen soll, nicht unterscheiden kann, der kann sie auch nicht zählen. Auch wer zählen lernt, muß die Rechensteine unterscheiden, z. B. an ihrer verschiedenen Entfernung vom Tischrande. Die Rechensteine müssen verschieden sein, und diese Verschiedenheit muß auch erkannt werden. Brächte die Abstraktion alle Unterschiede zum Verschwinden, so höbe sie die Möglichkeit des Zählens auf. Andrerseits, wenn das Wort „gleich" keine Identität bezeichnen soll, nun dann unterscheiden sich die gleichen Gegenstände also in einigen Eigenschaften, in anderen stimmen sie überein. Um das zu wissen, brauchen wir nicht erst von der Verschiedenheit zu abstrahieren. Da die Gegenstände nun doch einmal verschieden sein müssen, kommt es wirklich nicht darauf an, ob sie ein bischen mehr oder ein bischen weniger verschieden sind, wenn sie nur überhaupt unterscheidbar sind. Sehen, leibliches wie geistiges, ist Unterscheiden. Die Thomaesche Abstraktion ist ein Nichtunterscheiden, ein Nichtsehen; sie ist nicht eine Kraft der Einsicht und der Klarheit, sondern eine Kraft der Verdunkelung und der Verwirrung. Wenn mit dem Worte „gleich" nicht Identität, sondern nur eine Übereinstimmung in irgendeiner Hinsicht gemeint ist, so muß angegeben werden oder aus dem Zusammenhange erkennbar sein, in welcher Hinsicht: gleich in der Farbe oder gleich an Duft usw. Das bloße Wort „gleich" ist nichtssagend, wenn es nicht irgendwie genauer erklärt wird. Und wenn der menschliche Verstand beliebige Gegenstände einander gleichsetzen kann, so ist mit dem Worte „gleich" erst recht nichts gesagt; und was mit dem Gleichsetzen gemeint sei, bleibt dunkel. Man bilde sich doch nicht ein, durch Abstrahieren und Gleichsetzen eine größere Übereinstimmung erreichen zu können, als in Wahrheit besteht. An den Dingen ändert man dadurch nichts. Das einzige, was man so erreichen kann, ist Irrtum hinsichtlich der Dinge. Wenn das Gleichheitszeichen in der Arithmetik eine so nebelhaft unfaßbare Bedeutung haben sollte, wäre es unbrauchbar. Bei den Denkern von der Art des Herrn Thomae findet man, daß sie das eine wollen und auch das andere, das aber mit dem ersten nicht verträglich ist. Was wollen sie mit dem Abstrahieren erreichen? Sie wollen, ja sie wollen eigentlich die Identität; denn was nützte ihnen eine teilweise Übereinstimmung, die sie auch ohne Abstraktion schon haben!

aber Ernst machen mit der Identität? nein, das wollen sie doch nicht. Durch das Gleichsetzen sollen die Dinge identisch werden — als ob sie sich daran kehrten —; aber unterscheidbar, ja unterscheidbar müssen sie doch bleiben. Und — in der Ausdrucksweise des Herrn Thomae gesprochen — das äußere Zeichen dieses schwächlichen Verhaltens ist das Wort „gleich."

Warum muß ich denn immer dieselben Gründe wiederholen? Vor nunmehr 22 Jahren habe ich in meinen *Grundlagen der Arithmetik*[1]) in den §§ 34—48 ausführlich alles dargelegt, was für unsere Frage in Betracht kommt; insbesondere habe ich in § 48 den Grund angegeben, warum man durch Abstraktion die Zahl gewinnen wolle. Soll denn alle Mühe vergeblich sein, die ich mir gegeben habe, so gründlich und so eindringlich und verständlich wie möglich, Gründe und Gegengründe abwägend, diese Fragen zu erörtern, soll alle Mühe vergeblich gewesen sein? Soll das alles in den Wind geschrieben sein? Damals vor 22 Jahren und auch später konnte selbst ein Weierstraß einen wunderlichen Gallimathias zu Tage fördern, wenn er auf diese Dinge zu sprechen kam. Nun aber ist es doch endlich an der Zeit, sich die Sache gründlicher zu überlegen, ehe man etwas schreibt. Wenn man meine Gründe widerlegen kann, so tue man es; wenn nicht, so verschone man mich — doch ich will nicht unparlamentarisch werden. Es gibt, wie es scheint, Menschen, von denen logische Gründe abgleiten wie Wassertropfen von einer Öljacke. Auch gibt es wohl Meinungen, die obwohl wiederholt widerlegt[2]), und obwohl nie ein ernstlicher Versuch gemacht ist, diese Widerlegung zu widerlegen, sich immer und immer wieder breit machen, als ob nichts geschehen wäre. Ich bedauere, kein parlamentarisch und literarisch zulässiges Mittel zu kennen, diese Meinungen so in ihre Schlupfwinkel zu scheuchen, daß sie nie wieder ans Tageslicht hervorzukommen wagen.

Erklärung.

Von J. Thomae in Jena.

Vor 22 Jahren hat mir Herr Frege im Gespräch unzweideutig zu erkennen gegeben, daß er mich für unfähig hält, seine tieferen Deduktionen zu begreifen. Jetzt verkündet er dasselbe urbi et orbi. Man erfährt, daß ich ein schwächlicher Denker bin, der in Halbheit steckt, und Herr Frege bedauert nur, nicht parlamentarisch oder literarisch zulässige Mittel zu haben, Meinungen wie die meinigen in ihre Schlupfwinkel zu verjagen, daß sie nicht mehr ans Tageslicht kommen.

Eine solche Tat ist gewiß der Ausfluß von Gewissenhaftigkeit, die dazu zwingt, einen Toren als solchen zu kennzeichnen, um insbesondere die akademische Jugend vor ihm zu warnen, und man wird die Widerlegung meiner Ansicht über den so schwierigen Identitätsbegriff durch den Vergleich meiner Worte mit der Rede eines Advokaten in einem Mordprozesse als eine rein sachliche anerkennen dürfen.

1) Breslau, Koebner, 1884.

2) Man vergl. auch meine Schrift *Über die Zahlen des Herrn H. Schubert,* Jena, Pohle, 1899.

Ich habe nicht die Absicht in eine Polemik mit Herrn Frege einzutreten: aus folgenden Gründen.

Eine solche Auseinandersetzung wird nach allen Seiten hin nutzlos sein. Herrn Frege selbst zu überzeugen wäre ein aussichtsloses Unternehmen. Er geht, wie er selbst sagt, an diese Fragen mit einer im voraus feststehenden unfehlbaren Gewißheit heran. Der Standpunkt der formalen Arithmetik ist falsch. Ob er sich wirklich Mühe geben würde, meine Meinung zu würdigen, ist mir auch fraglich. Er fragt in seinem Buche, meiner Erinnerung nach, mehrere Male „was meint wohl Thomae". Wir haben in der Zeit jener Publikation freundschaftlich miteinander verkehrt, sind wöchentlich mehrere Male zusammengekommen, aber er hat mich nicht ein einziges Mal gefragt, was ich meine. War ihm diese Mühe zu groß? Ich halte es für überflüssig, Freges wegen irgend etwas zu sagen, auch fehlt mir die Zeit dazu.

Aber auch für die andern Mathematiker wird die Sache kein großes Interesse haben. Der eine betreibt seine Arithmetik, indem er die Regeln über die Handhabung der Zahlen einfach anwendet und sich mit ihrer Widerspruchslosigkeit begnügt. Ein andrer glaubt nebenbei das „Ding an sich" der Zahlen zu haben, und macht sich darüber seine Gedanken. Aber die Handhabung der Zahlen oder des Zeichensystems der Zahlen ist bei beiden dieselbe, und jeder ist überzeugt das Richtige damit zu tun. Beim Beweise der Transzendenz der Zahl e ist es völlig gleichgültig, auf welchem der verschiedenen Standpunkte der Analytiker steht. Deshalb ist das Interesse an einer solchen Auseinandersetzung für den Arithmetiker ein geringes und nur der Logiker kommt in Betracht.

Zudem würde ich in einem Kampf mit Herrn Frege im Nachteil sein, weil mir die Waffe der Unfehlbarkeit fehlt. In dieser Beziehung aber hat, nebenbei bemerkt, meine Plauderei einen kleinen Erfolg zu verzeichnen. Vorher hat Frege die formale Arithmetik ein für allemal, also objektiv abgetan. Jetzt ist er nur noch überzeugt, sie vernichtet zu haben, er hat sie also nur noch subjektiv abgetan.

Es wäre eine besondere Erklärung von mir auf den Aufsatz des Herrn Frege nicht nötig gewesen, wenn er darin nur sachlich vorgegangen wäre, ich meine, wenn er nur meinen Intellekt in Frage gestellt hätte. Er beschuldigt mich aber auch der Unterschlagung. Ich habe unterschlagen, daß Herr Frege das Schachspiel in Spiel und Theorie spaltet.

Bei der Abfassung meiner Humoreske hatte ich allerdings diese Fregesche Spaltung nicht im Gedächtnis, bemerkte sie erst bei der Korrektur, nahm aber trotzdem keine Veranlassung etwas hinzuzufügen, um den kostbaren Platz der Berichte nicht zu sehr in Anspruch zu nehmen. Das hat zur Folge, daß ich jetzt um etwas Raum für diese Sache bitten muß.

Im Billardspiel gibt es eine Kunst und eine Theorie des Spieles. Die Theorie beschäftigt sich mit den Gesetzen des Rückstoßes von Kugeln an elastischen Banden oder andern Kugeln, vom Einfluß des Rollens oder der Rotation auf diese Gesetze, und wie man mit dem Stoßstock eine bestimmte Rotation erreichen kann, usw. Der Spieler kümmert sich wohl wenig um die Theorie, er betreibt das Spiel als eine Kunst, die er durch Übung erlangt hat. Aber die Theorie ist da.

Anders im Schachspiel. Hier gibt es keine Theorie, wenn auch Ansätze dazu da sind, eine mathematische Theorie aufzustellen. Sie kommen

hier nicht in Betracht. Das Wort Theorie ist da, aber was bedeutet es. Wenn in einem (älteren) Schachbuche steht: „Das Allgaier Gambit pflegt für das praktische Spiel mindestens auszureichen. Im theoretischen Sinne hat sich die Frage nach dem Werte dieses Angriffes noch nicht erledigen lassen“ was ist da unter „theoretisch“ zu verstehen?

Das praktische Spiel ist ein gebundenes Spiel. Entweder wird ausdrücklich festgelegt, wieviel Zeit jeder Spieler auf einen Zug verwenden darf, oder es wird stillschweigend als Anstandsregel angenommen, daß ein Spieler eine angemessene Bedenkzeit nicht überschreite. Sonst könnte sich jeder Spieler einer Niederlage dadurch entziehen, daß er am Zuge so lange nachdenkt, bis der Gegner die Geduld verliert, und das Spiel aufgibt. Die Theorie aber ist das ungebundene, das freie Spiel. Will jemand den Wert einer Zugfolge theoretisch studieren, so spielt er, nimmt sich zu jedem Zuge so viel Bedenkzeit als er will, nimmt auch einen getanen Zug so oft er will zurück, um ihn durch einen anscheinend bessern zu ersetzen. Daß der Theoretiker über eine gewonnene Stellung ein Urteil fällt, unterscheidet ihn nicht vom Praktiker, nur daß der letztere sich noch öfter darin irren wird als der erstere. Beweise werden in der Theorie ob oculos dadurch geführt, daß ein Spiel so weit und so oft durchgeführt wird, bis der Beweis des behaupteten Satzes erbracht ist. Jedes Problem (Endspiel) kann als Lehrsatz ausgesprochen werden, der durch das Spiel erwiesen wird. Ein Endspiel aber ist eine Stellung, die (nebenbei) einen Gedanken ausdrückt.

Dies über meine Unterschlagung. — Ich sollte meinen, es genüge, dem Gegner Dummheit vorzuwerfen, warum auch noch Unterschlagung.

Diese Zeilen wurden geschrieben, nach Einsicht der ersten vier Seiten der Fregeschen Streitschrift. Ich bitte die Redaktion um Gewährung von Platz für meine Erwiderung, ehe ich den Rest der Polemik kenne. Ich werde ja auf keinen Fall darauf eingehen, und brauche deshalb das Ende nicht abzuwarten.

Wenn ich erkläre, auf die Schrift Freges keine Entgegnung folgen zu lassen, so behalte ich mir doch vor, falls ich noch eine neue Auflage meiner elementaren Funktionentheorie erleben sollte, in deren Einleitung die Zahlenfrage etwas behandelt wird, auf den oder jenen Einwurf des Herrn Frege dort zurückzukommen.

Jena, den 11. November 1906.

Mitteilungen und Nachrichten.

Geeignete Mitteilungen wird der Herausgeber stets mit größtem Danke entgegennehmen.

1. Akademien. Gesellschaften. Vereinigungen. Versammlungen.

Berliner Mathematische Gesellschaft. *Sitzung am Mittwoch den 31. Oktober 1906.* Tagesordnung: Kassenbericht und Bericht der Revisionskommission. — Neuwahl des Vorstandes. — Meißner, Einige Bemerkungen zu Herrn M. Simons Bericht über die Entwicklung der Elementargeometrie im XIX. Jahrhundert. *Sitzung am Mittwoch, den 28. November 1906.* Tagesordnung. Beschlußfassung über die Schaffung einer Redaktions-

kommission. Antrag des Herrn F. Müller betreffend Veranstaltungen zu Eulers hundertstem Geburtstage. — Fleck, Über einen zahlentheoretischen Satz. — Güntsche, Rationale Tetraeder.

Mathematische Sektion der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Kultur. *Sitzung am Dienstag, den 20. November 1906.* Tagesordnung: — Vogt, Windschiefe Raumverwandtschaften. — Kneser, Bemerkung über das isoperimetrische Problem.

Mathematische Gesellschaft in Göttingen. *1. Sitzung am 30. Okt. 1906.* L. Prandtl berichtet über die Konstituierung einer Studiengesellschaft für Motorluftschiffahrt in Berlin und E. Wiechert über den gegenwärtigen Stand des Luftschiffproblems. — *2. Sitzung am 6. Nov. 1906.* C. H. Müller trägt vor über die Anfänge der mathematischen Elastizitätstheorie. — *3. Sitzung am 13. Nov. 1906.* P. Ehrenfest referiert über das Boltzmannsche H-Theorem und zeigt an einem einfachen Beispiel, daß die dagegen erhobenen Einwände einen inneren Widerspruch in demselben nicht aufzeigen.

Versammlung von Lehrern der Mathematik an schweizerischen Mittelschulen. Am 20. Oktober d. J. fand unter dem Vorsitz von Professor Fehr eine Versammlung der schweizerischen Lehrer der Mathematik in Basel statt. Es wurden folgende Vorträge gehalten: Otti, Über die vierstelligen Logarithmentafeln und die Dezimalteilung des Winkels im Mittelschulunterricht; — Kollros, Über die reine Mathematik und die Approximation. Ferner fand eine Debatte über die im mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht nötigen Reformen statt. — Es wurde beschlossen, die nächste Sitzung im Herbst 1907 in Basel abzuhalten, gleichzeitig mit der dann in Basel tagenden Versammlung Deutscher Philologen und Schulmänner. — Professor Fehr wurde als Vorsitzender wiedergewählt.

San Francisco Section of the American Mathematical Society. Am 29. September d. J. fand in der Universität von Californien die 10. ordentliche Sitzung der San Francisco Sektion unter Vorsitz von Prof. R. E. Allardice statt. Die wissenschaftliche Tagesordnung lautete: Allardice, Additional note on the multiple points of unicursal curves. — Blichfeldt, A theorem concerning the Sylow sub-groups of simple groups. — Haskell, On the collineation group belonging to triangles quadruply in perspective. — Hoskins, The effect of viscosity on the propagation of free vibrations in an elastic solid. — Manning, On the order of primitive groups. — Moritz, On the symbolic representation of quotiential coefficients of the second order.

Für das kommende Jahr wurde Professor Wilczynski zum Vorsitzenden gewählt, und es wurde beschlossen, die nächste Sitzung am 23. Februar 1907 in der Stanford Universität abzuhalten.

British Association for the Advancement of Science. Die 76. Jahresversammlung der British Association for the Advancement of science fand vom 3. bis 7. August d J. zu York in England statt. Den Vorsitz der Abteilung für Mathematik und Physik führte Griffiths. Von mathematischem Interesse waren folgende Mitteilungen: Henrici, On the notation and use of vectors. — Hills and Larmor, On the

irregular motion of the earth's pole. — Dixon, Expansions in products of oscillatory functions. — Hudson, On the motion of a particle in a cyclone. — Cunningham, On hypereven numbers. — Forsyth, On the Lagrange equation. — Mac Mahon, Two new symmetrie functions. — Hilton, Finite groups. — Bromwich, On multiple series. — Richardson, Many valued functions of real variables. — Lodge, On methods of computing Bessel functions for large values of the argument. — Betreffs der nächsten Jahresversammlungen wurde beschlossen, 1907 in Leicester, 1908 in Dublin zu tagen und 1909 zum dritten Male Canada zu besuchen, wo die Sitzungen in Winnipeg stattfinden sollen.

2. Preisaufgaben und gekrönte Preisschriften.

(Vacat.)

3. Hochschulnachrichten.

Bayerische Lehramtsprüfung in Mathematik und Physik, Oktober 1906. Zum ersten Abschnitt (Zwischenexamen) hatten sich 94 Kandidaten angemeldet, von denen aber 22 vor und während der schriftlichen Prüfung, die 29 Stunden Klausurarbeit beansprucht, zurücktraten. Von den 72 ins mündliche Examen Getretenen erlangten 3 die Note I, 35 die Note II, 29 die Note III, 5 bestanden nicht. — Zur zweiten (Schluß-) Prüfung waren 61 Kandidaten gemeldet; aber 1 war vor dem Termin gestorben; 8 waren zurückgetreten, sodaß auch ihre eingereichten wissenschaftlichen Arbeiten ungültig geworden sind, 5 wurden schon wegen ungenügender Arbeit zurückgewiesen. Die übrig gebliebenen 47 Kandidaten erzielten um so bessere Resultate: 7 die Note I, 28 eine II, 10 eine III, 2 bestanden nicht. Nur ein Teil der 45 Lehramtspraktikanten kann und will an den an bayerischen Gymnasien bis jetzt eingeführten mathematisch-pädagogischen Seminaren Aufnahme finden. — Übrigens ist zu bemerken, daß die hier aufgeführten Zahlen statistisch insofern etwas zu hoch sind, als sie auch einige wenige Kandidaten aus früheren Jahrgängen umfassen, die zur Aufbesserung ihrer Noten das Examen wiederholt haben.

Universität Neapel. Professor P. Del Pezzo (höhere und Differential-Geometrie) und Professor D. Montesano (projektive und synthetische Geometrie) haben ihre Lehrstühle ausgetauscht.

Promotionen amerikanischer Mathematiker in Europa. Während der letzten sechs Semester fanden folgende Promotionen amerikanischer Mathematiker in Europa statt: J. W. Bradshaw (Straßburg, 1904), Über die Flächendichtigkeit der Elektrizität auf unendlich langen Zylindern. — J. L. Coolidge (Bonn, 1904), The dual projective geometry of elliptic and spherical space. — F. J. Dohmen (Greifswald, 1904), Darstellung der Berührungstransformationen in Konnexkoordinaten. — D. C. Gillespie (Göttingen, 1906), Anwendungen des Unabhängigkeitsatzes auf die Lösung der Differentialgleichung der Variationsrechnung. — A. L. P. Wernicke (Göttingen, 1904), Über die Analysis situs mehrdimensionaler Räume. — W. D. A. Westfall (Göttingen, 1905), Zur Theorie der Integralgleichungen.

4. Personalnachrichten.

Ernennungen, Auszeichnungen usw.:

Dr. J. Adamczik, o. Professor für darstellende Geometrie und Geodäsie an der Montanistischen Hochschule in Pribram, wurde zum o. Professor der Geodäsie an der deutschen technischen Hochschule in Prag ernannt.

Professor L. Bianchi, an der Universität zu Pisa, wurde zum Mitgliede des R. Istituto Veneto ernannt.

Professor Dr. W. Fiedler am Eidgenössischen Polytechnikum in Zürich, wurde von der Bayerischen Akademie der Wissenschaften in München zum korrespondierenden Mitgliede gewählt.

Mgstr. T. Friesendorff, Privatdozent an der Universität St. Petersburg, wurde zum a. o. Professor der angewandten Mathematik am elektrotechnischen Institut Kaiser Alexander III. zu St. Petersburg ernannt.

Professor A. S. Gale wurde zum Professor der Mathematik an der Rochester Universität ernannt.

Sir David Gill, „Royal Astronomer“ in Südafrika, wird sich demnächst von seiner Stellung zurückziehen.

Professor A. G. Greenhill erhielt von der Royal Society in London die Copley-Medaille.

Dr. W. Kohlrausch, Privatdozent an der Universität Rostock, wurde zum Dozenten für mathematische Physik am Telegraphen-Versuchsamt in Berlin ernannt.

Dr. W. Philippe Lagrula, Astronom der Sternwarte in Lyon, wurde zum Direktor der Sternwarte in Quito ernannt.

Professor Dr. M. Lerch an der Universität zu Freiburg (Schweiz) wurde als Nachfolger des in den Ruhestand getretenen Professor A. Sucharda zum o. Professor der Mathematik an der tschechischen Technischen Hochschule in Brünn ernannt.

Dr. M. J. H. Ogburn wurde zum ao. Professor der Mathematik an der Lehigh Universität ernannt.

Dr. v. Oppolzer, a. o. Professor an der Universität Innsbruck, wurde zum o. Professor der Astronomie daselbst ernannt.

Professor Dr. M. Planck an der Universität Berlin wurde zum auswärtigen Mitgliede der schwedischen Akademie der Wissenschaften in Upsala gewählt.

Professor E. Segre, an der Universität zu Turin, wurde zum Mitgliede des R. Istituto Veneto ernannt.

Dr. F. Streintz, a. o. Professor an der Technischen Hochschule zu Graz, wurde zum o. Professor daselbst ernannt.

Professor Dr. A. Trowbridge wurde als Professor der mathematischen Physik an die Universität von Princeton berufen.

Professor Dr. Vogel, Direktor des Astrophysikalischen Observatoriums in Potsdam, wurde zum korrespondierenden Mitgliede der Bayerischen Akademie der Wissenschaften in München gewählt.

Dr. H. de Vries, Professor der Mathematik an der technischen Hochschule in Delft (Holland), wird zum 1. Januar 1907 als o. Professor der Mathematik an die Universität zu Amsterdam übersiedeln.

Habilitation:

Dr. M. Laue hat sich mit einer Antrittsrede über die Entwicklung der Elektrizitätstheorie nach Maxwell und Hertz an der Universität Berlin als Privatdozent der Physik habilitiert.

Gestorben:

Dr. Thomas Harrison, Professor der Mathematik und später Kanzler der Universität in Neu-Braunschweig, ist am 18. September d. J. im Alter von 68 Jahren gestorben.

Professor Dr. Ludwig Matthiessen in Rostock ist daselbst am 14. November 1906 im Alter von 76 Jahren gestorben.

5. Vermischtes.

Steiner-Gedenktafel. Nachdem Prof. Dr. J. H. Graf-Bern, wie aus seiner Publikation „Beiträge zur Biographie Jakob Steiners, Mitteilungen der Naturforscher-Gesellschaft Bern 1905“ hervorgeht, das Sterbehaus Jakob Steiners in Bern festgestellt hat, ist vom Verschönerungsverein dieser Stadt am Hause Kramgasse Nr. 38 eine nett ausgeführte Gedenktafel mit folgender Inschrift angebracht worden: „In diesem Hause starb der Mathematiker Jakob Steiner v. Utzenstorf. — Professor und Mitglied der Akademie zu Berlin. — Geb. den 18. März 1796. — Gest. den 1. April 1863.“

Dieser Akt der Pietät gegen den großen Forscher sei hier lobend erwähnt.

Jahrhundertfeier der Technischen Hochschulen zu Prag. Am 9. November d. J. begingen die deutsche und die tschechische Technische Hochschule die Jahrhundertfeier der im Jahre 1806 erfolgten Gründung der Prager technischen Hochschule. Die Gründung der tschechischen Hochschule bezw. ihre Abzweigung erfolgte bekanntlich im Jahre 1869.

Literarisches.

1. Notizen und Besprechungen.

H. Burkhardt, Entwicklungen nach oszillierenden Funktionen und Integration der Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Bericht, erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. X. Band. II. Heft. 5. Lieferung. [S. 1073—1392.] Leipzig 1906, B. G. Teubner.

Das vorliegende Heft bringt zunächst den Bericht über die Einführung der Methoden der französischen mathematischen Physik in England bis zum Auftreten Lord Kelvins, also bis zu dem Punkte, mit welchem dieser Assimilationsprozeß als abgeschlossen gelten kann. Von da an schien mir die bis dahin festgehaltene synchronistische Behandlungsweise unzweckmäßig; ich habe daher angefangen, die einzelnen Zweige der mathematischen Physik einzeln zu besprechen. So ist im vorliegenden Heft die Lehre von der Wärmeleitung samt ihren physikalischen Anwendungen bis auf die Gegenwart verfolgt und eine entsprechende Behandlung der Lehre von der Elektrizitätsleitung begonnen, soweit sie von der allgemeinen elektromagnetischen Theorie losgelöst werden kann. Das nächste Heft soll dann diese zu Ende führen und in entsprechender Weise die Probleme der Hydro-

dynamik und der Elastizität behandeln, ein folgendes Optik und Elektromagnetismus, das letzte die abstrakt mathematischen Formulierungen.

Zürich. H. BURKHARDT.

Englische Ausgabe von Koenigsbergers Helmholtz-Biographie. Von der großen dreibändigen Helmholtz-Biographie, die Koenigsberger vor einigen Jahren im Verlage von Vieweg und Sohn in Braunschweig herausgegeben hat, ist eine englische Ausgabe erschienen. Der Text ist nur ganz unwesentlich gekürzt worden; die Übersetzung hat Francis A. Welby besorgt. Der englischen Ausgabe, die im Verlage der Clarendon Press zu Oxford erschien, ist eine Vorrede aus der Feder Lord Kelvins beigegeben, in der auf die vielen Verdienste hingewiesen wird, die Helmholtz auf dem Gebiete der biologischen und mathematisch-physikalischen Wissenschaften sich erworben hat.

Leon, Dr. Alfons, Assistent an der k. k. Technischen Hochschule in Wien, **Proseminaraufgaben aus der Elastizitätstheorie.** Mit 12 Textfiguren. 65 S. 8⁰. Wien 1906, Karl Fromme.

Das vorliegende Bändchen enthält eine Folge von sechs kleinen Studien, welche in das Gebiet der Elastizitätstheorie gehören und zu ihrem Studium und zu ihrer Übung anregen sollen. — In der ersten Aufgabe werden die Spannungen und Formänderungen einer Gattung von gleichmäßig sich drehenden Rotationskörpern untersucht, deren Meridianschnitt eine Kurve vierter Ordnung ist, welche aber in besonderen Fällen in eine Ellipse und in eine Gerade übergehen kann. Die übrigen Aufgaben behandeln: „Spannungen und Formänderungen einer um eine ihrer Achsen rotierenden elliptischen Scheibe“, „Spannungen und Formänderungen einer rotierenden Kreisscheibe“, „Über das Gleichgewicht einer Kegelscheibe, wenn die Temperatur eine Funktion des Radius ist“, „Über das elastische Gleichgewicht einer Kreisscheibe, in welcher die Temperatur in besonderer Weise von zwei Veränderlichen abhängt“ und „Über das elastische Gleichgewicht einer rotierenden rechteckigen Platte“.

Leon, Dr. Alfons, Assistent an der k. k. Technischen Hochschule in Wien, **Spannungen und Formänderungen** einer um einen ihrer Durchmesser gleichmäßig sich drehenden Kreisscheibe. Mit 5 Textfiguren. 33 S. 8⁰. Wien 1906, Karl Fromme.

Die vorliegende Studie beantwortet die Frage nach dem elastischen Gleichgewicht einer um einen ihrer Durchmesser gleichmäßig sich drehenden Kreisscheibe. Die Formeln für die Spannungen und Formänderungen werden explizit angegeben, und im Anschlusse an die mathematische Ableitung sind Zahlenbeispiele und Abbildungen zu finden.

Ewald Horn, Verzeichnis der an den höheren Lehranstalten Preußens eingeführten Schulbücher. Im amtlichen Auftrage herausgegeben. Zweite Ausgabe. [IV u. 116 S]. gr. 8. B. G. Teubner, Leipzig 1906.

Die erste Ausgabe des im amtlichen Auftrage herausgegebenen Verzeichnisses der an den höheren Lehranstalten Preußens eingeführten Schulbücher erschien im Jahre 1901. Die vorliegende zweite Ausgabe ist nach denselben Grundsätzen bearbeitet worden, nur sind den Titeln laufende Nummern beigegeben worden, die eine rasche Übersicht und Verweisung

erleichtern. — In XVIII werden die mathematischen Lehr- und Übungsbücher nebst den Logarithmentafeln aufgezählt, die gegenwärtig in Preußen auf höheren Schulen eingeführt sind; sie umfassen die Nummern 768—864 (Lehr- und Übungsbücher) und 865—882 (Logarithmen). Am Schluß findet sich eine Übersicht über die einzelnen Provinzen. Daß das Verzeichnis und die Übersicht einen sehr willkommenen und interessanten Einblick in den Unterrichtsbetrieb gewährt, bedarf keiner besonderen Ausführung, und so wird die mühevolle Arbeit des Verfassers, des bekannten Vorstehers der königlichen Auskunftstelle für Schulbücher des höheren Unterrichtswesens in Berlin, auch außerhalb des Kreises der Schule und der Schulverwaltung Beachtung finden.

Elementare kosmische Betrachtungen über das Sonnensystem und Widerlegung der von Kant und Laplace aufgestellten Hypothesen über dessen Entwickelungsgeschichte. Einige Vorträge von Professor Dr. Gustav Holzmüller. Mit 8 Figuren im Text [VI u. 98 S.] 8. B. G. Teubner, Leipzig 1906.

Den Inhalt mehrerer Vorträge, die ich in einigen Vereinen deutscher Ingenieure und im naturwissenschaftlichen Vereine zu Krefeld gehalten habe, lege ich hiermit einem größeren Leserkreise vor. Größere mathematische Vorkenntnisse sind nicht unbedingt erforderlich, wohl aber ist einige Übung auf dem Gebiete der Gymnasialmathematik erwünscht. — Zunächst versuche ich die drei Keplerschen Gesetze der Planetenbewegung eingehend zu erläutern und das Newtonsche Gesetz als die Ursache der elliptischen Bahnform hinzustellen. Für den Fall der Kreisbahn wird vorläufig das dritte Keplersche Gesetz bewiesen und mit seiner Hilfe die Sonnenmasse als das etwa 355 000 fache der Erdmasse berechnet. — Unter dem Einkörperproblem verstehe ich die Bewegung eines Weltkörpers, der dem Newtonschen Gesetze entsprechend nach einem festen Raumpunkte gezogen wird. Zunächst wird der Fall der geradlinigen Bewegung eingehend behandelt. Daran wird sofort die von Robert Mayer gelehrte Wärmeumsetzung erläutert, die beim Aufprall von Meteorsteinen erfolgt, auch die von Helmholtz erdachte Umsetzung der Gravitationsarbeit in Wärme. Die Berechnung des Wärmevorrates der Sonne wird durchgeführt. — An dieses interessante Übungsbeispiel schließt sich die allgemeine Behandlung des Einkörperproblems an. Elementar wird bewiesen, wie die Bewegung auf Kegelschnitte führt, in deren einem Brennpunkte sich das anziehende Zentrum befindet. Das Prinzip von der Erhaltung der Arbeit wird dabei formuliert. Schließlich wird für die Umlaufszeit die Formel $t = a\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ abgeleitetet, wo a die längere Halbachse der Ellipse und g die Anziehungsbeschleunigung im Perihel ist. Durch Division für zwei Fälle folgt das dritte Keplersche Gesetz ganz allgemein. — Daran schließt sich die Behandlung des Zweikörperproblems, wobei das Schwerpunktsprinzip zur Erläuterung kommt. — Im Interesse des Dreikörperproblems wird ein Satz über die Störungstheorie eingeschaltet und mit seiner Hilfe das Problem der Ebbe und Flut behandelt und auf die Berechnung der Mondmasse angewandt. Das Dreikörperproblem selbst wird mit den drei Prinzipen erläutert, auch über das n-Körperproblem das Wichtigste gesagt. — Darauf folgt die Darstellung des jetzigen Zustandes der Sonne

nach den neuesten Forschungen beobachtender und rechnender Art. Den Abschluß bilden die Hypothesen von Kant und Laplace über die Entwickelungsgeschichte des Sonnensystems, die einer eingehenden Kritik unterworfen und als unwissenschaftliche Phantasien abgelehnt werden. Die Auswahl alles dessen, was vorher dargestellt wurde, war nur in der Absicht erfolgt, diese Kritik zu ermöglichen. Schlußbemerkungen naturwissenschaftlicher und philosophischer Art vollenden das Ganze. Möge es dem Leserkreise einige Anregung gewähren, den Lehrerkreisen aber zeigen, wie die Elementarkenntnisse die Behandlung des Gegenstandes in der Schule ermöglichen. Eine mit höheren Hilfsmitteln arbeitende Widerlegung der Kant-Laplaceschen Theorien behalte ich mir vor.

Hagen i. W. GUSTAV HOLZMÜLLER.

Mathematische Annalen. Die vergriffenen Bände 3, 4—7, 31—33 und 50—53 sind vom Verlage auf dem Wege des anastatischen Neudruckes wieder ergänzt worden und durch alle Buchhandlungen zu beziehen.

Redaktionswechsel der Annalen der Physik. An Stelle des verstorbenen Professor Dr. Paul Drude, der die letzten Jahre die Redaktion der Annalen der Physik (Verlag von Joh. Ambrosius Barth in Leipzig) in Händen hatte, hat Herr Professor Dr. W. Wien in Würzburg als Hauptredakteur die Leitung dieser Zeitschrift übernommen.

2. Bücherschau.

Adler, A., Theorie der geometrischen Konstruktionen. Mit 177 Figuren. VIII, 301 S. Leipzig 1906. ℳ 9.—.

Barnes, E. W., Asymptotic expansion of integral functions defined by Taylor's series. 6 s.

Bendt, Fr., Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. 3. verb. Auflage. Mit 39 in den Text gedruckten Abbildungen. XVI, 268 S. Leipzig 1906. ℳ 3.—.

Bernstein, R., Les courbes du troisième degré. Thèse. Besançon 1906.

Blaschke, E., Vorlesungen über mathematische Statistik. Mit 17 Textfiguren u. 5 Tafeln. VIII, 268 S. Leipzig 1906. ℳ 7.40.

Borelius, J., Zur Theorie der Filarevoluten und Parallelkuren ebener und sphärischer Kurven. Dissertation. Lund 1906, 1 Kr 50 Øre.

Burkhardt, H., Funktionentheoretische Vorlesungen. 2. Bd. Elliptische Funktionen. 2, durchgesehene und verbesserte Auflage. XVI, 374 S. m. Fig. Leipzig 1906. ℳ 11.—.

Bürklen, O. Th., Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie des Raumes. Mit 8 Figuren. 98 S. Leipzig 1906. ℳ 0.80.

Czuber, E., Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. II. Band. 2. sorgfältig durchgesehene Auflage. VIII, 532 S. m. 87 Fig. Leipzig 1906. ℳ 12.—.

Drude, P., Lehrbuch der Optik. 2., erweiterte Auflage. Mit 110 Abbildungen XVI, 538 S. Leipzig 1906. ℳ 12.—.

Durège, H., Elemente der Theorie der Funktionen einer komplexen veränderlichen Größe. In 5. Auflage neu bearbeitet von L. Maurer. X, 398 S. m. 41 Fig. Leipzig 1906. ℳ 9.—.

Eggenberger, J., Beiträge zur Darstellung des Bernoullischen Theorems der Gammafunktion und des Laplaceschen Integrals. 2. Auflage. 79 S. Jena 1906. ℳ 2.50.

Fields, J. Ch., Theory of the algebraic functions of a complex variable. 186 S. Upsala 1906. ℳ 12.—.

Fuchs, L., Gesammelte mathematische Werke. Herausgegeben von Rich. Fuchs und L. Schlesinger. 2. Bd. Abhandlungen 1875—1887. Redigiert von L. Schlesinger. X, 487 S. Berlin 1906. ℳ 30.—.

Gepp, H., Über Inversionssummen. Dissert. 40 S. Gießen 1906.

Geyger, E., Lehrbuch der darstellenden Geometrie, für den Gebrauch an technischen Hochschulen, mittleren gewerblichen Lehranstalten, Kunstgewerbeschulen, Fortbildungsschulen usw. und für das Selbststudium. XVIII, 321 S. Leipzig 1906. ℳ 8.—.

Harbauer, K., Die praktische Geometrie (Feldmeßkunst). Mit 186 Zeichnungen und 5 Tafeln. IV, 136 S. Wien 1906. ℳ 4.50.

Hempel, J., Schattenkonstruktionen für den Gebrauch an Baugewerkschulen, Gewerbeschulen und ähnlichen Lehranstalten sowie zum Selbstunterricht. Mit 51 Textfig. u. 20 Taf. praktischer Beispiele in Lichtdruck. IV, 60 S. quer Folio. Leipzig 1906. ℳ 5.—.

Herrmann, G., Die graphische Theorie der Turbinen und Kreiselpumpen. 3. Aufl. Mit 58 Abbildungen und 7 lithographierten Tafeln. VII, 213 S. Berlin 1906. ℳ 8.—.

Heun, K., Lehrbuch der Mechanik. Kinematik. Mit einer Einleitung in die elementare Vektorrechnung. Mit 94 Textfiguren. XVI, 339 S. Leipzig 1906. ℳ 8.—.

Holzmüller, G., Elementare kosmische Betrachtungen über das Sonnensystem und Widerlegung der von Kant und Laplace aufgestellten Hypothesen über dessen Entwicklungsgeschichte. Einige Vorträge. VI, 98 S. m. 8 Fig. Leipzig 1906. ℳ 1.80.

3. Zeitschriftenschau.

(Von dem Inhalt der Zeitschriften werden nur die Aufsätze erwähnt, welche dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften angehören.)

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. Tome 142. [1 Janvier — 14 Mai 1906.]

C. Guichard, Sur la déformation des quadriques. — Auric, Théorème sur les fonctions entières. — M. Lerch, Sur les théorèmes de Sylvester concernant le quotient de Fermat. — J. Hadamard, Sur les transformations planes. — W. Steklov, Sur le mouvement nonstationnaire d'un ellipsoïde de révolution qui ne change pas sa figure pendant le mouvement. — Edmond Seux, Sur la stabilité des aéroplanes et la construction rationnelle des plans sustentateurs. — Bouquet de la Grye, Sur l'atterrissage des aéroplanes. — Mascart, Sur les rayons N. — E. Goursat, Sur les intégrales infiniment voisines des équations aux dérivées partielles. — E. Merlin, Sur une famille de réseaux conjugués à une même congruence. — G. Zemplen, Sur l'impossibilité des ondes de choc négatif dans les gaz. — A. Krebs, Conditions d'établissement et d'application d'un amortisseur progressif à la suspension des véhicules sur route. — A. Korn, Sur un théorème relatif aux dérivées secondes du potentiel d'un volume attirant. — C. Guichard, Sur certains systèmes de cercles et de sphères qui se présentent dans la déformation des quadriques. — Gambier, Sur les équations différentielles du second ordre dont l'intégrale générale est uniforme. — P. Duhem, Sur les quasi-ondes de choc et la distribution des températures en ces quasi-ondes. — E. Holmgren, Sur un problème du calcul des variations. — A. Korn, Solution générale du problème d'équilibre dans la théorie de l'élasticité, dans le cas où les déplacements des points de la surface sont donnés. — P. Helbronner, Sur quelques résultats de la triangulation du massif Pelvoux-Ecrins. — P. Duhem, Quelques lemmes relatifs aux quasi-ondes de choc. — E. Maillet, Sur les fonctions entières. — L. Remy, Sur un hessien hyperelliptique. — A. Boulanger, Extinction de l'onde solitaire propagée le long d'un tube horizontal. — Hatt, Détermination simultanée de deux

points au moyen des constructions graphiques à grande échelle. — J. Boussinesq, Propagation du mouvement autour d'un centre dans un milieu élastique homogène et isotrope 1) Etude de l'onde corrélative aux variations de densité. — P. Duhem, Sur une inégalité importante dans l'étude des quasi-ondes de choc. — P. Boutroux, Sur l'indétermination d'une fonction au voisinage d'une singularité transcendante. — L. Fejér, Sur la série de Fourier. — H. Dulac, Intégrales d'une équation différentielle dans le voisinage d'un point dicritique. — P. Fatou, Sur l'application de l'Analyse de Lejeune Dirichlet aux formes quadratiques à coefficients et à indéterminées conjuguées. — Th. Banachiewitz, Sur un cas particulier du problème des n corps. — L. Fredey, Sur la signification exacte du principe de Carnot. — A. Korn, Sur les vibrations d'un corps élastique dont la surface est en repos. — Ivar Fredholm, Sur la théorie des spectres. — G. Humbert, Sur quelques conséquences arithmétiques de la théorie des fonctions abéliennes. — J. Boussinesq, Propagation du mouvement autour d'un centre dans un milieu élastique homogène et isotrope 2) Etude de l'onde produite sans changements de densité. — B. Bailland et E. Mathias, Sur la carte magnétique des Iles Britanniques. — L. Bianchi, Sur la déformation des quadriques — S. Bernstein, Sur les singularités des solutions des équations aux dérivées partielles du type elliptique. — J. Boussinesq, Propagation du mouvement autour d'un centre dans un milieu élastique homogène et isotrope 3) Caractères de l'onde totale. — P. Duhem, Sur les quasi-ondes de choc au sein des fluides mauvais conducteurs de la chaleur. — V. Volterra, Sur les fonctions qui dépendent d'autres fonctions. — J. Juhel-Rénoy, Sur les affixes des racines d'un polynome de degré n et du polynome dérivé. — T. Boggio, Nouvelle résolution du problème de l'induction magnétique pour une sphère isotrope. — P. Duhem, Sur les quasi-ondes de choc au sein d'un fluide bon conducteur de la chaleur. — G. Tarry, Sur un carré magique. — E. Goursat, Sur la théorie des caractéristiques. — L. Zoretti, Sur les ensembles discontinus. — P. Fatou, Sur le développement en série trigonométrique des fonctions non intégrables. — L. Remy, Sur les surfaces hyperelliptiques définies par les fonctions intermédiaires singulières. — P. H. Schoute, La réduction analytique d'un système quelconque de forces dans un espace à n dimensions. — E. Maillet, Sur les fonctions hypertranscendantes. — E. Picard, Sur quelques problèmes de Physique mathématique qui se rattachent à l'équation de Fredholm. — G. Bigourdan, Sur un moyen de contrôler un système d'horloges synchronisées électriquement. — J. Clairin, Sur les transformations de systèmes d'équations aux dérivées partielles du second ordre. — E. Fabry, Courbes algébriques à torsion constante. — H. Taber, Sur les groupes réductibles de transformations linéaires et homogènes. — G. Lery, Sur l'équation de Laplace à deux variables. — C. Guichard, Sur les variétés doublement infinies de points d'une quadrique de l'espace à quatre dimensions applicables sur un plan. — M. d'Ocagne, Sur un théorème de J. Clark. — A. Buhl, Sur la généralisation des séries trigonométriques. — L. Schlesinger, Sur certaines séries asymptotiques. — Jouguet, Sur l'accélération des ondes de choc sphériques. — A. Blondel, Application du principe de la superposition à la transmission des courants alternatifs sur une longue ligne. — E. Guyou, Sur un effet singulier du frottement. — P. Vieille et J. Liouville, Influence des vitesses sur la loi de déformation des métaux. — Haton de la Goupillière, Centres de gravité de systèmes discontinus.

4. Kataloge.

Carlo Clausen, (Hans Rink), Torino. Catalogo antiquario Nr. 128. Matematica, Astronomia, Fisica.

Gustav Fock, Leipzig, Schloßgasse 7/9. Antiquariats-Verzeichnis Nr. 293. Mathematik und Physik.

A. Hermann, Paris, Rue de la Sorbonne 6. Catalogue d'ouvrages, mémoires et collections sur la physique. XXIXe année, 1906, Nr. 87.

Ferdinand Schöningh, Osnabrück. Lagerkatalog Nr. 77. Naturwissenschaften (. . . Astronomie, Mathematik, . . .).

Henry Sotheran and Co., London, 140, Strand. W. C. Bibliotheca chemico-mathematica. Part. I. (Nr. 666).

B. G. Teubner, Leipzig. Mitteilungen. 39. Jahrgang. Nr. 2[1].

5. Bei der Redaktion eingegangene Schriften.

[Titel, Preis usw. der eingesandten Schriften werden hier regelmäßig veröffentlicht. Besprechungen geeigneter Bücher bleiben vorbehalten. Eine Rücksendung der eingegangenen Schriften kann nicht erfolgen.]

H. Andoyer, Cours d'astronomie. Première partie. Astronomie théorique. A. Hermann, Paris 1906. Frcs. 9.—.

F. Bendt, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. 3., verbesserte Auflage. Mit 39 in den Text gedruckten Abbildungen. XVI, 268 S. 8°. J. J. Weber, Leipzig 1906.

A. Börsch, Lotabweichungen. Heft III. Astronomisch-geodätisches Netz I. Ordnung nördlich der europäischen Längengradmessung in 52 Grad Breite. Mit einer lithographierten Tafel. [Veröffentlichung des Königl. Preußischen Geodätischen Institutes. Neue Folge Nr. 28.] VI, 164 S. 4°. P. Stankiewicz, Berlin 1906.

W. v. Dyck, Die naturwissenschaftliche Hochschulausbildung. **K. Kräpelin**, Naturwissenschaftlich-technische Museen. **Otto N. Witt**, Naturwissenschaftlich-technische Ausstellungen. (In Band I, 1 der „Kultur der Gegenwart", herausgegeben von Paul Hinneberg. Verlag von B. G. Teubner, Leipzig 1906).

Franz Fuchs, Beiträge zur Theorie der elektrischen Schwingungen eines leitenden Rotationsellipsoids. Dissertation, München 1906.

M. Girndt, Technik und Schule. Beiträge zum gesamten Unterrichte an technischen Lehranstalten. In zwanglosen Heften. I. Band. 1. Heft. 64 S. 8°. B. G. Teubner, Leipzig 1906. ℳ 1.60.

K. Heun, Lehrbuch der Mechanik. I. Teil. Kinematik mit einer Einleitung in die elementare Vektorrechnung. Mit 94 Figuren im Text. G. J. Göschensche Verlagshandlung, Leipzig 1906. ℳ 9.—.

Kunzes Kalender für das höhere Schulwesen Preußens. 13. Jahrgang 1906. II. Teil. Mit Benutzung amtlichen Materials herausgegeben von Professor Dr. Toeplitz und Professor Malberg. Trewendt und Granier, Breslau 1906.

H. Laurent, La géométrie analytique générale. A. Hermann, Paris 1906. Frcs. 6.—.

H. Leschanowsky, Gemeinverständliche erste Einführung in die höhere Mathematik und deren Anwendung. Mit 34 Figuren im Text. VIII, 85 S. 8°. Carl Fromme, Wien 1907.

Gino Loria, La riforma della scuola media in Germania. (Estratto dalla Rivista Ligure-Genova) 1906.

O. Meissner, Die meteorologischen Elemente und ihre Beobachtung. Mit Ausblicken auf Witterungskunde und Klimalehre. Unterlagen für schulgemäße Behandlung sowie zum Selbstunterricht. Mit 33 Textabbildungen. VI, 94 S. 8°. B. G. Teubner, Leipzig 1906. ℳ 2.60.

Berichtigung.

S. 36, Z. 6 lies statt „dieses": „des obigen ganzzahligen". A. Schoenflies.